

# Hypothesis testing some comments

*Dr. Thomas Salzberger*

---

## Hypothesentesten: Fehler

Wirklichkeit	$H_0$ ist wahr	$H_A$ ist wahr
Ergebnis des Hypothesentests		
$H_0$ beibehalten	<b>Richtige Entscheidung</b> $P=1-\alpha$ ✓	<b>Fehler 2. Art</b> "missing" $P=\beta$
$H_0$ verworfen $H_A$ angenommen	<b>Fehler 1. Art</b> "falscher Alarm" $P=\alpha$	<b>Richtige Entscheidung</b> $P=1-\beta$ ✓
Bedingte Wahrscheinlichkeiten!	$P = 1-\alpha + \alpha = 100\%$	$P = 1-\beta + \beta = 100\%$

Ein signifikantes Ergebnis bedeutet nicht, dass die  $H_A$  mit 95%iger Wahrscheinlichkeit (oder gar mit Sicherheit) wirklich gilt.

Ein nicht signifikantes Ergebnis bedeutet nicht, dass die  $H_0$  tatsächlich wahr ist.

## Satz von Bayes

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



- „|“ = „unter der Bedingung, dass“
- Wird gesucht:
  - $P(A | B) = P(H_A \text{ ist wahr} | \text{Entscheid für } H_A)$   
 *$H_A$  ist wahr, wenn wir zugunsten der  $H_A$  entscheiden*
- Es ist dazu erforderlich:
  - $P(B | A) = P(\text{Entscheid für } H_A | H_A \text{ ist wahr})$   
*Hypothesentest entscheidet zugunsten der  $H_A$ , wenn diese wahr ist*  
 $= (1 - \beta\text{-Fehler}) = 0.80$  (zB)
  - $P(A) = P(H_A)$   
*a priori Wahrscheinlichkeit, dass Alternativhypothese  $H_A$  ( $\sim$ Theorie) stimmt*
  - $P(B) = P(\text{Entscheid für } H_A)$   
*Wahrscheinlichkeit, zugunsten der Alternativhypothese  $H_A$  zu entscheiden*

Satz von Bayes 
$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- $P(H_A)$  = a priori Wahrscheinlichkeit, dass Alternativhypothese  $H_A$  ( $\sim$ Theorie) stimmt
  - Muss vorgegeben werden, zB basierend auf bisherige Ergebnissen
  - Subjektive Einschätzung vor der empirischen Studie
  
- $P(\text{Entscheid für } H_A)$  = Wahrscheinlichkeit, zugunsten  $H_A$  zu entscheiden
  - Hängt von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $P(A)$  ab.
    - Je größer  $\alpha$  ist, umso eher entscheide ich zugunsten der  $H_A$
    - Je kleiner  $\beta$  ist, umso eher entscheide ich zugunsten der  $H_A$
    - Je eher die  $H_A$  wahr ist, umso eher entscheide ich zugunsten der  $H_A$  [=P(B)]
  - $P(\text{Entscheid für } H_A) = P(\text{Entscheid für } H_A | H_A \text{ ist wahr}) \cdot P(H_A) + P(\text{Entscheid für } H_A | H_0 \text{ ist wahr}) \cdot P(H_0)$
  
- *Zur Erinnerung:*
  - Fehler erster Art  $\alpha$ : Entscheidung zugunsten der  $H_A$  obwohl  $H_0$  gilt
  - Fehler zweiter Art  $\beta$ : Entscheidung zugunsten der  $H_0$  obwohl  $H_A$  gilt

Satz von Bayes 
$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- $P(H_A \text{ ist wahr} | \text{Entscheid für } H_A) = \frac{(1-\beta) \cdot P(H_A)}{(1-\beta) \cdot P(H_A) + \alpha \cdot P(H_0)}$

- Mit:  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 20\%$
- Bei  $P(H_A) = 50\%$ ; daher  $P(H_0) = 50\%$
- Signifikantes Ergebnis (Annahme der  $H_A$ ):
  - $P(H_A \text{ ist wahr} | \text{Entscheid für } H_A) = 0.8 \cdot 0.5 / (0.8 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.5) = 0.4/0.425 = 94\%$

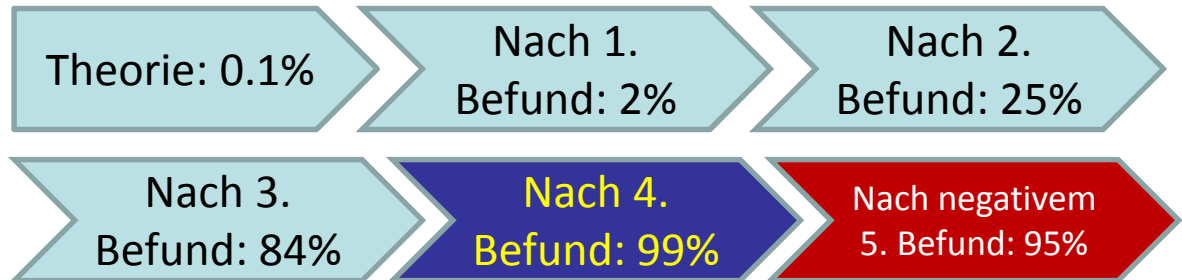
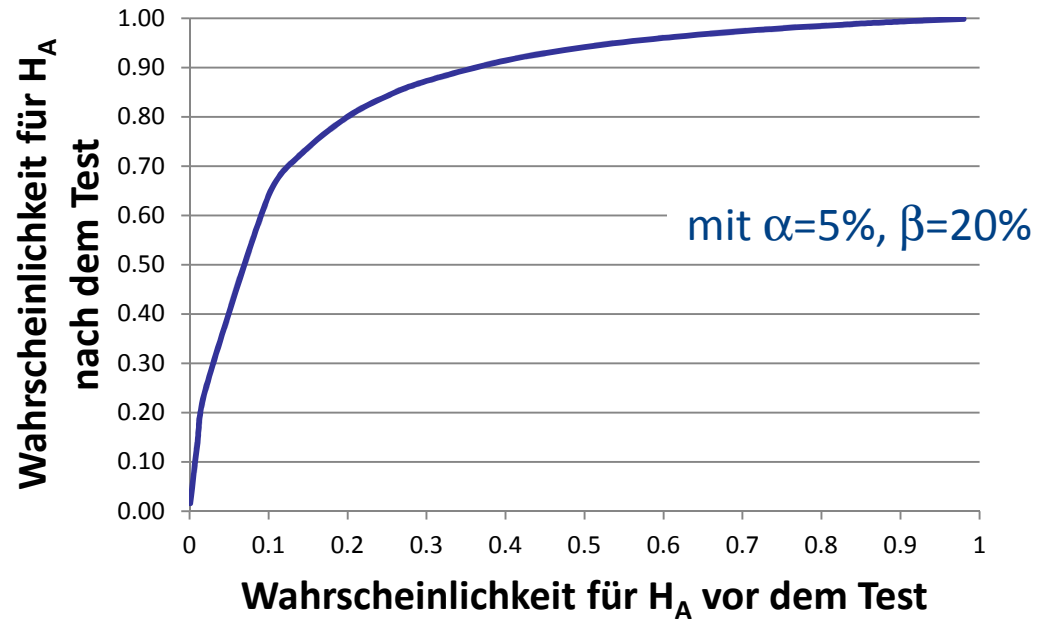
## Satz von Bayes

	<b>Realität</b>	
<b>Hypothesentest</b>	H <sub>0</sub> (Theorie falsch)	H <sub>A</sub> (Theorie richtig)
Zugunsten H <sub>0</sub>	95%	20%
Zugunsten H <sub>A</sub>	5%	80%
	<i>bei <math>\alpha = 5\%</math></i>	<i>bei <math>\beta = 20\%</math></i>

<b>A priori H<sub>A</sub>=50%</b>	<b>Realität</b>		
<b>Hypothesentest</b>	H <sub>0</sub> (Theorie falsch)	H <sub>A</sub> (Theorie richtig)	$\Sigma$
Zugunsten H <sub>0</sub>	47.5	10	57.5
Zugunsten H <sub>A</sub>	2.5	40	42.5
	50	50	

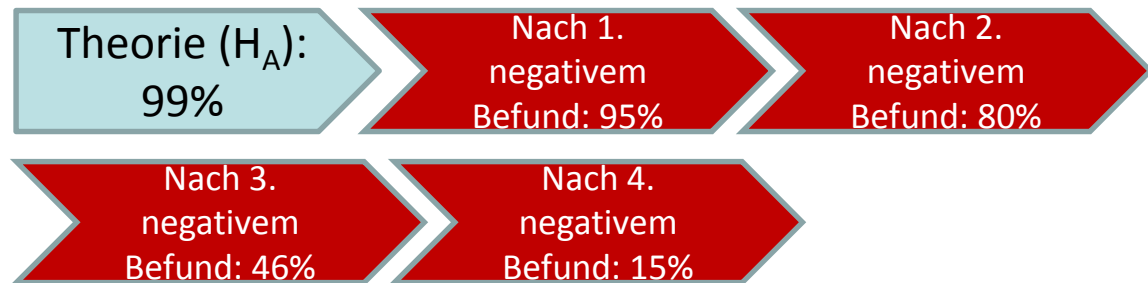
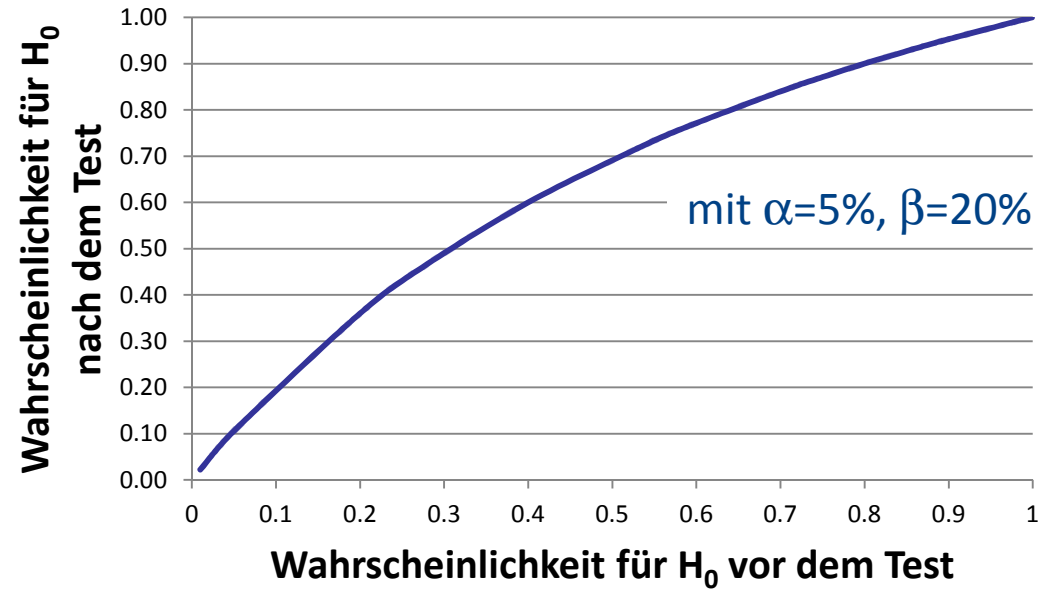
# Wahrscheinlichkeit für $H_A$ nach positivem Testergebnis

alpha	0.05	
beta	0.2	
		$P(H_A   \text{Entscheid für } H_A)$
$P(H_A)$	$P(H_0)$	
0.001	0.999	0.02
0.01	0.99	0.14
0.02	0.98	0.25
0.1	0.9	0.64
0.14	0.86	0.72
0.2	0.8	0.80
0.25	0.75	0.84
0.3	0.7	0.87
0.4	0.6	0.91
0.5	0.5	0.94
0.6	0.4	0.96
0.72	0.28	0.98
0.84	0.16	0.99
0.9	0.1	0.99
0.98	0.02	1.00



# Wahrscheinlichkeit für $H_0$ nach negativem Testergebnis

alpha	0.05	
beta	0.2	
		$P(H_0  $ Entscheid für $H_0)$
$P(H_A)$	$P(H_0)$	
0.001	0.999	1.00
0.01	0.99	1.00
0.02	0.98	1.00
0.1	0.9	0.98
0.14	0.86	0.97
0.2	0.8	0.95
0.25	0.75	0.93
0.3	0.7	0.92
0.4	0.6	0.88
0.46	0.54	0.85
0.6	0.4	0.76
0.72	0.28	0.65
0.8	0.2	0.54
0.95	0.05	0.20
0.99	0.01	0.05



→  $1 - 0.05 = 0.95$  Set #1