Funktionen in mehreren Variablen

1. Gegeben ist die Nutzenfunktion U eines Haushalts bezüglich zweier komplementärer Güter, Gut 1 und Gut 2 (z.B. linker Schuh und rechter Schuh eines Paars). Skizzieren Sie das Funktionen-(Nutzen-)gebirge und zeichnen Sie die Höhenlinien (Isonutzenlinien) für $U = U_0 = 1$ und $U = U_1 = 2$ ein.

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{\min(x_1, x_2)}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Hinweis: $\min(x_1, x_2)$ ist definiert als der kleinere der beiden Werte von x_1 und x_2. Z.B.: $\min(1, 2) = 1$.
Probieren Sie z.B. die Paare $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, ..., $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, ..., $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, ...

2. Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle $(1, 1)$:

(a) $f(x, y) = x + y$ (b) $f(x, y) = x\,y$ (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$
(d) $f(x, y) = x^2\,y^2$ (e) $f(x, y) = x^\alpha\,y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

Wie lauten Gradient und Hesse-Matrix an der Stelle $(1, 1)$?

3. Berechnen Sie die stationären Punkte folgender Funktionen und stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um (lokale) Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

(a) $f(x, y) = -x^2 + xy + y^2$
(b) $f(x, y) = \frac{1}{x}\ln(x) - y^2 + 1$
(c) $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3\,x_1 + 4\,x_2 - e^{x_1} - e^{x_2}$$

Berechnen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion.

5. Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - x_1)\,x_2 + x_3^2$$

Stellen Sie fest ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

6. (Preisdiskiminierung)
Angenommen eine monopolistische Firma produziert ein Gut und beliefert drei Märkte. Die Nachfragefunktionen in diesen Märkten seien

$$p_1 = 63 - 4\,q_1, \qquad p_2 = 105 - 5\,q_2 \qquad \text{und} \qquad p_3 = 75 - 6\,q_3.$$

Dabei ist p_i der Preis und q_i die abgesetzte Menge im Markt i. Der Gesamtumsatz R der Firma ergibt sich aus den drei Einzelumsätzen:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = p_1\,q_1 + p_2\,q_2 + p_3\,q_3.$$

Die Produktionskosten C seien unabhängig vom jeweiligen Markt:

$$C = 20 + 15q = 20 + 15(q_1 + q_2 + q_3).$$

Die Firma möchte ihren Gewinn $R - C$ maximieren. Berechnen Sie die optimale Gesamtproduktion und den Umsatz in den einzelnen Märkten.

7. Gesucht sind die (lokalen) Extrema von $f(x, y) = x^2 y$ unter der Nebenbedingung $x + y = 3$.

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

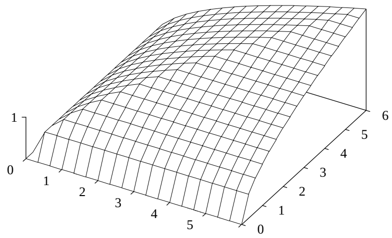
(b) Berechnen Sie die stationären Punkte.

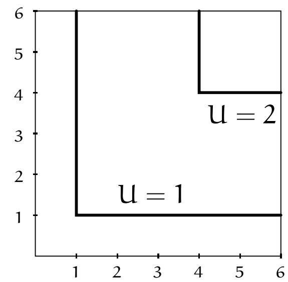
(c) Stellen Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix fest, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

8. Ein Haushalt möchte für ein bestimmtes Nutzenniveau, $U = U_0$, seine Ausgaben E minimieren. Es sei $U = U_0 = 1 = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ und $E = 4x_1 + x_2$. Berechnen Sie die optimale Konsumkombination der Gütermengen x_1 und x_2. Wie ändern sich die Ausgaben bezüglich des Nutzenniveaus?

Lösungen

1.





2. Ableitungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	y	$2x$	$2xy^2$	$\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}$
f_y	1	x	$2y$	$2x^2 y$	$\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}$
f_{xx}	0	0	2	$2y^2$	$\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} y^{\beta}$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	$4xy$	$\alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$
f_{yy}	0	0	2	$2x^2$	$\beta(\beta-1) x^{\alpha} y^{\beta-2}$

Ableitungen an der Stelle $(1,1)$:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
f_x	1	1	2	2	α
f_y	1	1	2	2	β
f_{xx}	0	0	2	2	$\alpha(\alpha-1)$
$f_{xy} = f_{yx}$	0	1	0	4	$\alpha\beta$
f_{yy}	0	0	2	2	$\beta(\beta-1)$

3. (a) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$M_2 = -5 < 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_0$ ist Sattelpunkt.
(b) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (e,0)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -e^{-3} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,
$M_1 = -e^{-3} < 0$, $M_2 = 2\,e^{-3} > 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_0$ ist lokales Maximum.
(c) stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (1,1)$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$,
$M_1 = 802 > 0$, $M_2 = 400 > 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_0$ ist lokales Minimum.

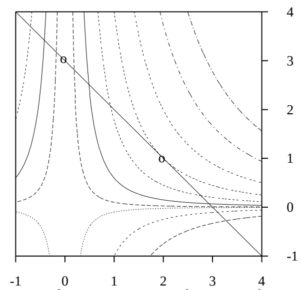
4. stationärer Punkt: $\mathbf{x}_0 = (\ln(3), \ln(4))$, $\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -e^{x_1} & 0 \\ 0 & -e^{x_2} \end{pmatrix}$,
Hauptminoren: $M_1 = -e^{x_1} < 0$, $M_2 = e^{x_1} \cdot e^{x_2} > 0$, für alle (x_1, x_2)
$\Rightarrow$ lokales und globales Maximum in $\mathbf{x}_0 = (\ln(3), \ln(4))$.

5. stationäre Punkte: $\mathbf{x}_1 = (0,0,0)$, $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{x}_3 = (-1,0,0)$,
$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2-1 & 0 \\ 3x_1^2-1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
Hauptminoren für stationäre Punkte: $M_1 = 6x_1x_2 = 0$, $M_2 = -(3x_1^2-1)^2 < 0$ (da $x_1 \in \{0,-1,1\}$), $M_3 = -2\,(3x_1^2-1)^2 < 0$,
$\Rightarrow$ alle drei stationären Punkte sind Sattelpunkte.

6. Die zu optimierende Gewinnfunktion lautet:
$G(q_1, q_2, q_3) = R - C = q_1(63 - 4\,q_1) + q_2(105 - 5\,q_2) + q_3(75 - 6\,q_3) - (20 + 15(q_1 + q_2 + q_3)) = 48\,q_1 - 4\,q_1^2 + 90\,q_2 - 5\,q_2^2 + 60\,q_3 - 6\,q_3^2 - 20$, stationärer

Punkt: $\mathbf{q}^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (6, 9, 5)$, $\mathbf{H}_G = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, $M_1 = -8 < 0$, $M_2 = 80 > 0$, $M_3 = -960 < 0$, $\Rightarrow$ G ist konkav, $\Rightarrow$ $\mathbf{q}^*$ ist globales Maximum. optimale Gesamtproduktion $q_{\mathtt{opt}} = q_1^* + q_2^* + q_3^* = 6 + 9 + 5 = 20$, Umsätze: $R_1 = p_1^* q_1^* = (63 - 4\, q_1^*)\, q_1^* = 36 \cdot 6 = 234$, $R_2 = 540$, $R_3 = 225$.

7.



lokales Maximum in $(2, 1)$,
lokales Minimum in $(3, 0)$.

(b) Lagrangefunktion: $L(x, y; \lambda) = x^2\, y - \lambda(x + y - 3)$,
stationäre Punkte $\mathbf{x}_1 = (2, 1; 4)$ und $\mathbf{x}_2 = (0, 3; 0)$,

(c) geränderte Hesse-Matrix: $\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2\,y & 2\,x \\ -1 & 2\,x & 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1)) = 6 > 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_1$ ist ein lokales Maximum,

$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2)) = -6$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x}_2$ ist ein lokales Minimum.

8. stationäre Punkte: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; $\lambda = 4$.