

MgtSci: Linear Algebra

Zusatzbeispiele zur
Lehrveranstaltung

Wintersemester 2008/09

Josef Leydold

Department für Statistik und Mathematik
der Wirtschaftsuniversität Wien

14. Oktober 2008

Beispiele

Matrizen und Vektoren



1. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$



2. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned}$$



3. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 1 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 16x_2 + 9x_3 + 11x_4 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$



4. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 &= 3 \\ -x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= -2 \end{aligned}$$



5. Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (c) $3\mathbf{A}^t$ (d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t$
 (e) $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}$ (f) $\mathbf{C} + \mathbf{A}$ (g) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ (h) \mathbf{C}^2



6. Demonstrieren Sie an Hand der Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dass im allgemeinen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.



7. Überlegen Sie die Form der Produktmatrix (beliebig, Diagonal-, obere bzw. untere Dreiecksmatrix) bei der Multiplikation

- (a) einer Diagonalmatrix mit einer Diagonalmatrix,
 (b) einer oberen Dreiecksmatrix mit einer oberen Dreiecksmatrix,
 (c) einer Diagonalmatrix mit einer unteren Dreiecksmatrix.



8. Geben Sie eine Linearkombination der Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 an.

(a) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Überprüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind.

(a) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

10. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ = (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = (e) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

11. Veranschaulichen Sie an hand der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

daß $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \min(\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B}))$.

- 12.

- (a) Wieviele Lösungen hat ein *homogenes* Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$?
 (b) Kann $\text{rank}(\mathbf{A}) > \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ sein?

13. Bringen Sie die lineare Gleichungssysteme in den Aufgaben 1, 2 und 3 in Matrixform. Stellen Sie mit Hilfe der Ränge von Koeffizientenmatrix und erweiterter Koeffizientenmatrix die Anzahl der Lösungen fest.

14. Sind die folgenden Matrizen regulär, bzw. invertierbar? Geben Sie die jeweilige Inverse an.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

15. Zeigen Sie, daß für beliebige reguläre Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} : $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
 Hinweis: $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}$ ist definiert als jene Matrix \mathbf{C} mit $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{I}$.

16. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit \mathbf{A} aus Aufgabe 14(a) und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Inversen von \mathbf{A} .



17. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen nach \mathbf{X} auf. Nehmen Sie dabei an, daß alle Matrizen quadratische Matrizen gleicher Größe sind. Welche Bedingungen müssen außerdem noch erfüllt sein?

(a) $\mathbf{AX} + \mathbf{BX} = \mathbf{CX} + \mathbf{I}$

(b) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X} = -\mathbf{BX} + \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{AXA}^{-1} = \mathbf{B}$

(d) $\mathbf{XAX}^{-1} = \mathbf{C}(\mathbf{XB})^{-1}$

Vektorräume

18. Beschreiben Sie die angegebenen Mengen mittels formaler Notation. Welche dieser Mengen ist ein reeller Vektorraum? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie jeweils eine Basis an.
- Die Menge aller Vektoren mit 3 reellen Komponenten.
 - Die Menge aller Vektoren.
 - Die Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich 3.
 - Die Menge aller Polynome vom Grad gleich 3.
 - Die Menge aller Polynome.
 - Die Menge aller 3×3 -Matrizen.
 - Die Menge aller 3×3 -Diagonalmatrizen.
 - Die Menge aller oberen 3×3 -Dreiecksmatrizen.
 - Die Menge aller regulären 3×3 -Matrizen.
 - Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems.
 - Die Menge aller Vektoren \mathbf{y} , die als Ergebnis der Matrixmultiplikation \mathbf{Ax} für eine gegebene Matrix \mathbf{A} auftreten können.

19. Sind die angegebenen Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 linear unabhängig und welche Dimension hat der von ihnen aufgespannte Unterraum? In welchen Fällen handelt es sich um eine Basis für den \mathbb{R}^3 ?

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
- \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3 aus (b) sowie $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$.

20. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{x} = (2, 0, 1)^t$ und $\mathbf{y} = (1, 1, 4)^t$ und des Nullvektors unter der

- kanonischen Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- unter der Basis

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an.

21. Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Transformieren Sie die Basis aus 20(b) mit der Transformationsmatrix \mathbf{U} . Wie lautet die neue Basis?
- (b) Wie lautet die Matrix für die zu (a) umgekehrte Transformation?
- (c) Geben Sie die Matrix für die Transformation der Basis aus 20(a) zur Basis in 20(b) an.

22. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $\varphi_{\mathbf{A}}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ die durch \mathbf{A} erzeugte lineare Abbildung.

Berechnen Sie die Dimension des Bildes $\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})$ und des Kernes $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})$ und geben Sie je eine Basis für diese Unterräume an.

23. Testfragen:

- (a) Erklären Sie die Begriffe *Vektorraum* und (*aufgespannter*) *Unterraum*.
- (b) Was sind *Linearkombinationen* und welchen Zweck erfüllen sie? Geben Sie ein Beispiel an.
- (c) Was sind die *Basis* und die *Dimension* eines Vektorraumes?
- (d) Was versteht man unter einem *Basiswechsel*? Wie wird ein Basiswechsel durchgeführt?
- (e) Was ist eine *lineare Abbildung*? Wie kann man eine lineare Abbildung beschreiben?
- (f) Was versteht man unter *Image* und *Kern* einer linearen Abbildung? Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Mengen?
- (g) Was versteht man unter *ähnlichen* Matrizen?

Determinanten und Eigenwerte

24. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante von \mathbf{A} ist: $|\mathbf{A}| = -216$.

Berechnen Sie folgende Determinanten **ohne** technische Hilfsmittel:

(a) $|\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{C}|$, (c) $|\mathbf{A}^t|$, (d) $|\mathbf{C}^{-1}|$, (e) $|\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}|$.

25. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

26. (a) Berechnen Sie die Ränge der Matrizen aus Aufgabe 25.

(b) Welche dieser Matrizen sind regulär?

(c) Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

(d) Sind die Spaltenvektoren dieser Matrizen linear unabhängig?

27. Erstellen Sie in \mathbb{R} eine beliebige (3×2) -Matrix \mathbf{A} mit ganzzahligen Koeffizienten. Berechnen Sie $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von \mathbf{B} .

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Rang von \mathbf{A} und dem Rang von \mathbf{B} ? Wie lautet die Determinante von \mathbf{A} ?

(c) Versuchen Sie \mathbf{B} zu invertieren. Was beobachten Sie?

Führen Sie dieselbe Aufgabe mit einer (3×2) -Matrix \mathbf{A} mit zufälligen Komponenten durch. (Verwenden Sie dafür, z.B., die Funktion `rnorm`.)

28. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\text{(a)} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

29. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\text{(a)} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Erstellen Sie in \mathbb{R} zufällige (3×3) -Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} . Zeigen Sie:

(1) \mathbf{A} und \mathbf{A}^t besitzen dieselben Eigenwerte. (Was ist mit den Eigenvektoren?)

(2) Die Matrizen $\mathbf{A}\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}\mathbf{A}$ haben dieselben Eigenwerte. (Was ist mit den Eigenvektoren?)

- (3) Ist λ ein Eigenwert der regulären Matrix \mathbf{A} , dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von \mathbf{A}^{-1} .
 \mathbf{A} und \mathbf{A}^{-1} haben dieselben Eigenvektoren.
- (4) Ist λ ein Eigenwert von \mathbf{A} , dann ist λ^k ein Eigenwert von \mathbf{A}^k . (Was ist mit den Eigenvektoren?)
- (5) Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} ist gleich dem Produkt der Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

- (6) Die Summe der Eigenwerte λ_i einer Matrix \mathbf{A} ist gleich der Summe der Diagonalelemente (der *Spur* $\text{Sp}(\mathbf{A})$) von \mathbf{A} .

31. Erstellen Sie in \mathbb{R} eine zufällige (3×3) -Matrix \mathbf{A} . Sei $\varphi_{\mathbf{A}}$ die von \mathbf{A} erzeugte Funktion.

Gibt es eine Basis in der die $\varphi_{\mathbf{A}}$ beschreibende Matrix Diagonalgestalt hat? Wenn ja, nennen Sie ein Beispiel.

Wie lautet die Transformationsmatrix für diesen Basiswechsel (wenn bei der Basistransformation die Norm der Basisvektoren unverändert bleiben soll)?

Lösungen

1. $x_1 = 13, x_2 = -16, x_3 = 6$

2.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Die Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig.

3. Das Gleichungssystem ist inkonsistent, $L = \emptyset$.

4.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Die Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig.

5. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) nicht möglich, da Anzahl der Spalten von \mathbf{A}

ungleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{B} , (c) $3\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -18 & 3 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$,

(d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, (e) $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & 2 & -19 \\ 4 & -24 & 20 \\ 7 & -16 & 9 \end{pmatrix}$,

(f) nicht möglich, da Anzahl der Zeilen und Spalten nicht übereinstimmen,

(g) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 9 \\ 22 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, (h) $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. (a) Diagonalmatrix, (b) obere Dreiecksmatrix, (c) untere Dreiecksmatrix.

8. z.B.: (a) $2\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. (a) linear unabhängig, (b) linear unabhängig, (c) linear abhängig (Es können höchstens drei Vektoren mit drei Komponenten linear unabhängig sein. Hier ist also eine Rechnung überflüssig.)
10. (a) $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$, (b) $\text{rank}(\mathbf{B}) = 3$, (c) $\text{rank}(\mathbf{C}) = \text{rank}(\mathbf{D}^t) = 2$,
(d) $\text{rank}(\mathbf{D}) = 2$, (e) $\text{rank}(\mathbf{E}) = 3$
11. $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$, $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$, $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -10 & -8 & -6 \end{pmatrix} = 2$
12. (a) Mindestens eine Lösung. Die rechte Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix besteht aus lauter Nullen. Daher ist ihr Rang niemals größer als der Rang der Koeffizientenmatrix.
(b) Nein, da durch Hinzufügen einer Spalte zur Koeffizientenspalte der Rang nicht kleiner werden kann.
13. Aufgabe 1: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, Koeffizientenmatrix:
 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, erweiterte Koeffizientenmatrix: $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,
 $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3 = n \Rightarrow$ die Lösung ist eindeutig.
 Aufgabe 2: $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3 < n = 4 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.
 Aufgabe 3(b): $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3 < \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 4 \Rightarrow$ keine Lösung.
14. (a) regulär, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, (b) nicht regulär \Leftrightarrow nicht invertierbar,
die Inverse Matrix \mathbf{B}^{-1} existiert nicht.
15. $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Daraus folgt nach Definition der inversen Matrix: $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1})$ ist die Inverse zu $(\mathbf{A} \mathbf{B})$.
16. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 72 \\ -4 \\ -45 \end{pmatrix}$
17. (a) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$, die Inverse $(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$ muß existieren,
(b) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$, \mathbf{A}^{-1} muß existieren, (c) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}$, \mathbf{A}^{-1} muß existieren,
(d) $\mathbf{X} = \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C} (\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1}$, die Inversen von \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{X} müssen existieren.
18. (a), (c), (e), (f), (g), (h), (j), und (k) sind Vektorräume
19. (a) $\dim = 2$, (b) $\dim = 3$, (c) $\dim = 3$. Die Vektoren \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3 aus (b) bilden eine Basis.
20. (a) $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
21. (a) Sei $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Dann erhalten wir die neue Basis $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$
 durch $\mathbf{W} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$: $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
 (b) $\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$

- 22.** $\dim(\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$. $\dim(\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})) = 3 - \text{rank}(\mathbf{A}) = 1$. Beispiel für Basis von $\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})$: zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von \mathbf{A} ; Beispiel für Basis von $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})$: $(1, -2, 1)^t$.
- 24.** (a) -864 , (b) -216 , (c) -216 , (d) $-1/216$, (e) $186\,624$
- 25.** (a) -3 , (b) 0 , (c) 48 , (d) -49
- 26.** (a) Ränge der Matrizen aus Aufgabe 25: (a)–(b) Rang 2, (c)–(d) Rang 4 (Mit Ausnahme von (b) folgt dies bereits aus $\det \neq 0$). Alle Matrizen mit Ausnahme von 25(b) sind regulär, invertierbar und haben linear unabhängige Spaltenvektoren.
- 28.** (a) $\lambda_1 = 7$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (b) $\lambda_1 = 14$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$,
 $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 29.** (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.