

Vektorräume

18. Beschreiben Sie die angegebenen Mengen mittels formaler Notation. Welche dieser Mengen ist ein reeller Vektorraum? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie jeweils eine Basis an.
- Die Menge aller Vektoren mit 3 reellen Komponenten.
 - Die Menge aller Vektoren.
 - Die Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich 3.
 - Die Menge aller Polynome vom Grad gleich 3.
 - Die Menge aller Polynome.
 - Die Menge aller 3×3 -Matrizen.
 - Die Menge aller 3×3 -Diagonalmatrizen.
 - Die Menge aller oberen 3×3 -Dreiecksmatrizen.
 - Die Menge aller regulären 3×3 -Matrizen.
 - Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems.
 - Die Menge aller Vektoren \mathbf{y} , die als Ergebnis der Matrixmultiplikation $\mathbf{A}\mathbf{x}$ für eine gegebene Matrix \mathbf{A} auftreten können.

19. Sind die angegebenen Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 linear unabhängig und welche Dimension hat der von ihnen aufgespannte Unterraum? In welchen Fällen handelt es sich um eine Basis für den \mathbb{R}^3 ?

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
- \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3 aus (b) sowie $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$.

20. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{x} = (2, 0, 1)^t$ und $\mathbf{y} = (1, 1, 4)^t$ und des Nullvektors unter der

- kanonischen Basis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- unter der Basis

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an.

21. Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Transformieren Sie die Basis aus 20(b) mit der Transformationsmatrix \mathbf{U} . Wie lautet die neue Basis?
- (b) Wie lautet die Matrix für die zu (a) umgekehrte Transformation?
- (c) Geben Sie die Matrix für die Transformation der Basis aus 20(a) zur Basis in 20(b) an.

22. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $\varphi_{\mathbf{A}}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ die durch \mathbf{A} erzeugte lineare Abbildung.

Berechnen Sie die Dimension des Bildes $\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})$ und des Kernes $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})$ und geben Sie je eine Basis für diese Unterräume an.

23. Testfragen:

- (a) Erklären Sie die Begriffe *Vektorraum* und (*aufgespannter*) *Unterraum*.
- (b) Was sind *Linearkombinationen* und welchen Zweck erfüllen sie? Geben Sie ein Beispiel an.
- (c) Was sind die *Basis* und die *Dimension* eines Vektorraumes?
- (d) Was versteht man unter einem *Basiswechsel*? Wie wird ein Basiswechsel durchgeführt?
- (e) Was ist eine *lineare Abbildung*? Wie kann man eine lineare Abbildung beschreiben?
- (f) Was versteht man unter *Image* und *Kern* einer linearen Abbildung? Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Mengen?
- (g) Was versteht man unter *ähnlichen* Matrizen?

Lösungen

18. (a), (c), (e), (f), (g), (h), (j), und (k) sind Vektorräume

19. (a) $\dim = 2$, (b) $\dim = 3$, (c) $\dim = 3$. Die Vektoren \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 und \mathbf{x}_3 aus (b) bilden eine Basis.

20. (a) $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

21. (a) Sei $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Dann erhalten wir die neue Basis $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$

durch $\mathbf{W} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$: $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$

22. $\dim(\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$. $\dim(\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})) = 3 - \text{rank}(\mathbf{A}) = 1$. Beispiel für Basis von $\text{Im}(\varphi_{\mathbf{A}})$: zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von \mathbf{A} ; Beispiel für Basis von $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}})$: $(1, -2, 1)^t$.