

Determinanten und Eigenwerte

24. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante von \mathbf{A} ist: $|\mathbf{A}| = -216$.

Berechnen Sie folgende Determinanten **ohne** technische Hilfsmittel:

(a) $|\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{C}|$, (c) $|\mathbf{A}^t|$, (d) $|\mathbf{C}^{-1}|$, (e) $|\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}|$.

25. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

26. (a) Berechnen Sie die Ränge der Matrizen aus Aufgabe 25.

(b) Welche dieser Matrizen sind regulär?

(c) Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

(d) Sind die Spaltenvektoren dieser Matrizen linear unabhängig?

27. Erstellen Sie in \mathbb{R} eine beliebige (3×2) -Matrix \mathbf{A} mit ganzzahligen Koeffizienten. Berechnen Sie $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von \mathbf{B} .

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Rang von \mathbf{A} und dem Rang von \mathbf{B} ? Wie lautet die Determinante von \mathbf{A} ?

(c) Versuchen Sie \mathbf{B} zu invertieren. Was beobachten Sie?

Führen Sie dieselbe Aufgabe mit einer (3×2) -Matrix \mathbf{A} mit zufälligen Komponenten durch. (Verwenden Sie dafür, z.B., die Funktion `rnorm`.)

28. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\text{(a)} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

29. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\text{(a)} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Erstellen Sie in \mathbb{R} zufällige (3×3) -Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} . Zeigen Sie:

(1) \mathbf{A} und \mathbf{A}^t besitzen dieselben Eigenwerte. (Was ist mit den Eigenvektoren?)

(2) Die Matrizen $\mathbf{A}\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}\mathbf{A}$ haben dieselben Eigenwerte. (Was ist mit den Eigenvektoren?)

- (3) Ist λ ein Eigenwert der regulären Matrix \mathbf{A} , dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von \mathbf{A}^{-1} .
 \mathbf{A} und \mathbf{A}^{-1} haben dieselben Eigenvektoren.
- (4) Ist λ ein Eigenwert von \mathbf{A} , dann ist λ^k ein Eigenwert von \mathbf{A}^k . (Was ist mit den Eigenvektoren?)
- (5) Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} ist gleich dem Produkt der Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

- (6) Die Summe der Eigenwerte λ_i einer Matrix \mathbf{A} ist gleich der Summe der Diagonalelemente (der *Spur* $\text{Sp}(\mathbf{A})$) von \mathbf{A} .

31. Erstellen Sie in \mathbb{R} eine zufällige (3×3) -Matrix \mathbf{A} . Sei $\varphi_{\mathbf{A}}$ die von \mathbf{A} erzeugte Funktion.

Gibt es eine Basis in der die $\varphi_{\mathbf{A}}$ beschreibende Matrix Diagonalgestalt hat? Wenn ja, nennen Sie ein Beispiel.

Wie lautet die Transformationsmatrix für diesen Basiswechsel (wenn bei der Basistransformation die Norm der Basisvektoren unverändert bleiben soll)?

Lösungen

24. (a) -864 , (b) -216 , (c) -216 , (d) $-1/216$, (e) 186624

25. (a) -3 , (b) 0 , (c) 48 , (d) -49

26. (a) Ränge der Matrizen aus Aufgabe 25: (a)–(b) Rang 2, (c)–(d) Rang 4 (Mit Ausnahme von (b) folgt dies bereits aus $\det \neq 0$). Alle Matrizen mit Ausnahme von 25(b) sind regulär, invertierbar und haben linear unabhängige Spaltenvektoren.

28. (a) $\lambda_1 = 7$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (b) $\lambda_1 = 14$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$,
 $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

29. (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =$
 1 , $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.