

Kovarianz und Korrelation

9. Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$ und $V(Y) = 2$. X und Y seien unkorreliert. Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$ für
 - (a) $Z = 3 + 2X + Y$, (b) $Z = X + Y$, (c) $Z = X - Y$.
10. Gegeben sind die unkorrelierten Zufallsvariablen Z_t , $t = 1, \dots, T$, mit Erwartungswert $E(Z_t) = 0$ und Varianz $V(Z_t) = \sigma^2$. Berechnen Sie $E(\sum_{t=1}^T Z_t)$ und $V(\sum_{t=1}^T Z_t)$.
11. Gegeben sind die unkorrelierten Zufallsvariablen Y_t , $t = 1, \dots, T$, mit Erwartungswert $E(Y_t) = 0.5$ und Varianz $V(Z_t) = \sigma^2$. Berechnen Sie $E(\sum_{t=1}^T Y_t)$ und $V(\sum_{t=1}^T Y_t)$.
12. Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 2$ und $\text{Cov}(X, Y) = 1$.
 - (a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\text{Corr}(X, Y)$.
 - (b) Berechnen Sie $E(Z)$ und $V(Z)$ für
 - (i) $Z = 3 + 2X + Y$, (ii) $Z = X + Y$, (iii) $Z = X - Y$.
13. Gegeben seien die Zufallsvariablen X und Y , mit Erwartungswerten bzw. Varianzen $E(X) = 1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 2$, sowie
 - (1) $\text{Corr}(X, Y) = -1$, (2) $\text{Corr}(X, Y) = 0$, und (3) $\text{Corr}(X, Y) = 1$.
 Berechnen Sie für (1)–(3)
 - (a) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$.,
 - (b) die Varianzen für
 - (i) $Z = 3 + 2X + Y$, (ii) $Z = X + Y$, (iii) $Z = X - Y$.
14. Wie Aufgabe 13 aber mit $V(Y) = 4$.
15. Gegeben sind die Renditen R_i dreier Wertpapiere mit folgenden Erwartungswerten und (Ko-) Varianzen: $E(R_1) = 0.1$, $E(R_2) = 12$, $E(R_3) = 0.08$; $V(R_1) = 0.09$, $V(R_2) = 0.16$, $V(R_3) = 0.25$; $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0.01$, $\text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02$ und $\text{Cov}(R_2, R_3) = -0.03$. Stellen Sie insgesamt vier Kombinationen der Form $P = \alpha R_i + (1 - \alpha) R_j$ bzw. $P = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3$ zusammen indem Sie geeignete Werte für α bzw. α_1 und α_2 wählen.
 - (a) Berechnen Sie für jedes P Ihrer Wahl Erwartungswert $E(P)$ und Varianz $V(P)$.
 - (b) Nach welchen Kriterien beurteilen Sie die Kombinationen.
 - (c) Welcher Kombination würden Sie den Vorzug geben.
16. Wir beziehen uns auf die Angabe in Aufgabe 15
 - (a) Berechnen Sie die einzelnen Korrelationskoeffizienten. Wie groß ist $\text{Corr}(R_1, R_1)$?
 - (b) Geben Sie die Kovarianzmatrix Σ an.
 - (c) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix durchg. Matrixoperationen.
 - (d) Berechnen Sie die Varianzen der Kombinationen bestehend aus R_1 , R_2 und R_3 über $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, (1 - \alpha_1 - \alpha_2))'$.
17. Berechnen Sie die optimale Kombination von R_1 und R_2 in Aufgabe 15.

Lösungen

9. (a) $E(Z) = 8$, $V(Z) = 10$; (b) $E(Z) = 4$, $V(Z) = 4$; (c) $E(Z) = -2$, $V(Z) = 4$.
10. $E(\sum_{t=1}^T Z_t) = 0$, $V(\sum_{t=1}^T Z_t) = T\sigma^2$.
11. $E(\sum_{t=1}^T Z_t) = 0.5T$, $V(\sum_{t=1}^T Z_t) = T\sigma^2$.
12. (a) $\text{Corr}(X, Y) = 0.5$; (b) (i) $E(Z) = 8$, $V(Z) = 14$; (ii) $E(Z) = 4$, $V(Z) = 6$; (iii) $E(Z) = -2$, $V(Z) = 2$.
13. (a) (1) -2 , (2) 0 , (3) 2 ; (b) (i) (1) 2 , (2) 10 , (3) 18 ; (ii) (1) 0 , (2) 4 , (3) 8 ; (iii) (1) 8 , (2) 4 , (3) 0 .
14. (a) (1) $-\sqrt{8}$, (2) 0 , (3) $\sqrt{8}$; (b) (i) (1) $12 - 4\sqrt{8}$, (2) 12 , (3) $12 + 4\sqrt{8}$; (ii) (1) $6 - 2\sqrt{8}$, (2) 6 , (3) $6 + 2\sqrt{8}$; (iii) (1) $6 + 2\sqrt{8}$, (2) 6 , (3) $6 - 2\sqrt{8}$.
16. (a) $\text{Corr}(R_1, R_2) = 0.0833333$, $\text{Corr}(R_1, R_3) = 0.133333$, $\text{Corr}(R_2, R_3) = -0.15$, $\text{Corr}(R_1, R_1) = 1$;
- (b) $\Sigma = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix}$;
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0.0833333 & 0.133333 \\ 0.0833333 & 1 & -0.15 \\ 0.133333 & -0.15 & 1 \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.09}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{0.25}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.09}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{0.16}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{0.25}} \end{pmatrix}$;
- (d) $V(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) R_3) =$
 $(\alpha_1, \alpha_2, (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) \begin{pmatrix} 0.09 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.16 & -0.03 \\ 0.02 & -0.03 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$
17. $\alpha_1 = 0.652174$, $\alpha_2 = 0.347826$.