

Matrizen und Vektoren



1. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$



2. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned}$$



3. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 1 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 16x_2 + 9x_3 + 11x_4 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$



4. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 &= 3 \\ -x_1 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= -2 \end{aligned}$$



5. Seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (c) $3\mathbf{A}^t$ (d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t$
 (e) $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}$ (f) $\mathbf{C} + \mathbf{A}$ (g) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ (h) \mathbf{C}^2



6. Demonstrieren Sie an Hand der Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dass im allgemeinen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.



7. Überlegen Sie die Form der Produktmatrix (beliebig, Diagonal-, obere bzw. untere Dreiecksmatrix) bei der Multiplikation

- (a) einer Diagonalmatrix mit einer Diagonalmatrix,
 (b) einer oberen Dreiecksmatrix mit einer oberen Dreiecksmatrix,
 (c) einer Diagonalmatrix mit einer unteren Dreiecksmatrix.



8. Geben Sie eine Linearkombination der Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 an.

(a) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Überprüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind.

$$(a) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (c) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (e) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Veranschaulichen Sie an hand der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

daß $\text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \min(\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B}))$.

- 12.

- (a) Wieviele Lösungen hat ein *homogenes* Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$?
 (b) Kann $\text{rank}(\mathbf{A}) > \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ sein?

13. Bringen Sie die lineare Gleichungssysteme in den Aufgaben 1, 2 und 3 in Matrixform. Stellen Sie mit Hilfe der Ränge von Koeffizientenmatrix und erweiterter Koeffizientenmatrix die Anzahl der Lösungen fest.

14. Sind die folgenden Matrizen regulär, bzw. invertierbar? Geben Sie die jeweilige Inverse an.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

15. Zeigen Sie, daß für beliebige reguläre Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} : $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
 Hinweis: $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}$ ist definiert als jene Matrix \mathbf{C} mit $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{I}$.

16. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit \mathbf{A} aus Aufgabe 14(a) und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Inversen von \mathbf{A} .



17. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen nach \mathbf{X} auf. Nehmen Sie dabei an, daß alle Matrizen quadratische Matrizen gleicher Größe sind. Welche Bedingungen müssen außerdem noch erfüllt sein?

(a) $\mathbf{AX} + \mathbf{BX} = \mathbf{CX} + \mathbf{I}$

(b) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X} = -\mathbf{BX} + \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{AXA}^{-1} = \mathbf{B}$

(d) $\mathbf{XAX}^{-1} = \mathbf{C}(\mathbf{XB})^{-1}$

Lösungen

1. $x_1 = 13, x_2 = -16, x_3 = 6$

2.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Die Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig.

3. Das Gleichungssystem ist inkonsistent, $L = \emptyset$.

4.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Die Darstellung der Lösung ist nicht eindeutig.

5. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) nicht möglich, da Anzahl der Spalten von \mathbf{A}

ungleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{B} , (c) $3\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -18 & 3 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$,

(d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, (e) $\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & 2 & -19 \\ 4 & -24 & 20 \\ 7 & -16 & 9 \end{pmatrix}$,

(f) nicht möglich, da Anzahl der Zeilen und Spalten nicht übereinstimmen,

(g) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 9 \\ 22 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, (h) $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. (a) Diagonalmatrix, (b) obere Dreiecksmatrix, (c) untere Dreiecksmatrix.

8. z.B.: (a) $2\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. (a) linear unabhängig, (b) linear unabhängig, (c) linear abhängig (Es können höchstens drei Vektoren mit drei Komponenten linear unabhängig sein. Hier ist also eine Rechnung überflüssig.)

10. (a) $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3$, (b) $\text{rank}(\mathbf{B}) = 3$, (c) $\text{rank}(\mathbf{C}) = \text{rank}(\mathbf{D}^t) = 2$,
(d) $\text{rank}(\mathbf{D}) = 2$, (e) $\text{rank}(\mathbf{E}) = 3$

11. $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3, \text{rank}(\mathbf{B}) = 2, \text{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 14 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -10 & -8 & -6 \end{pmatrix} = 2$

12. (a) Mindestens eine Lösung. Die rechte Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix besteht aus lauter Nullen. Daher ist ihr Rang niemals größer als der Rang der Koeffizientenmatrix.

(b) Nein, da durch Hinzufügen einer Spalte zur Koeffizientenspalte der Rang nicht kleiner werden kann.

13. Aufgabe 1: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, Koeffizientenmatrix:
 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, erweiterte Koeffizientenmatrix: $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,
 $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3 = n \Rightarrow$ die Lösung ist eindeutig.
 Aufgabe 2: $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3 < n = 4 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.
 Aufgabe 3(b): $\text{rank}(\mathbf{A}) = 3 < \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 4 \Rightarrow$ keine Lösung.
14. (a) regulär, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -19 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, (b) nicht regulär \Leftrightarrow nicht invertierbar,
 die Inverse Matrix \mathbf{B}^{-1} existiert nicht.
15. $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Daraus folgt nach Definition der inversen Matrix: $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1})$ ist die Inverse zu $(\mathbf{A} \mathbf{B})$.
16. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 72 \\ -4 \\ -45 \end{pmatrix}$
17. (a) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$, die Inverse $(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$ muß existieren,
 (b) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$, \mathbf{A}^{-1} muß existieren, (c) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}$, \mathbf{A}^{-1} muß existieren,
 (d) $\mathbf{X} = \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C} (\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1}$, die Inversen von \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{X} müssen existieren.