

VAR- und VEC-Modelle

Kapitel 22

Angewandte Ökonometrie / Ökonometrie III
Michael Hauser

Inhalt

- ▶ VAR-Modelle, vector autoregressions
- ▶ VARX in Standardform und Strukturform
- ▶ VAR: Schätzung in Standardform
- ▶ VECM, vector error correction model, CVAR, cointegrated VAR
- ▶ Exkurs: Eigenwerte, -vektoren
- ▶ 3 Modelltypen im Fall $m = 2$ an Beispielen
- ▶ Tests auf Kointegration
- ▶ VEC Schätzung
- ▶ kointegrierender Vektor, Anpassung an die lgfr Beziehung

VAR, vector autoregressions

AR(p), VAR(p)

Wir haben bereits univariate autoregressive Modelle der Ordnung p untersucht.

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Eine Verallgemeinerung stellen VAR dar. Wir ersetzen y_t durch einen Spaltenvektor $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{mt})'$ von m Variablen. Das VAR(p) lautet:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

Die $\boldsymbol{\Phi}_j$ sind $(m \times m)$ Koeffizienten-Matrizen, $\boldsymbol{\mu}$ ist der $(m \times 1)$ Vektor mit den Konstanten und \mathbf{u}_t ist white noise mit kontemporärer Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Omega}_c = E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t')$.

Man sagt: Das VAR liegt in **Standardform** vor.

VAR(1), $m = 2$

Ein VAR(1) mit $m = 2$ in Standardform ist

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$y_{1,t} = \mu_1 + \phi_{11} y_{1,t-1} + \phi_{12} y_{2,t-1} + u_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \mu_2 + \phi_{21} y_{1,t-1} + \phi_{22} y_{2,t-1} + u_{2,t}$$

VAR Modelle dienen dazu dynamische Beziehungen zwischen Variablen simultan zu modellieren.

Gl 1 beschreibt die Abhängigkeit von y_1 von

- ▶ seiner eigenen Vergangenheit und
- ▶ den vergangenen Werten von y_2 .

VARs eignen sich für (kurz- bis mittelfristige) Prognosen.

Erweiterungen: VARX und Strukturform

Erweiterungen sind VARX und VAR in Strukturform. Z.B. ein VAR(1) in Strukturform mit exogenen Variablen (X), VARX.

$$\mathbf{A}y_t = \mathbf{B}y_{t-1} + \mathbf{\Gamma}x_t + v_t$$

Ist $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_m$, so treten kontemporäre endogene Variable in anderen Gl auf. (Die Konstante befindet sich in x_t .)

Wir verlangen von einem VAR in Strukturform, dass die Fehler auch kontemporär unkorreliert sind.

Ein VARX 1-ter Ordnung in Strukturform ohne Konstante mit $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_{11}, \gamma_{22})$ ($\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$) ist

$$\begin{aligned}y_{1,t} &= a_{12} y_{2,t} + b_{11} y_{1,t-1} + b_{12} y_{2,t-1} + \gamma_{11} x_{1,t} + v_{1,t} \\y_{2,t} &= a_{21} y_{1,t} + b_{21} y_{1,t-1} + b_{22} y_{2,t-1} + \gamma_{22} x_{2,t} + v_{2,t}\end{aligned}$$

Strukturform und Standardform

Die Strukturform weist die gleichen Identifikationsprobleme wie simultane Systeme auf - soferne die Matrix \mathbf{A} nicht Dreiecksform hat. (Das Problem wird hier meist über Restriktionen auf die Σ_c Matrix gelöst, s. Master-Program))

Durch Multiplikation von links mit \mathbf{A}^{-1} wird die Strukturform auf Standardform gebracht.

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

Hier ist die Ordnung 1, und nur die Konstante als exogene Var inkludiert.

$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, etc.

Liegt Identifizierbarkeit vor, entspricht die Standardform (in verzögerten Vars) der Strukturform (mit kontemporären endogenen Vars).

Stationarität, Schätzen in Standardform, Parsimonität

- ▶ Ein VAR(1)-Prozess (in Standardform) ist stationär, wenn die Eigenwerte λ von Φ

$$|\lambda| < 1$$

Die Bedingung ist vergleichbar mit $|\phi_1| < 1$ für einen AR(1).

- ▶ Stationäre VAR können mittels Einzel-GI-OLS, oder als FGLS asympt. effizient geschätzt werden. In beiden Fällen sind die Schätzer konsistent und asymptotisch normal verteilt.
- ▶ VAR haben den Nachteil, dass sie die Parametern nicht sparsam einsetzen. Ein VAR(p) besitzt - ohne Konstante und Σ_c - $m^2 p$ Koeffizienten.

Beispiel

Tabelle: VAR(1) aus privatem Konsum (real) C und disponiblen Einkommen Y^d in Differenzen der logs.

	1	Y^d_{-1}	C_{-1}	$adjR^2$	AIC
Y^d	0.001 (0.91)	0.825 (12.09)	0.082 (1.07)	0.80	-6.94
C	0.003 (2.36)	0.061 (0.97)	0.826 (11.69)	0.79	-7.16

t -Werte in Klammern. Das Modell- $AIC = 14.41$.

Zum Vergleich das statische Modell

$$\hat{C} = 0.011 + 0.718Y^d \quad adjR^2 = 0.65, AIC = -6.61$$

Diese Beziehung befindet sich z.T. in der nicht explizit modellierten kontemporären Kovarianz der Fehler.

VECM, Vector error correction model
CVAR, Cointegrated VAR

VECM: Das Modell

Wir diskutieren nun Kointegration im Rahmen von VAR(1) Modellen in Standardform und beschränken uns auf $m = 2$. Entscheidend für das Vorliegen von Kointegration zwischen den Variablen ist die Anzahl der Eigenwerte von $(+1)$ der Matrix Φ . Es kann davon 0, 1, oder 2 geben.

Das Modell lautet

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \Phi \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

\mathbf{u}_t ist white noise mit kontemporärer Kovarianzmatrix Ω_C .

Äquivalent dazu erhalten wir durch Subtraktion von \mathbf{y}_{t-1} auf beiden Seiten
($I - \Phi = \Pi$)

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} - \Pi \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

Exkurs: Eigenwerte und -vektoren

Exkurs: Inverse Matrix und Rang

Sei \mathbf{A} eine $(m \times m)$ Matrix und es existiere die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} , dann gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- ▶ \mathbf{A} heißt dann invertierbar,
- ▶ \mathbf{A} heißt dann regulär.
- ▶ $\text{rg}(\mathbf{A}) = m$. \mathbf{A} hat vollen Rang.
- ▶ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Sei \mathbf{A} eine $(k \times m)$ und \mathbf{B} eine $(m \times n)$ Matrix. Dann gilt

$$\text{rg}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \min(\text{rg}(\mathbf{A}), \text{rg}(\mathbf{B}))$$

Exkurs: Eigenwerte und -vektoren

Gegeben ist eine quadratische Matrix \mathbf{A} . *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$ zu \mathbf{A} ist eine reelle Zahl, die

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

erfüllt. \mathbf{c} ist der zugehörige *Eigenvektor*, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$.

Bsp: In Diagonal- und Dreiecksmatrizen stehen die Eigenwerte in der Hauptdiagonale.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 \\ 5 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (1/2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 1$$

Exkurs: Eigenwerte und -vektoren

Jede Matrix mit verschiedenen Eigenwerten lässt sich darstellen als

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$$

$\mathbf{\Lambda}$ ist eine *Diagonalmatrix* mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonale, \mathbf{C} die Matrix der Eigenvektoren.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 sind die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 .

Exkurs: Eigenwerte und -vektoren

Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})$.

- ▶ Die Eigenwerte von \mathbf{A} , $\lambda = \lambda(\mathbf{A})$, sind eins minus den Eigenwerten von \mathbf{B} , $\nu = \nu(\mathbf{B})$.

$$\lambda_j = 1 - \nu_j$$

- ▶ \mathbf{A} und \mathbf{B} besitzen die selben Eigenvektoren.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{Sp}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m a_{ii} = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

Die **Spur** (trace) einer Matrix ist gleich der Summe der Eigenwerte.

Exkurs: Eigenwerte und -vektoren

Sei \mathbf{A} eine $(m \times m)$ Matrix mit genau einem Eigenwert von *null*, $\lambda = 0$, so ist \mathbf{A}

- ▶ singulär, nicht invertierbar (es existiert keine Inverse zu \mathbf{A}).
- ▶ $\text{rg}(\mathbf{A}) = m - 1$
- ▶ Die Matrix besitzt $(m - 1)$ linear unabhängige Zeilen bzw. Spalten.
- ▶ $\det(\mathbf{A}) = 0$

Hat \mathbf{B} einen Eigenwert von 1, $\nu_j = 1$, so hat $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ einen Eigenwert von *null*

$$0 = \lambda_j = 1 - \nu_j$$

und \mathbf{A} ist singulär.

Exkurs: Eigenwerte und -vektoren

Bsp: $\lambda(\mathbf{A})$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ und $\lambda(\mathbf{B})$

Sei $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(\mathbf{B}) = 2$ und $\text{rg}(\mathbf{A}) = 1$!

Kointegration und Nicht-Kointegration an Beispielen

AR(1), Dickey-Fuller

Wir beginnen mit dem Dickey-Fuller Test.

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + u_t$$

Ist $\phi = 1$ besitzt y eine *unit root*, ist $\phi < 1$ ist es *stationär*.

Wir ziehen auf beiden Seiten y_{t-1} ab und setzen $(1 - \phi) = \pi$.

$$\Delta y_t = \mu - (1 - \phi)y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = \mu - \pi y_{t-1} + u_t$$

$$\phi = 1 \quad \pi = 1 - \phi = 0 \quad y \text{ ist } I(1)$$

$$\phi < 1 \quad \pi = 1 - \phi > 0 \quad y \text{ stationär}$$

VAR(1), $m=2$

Analog dazu betrachten wir Systeme. Das Modell lautet

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

Wir ziehen auf beiden Seiten \mathbf{y}_{t-1} ab und setzen $(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{\Pi}$.

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1} = \Delta \mathbf{y}_t, \quad \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{y}_{t-1} = (\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{I}) \mathbf{y}_{t-1} = -(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}) \mathbf{y}_{t-1}$$

VAR(1), $m=2$: $\nu = \nu(\Phi)$, $\lambda = \lambda(\Pi)$

$\nu = \nu(\Phi)$ und $\lambda = \lambda(\Pi)$ sind die Eigenwerte von Φ und Π .

$$\lambda_i = 1 - \nu_i$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

- I: $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$ d.h. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ und $\text{rg}(\Pi) = 0$
 y_1 und y_2 sind **integriert**, aber **nicht kointegriert**.
- II: $\nu_1 = 1, |\nu_2| < 1$ d.h. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ und $\text{rg}(\Pi) = 1$
 y_1 und y_2 sind **integriert** und **kointegriert**.
Es gibt eine kointegrierende Beziehung zwischen y_1 und y_2 .
- III: $|\nu_1| < 1, |\nu_2| < 1$ d.h. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ und $\text{rg}(\Pi) = 2$
 y_1 und y_2 sind **stationär** und daher auch *nicht kointegriert*.

I: $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1; \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0; \text{rg}(\Pi) = 0$

Wir setzen nun für Φ Zahlen ein und vereinfachen mit $\mu = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$y_{1,t} = y_{1,t-1} + u_{1,t}$$

$$y_{2,t} = y_{2,t-1} + u_{2,t}$$

y_1 und y_2 sind 2 *random walks* die von unabhängigen Innovationen u_1 und u_2 erzeugt werden.

y_1 und y_2 sind beide $I(1)$, und *nicht kointegriert*.

Es gibt keine stationäre Linearkombination aus y_1 und y_2 .

II: $\nu_1 = 1, |\nu_2| < 1; \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0; \text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 1$

Wir setzen nun für Φ Zahlen ein und vereinfachen mit $\mu = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$\Phi = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ mit den Eigenwerten $\nu_1 = 1$ und $\nu_2 = 1/3$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{I} - \Phi) = \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$ mit $\lambda_1(\mathbf{\Pi}) = 0$ und $\lambda_2(\mathbf{\Pi}) = 2/3$.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

II: $\text{rg}(\Pi) = 1$

$$\begin{aligned}\Pi &= \mathbf{C}(\mathbf{I} - \Lambda)\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}[(\mathbf{I} - \Lambda)\mathbf{C}^{-1}] = \alpha\beta' \\ \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diese einfache Struktur mit Rang 1, erhält man auf Grund des Eigenwerts null von Π .

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_t &= -\Pi \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t = -\alpha\beta' \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t \\ \begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} [(-2/3)y_{1,t-1} + (2/3)y_{2,t-1}] + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

II: $\text{rg}(\Pi) = 1$, koint Vektor, Anpassungskoeffizienten

Üblicherweise wird der Koeffizient vor $y_{1,t-1}$ auf 1 *normiert*, da die Darstellung nicht eindeutig ist. $[(-2/3) \cdot (-3/2) = 1]$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} [y_{1,t-1} - y_{2,t-1}] + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

In der eckigen Klammer steht

- ▶ die **kointegrierende Beziehung** $\beta' \mathbf{y}_{t-1}$, mit
- ▶ β als **kointegrierenden Vektor**.
- ▶ α enthält die **Anpassungskoeffizienten**.

$$\Delta y_{1,t} = (-1/3) [y_{1,t-1} - y_{2,t-1}] + u_{1,t}$$

$$\Delta y_{2,t} = (1/3) [y_{1,t-1} - y_{2,t-1}] + u_{2,t}$$

Da $\Delta \mathbf{y}_t$ stationär ist, ist auch $[\dots] = \beta' \mathbf{y}_{t-1}$ stationär.

II: $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 1$, stoch Trend

Den einen stochastischen Trend, der $y_{1,t}$ und $y_{2,t}$ treibt, erhält man durch Multiplikation von

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

mit \mathbf{C}^{-1} von links.

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}_t$$

Wir setzen $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t$ (bzw. $\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{z}_t$). \mathbf{v}_t ist stationär.

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

$$\begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

II: $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 1$, stoch Trend

- ▶ z_{1t} ist offensichtlich ein random walk. Er ist der **stochastische Trend** in y_1 und y_2 .
- ▶ z_{2t} ist *stationär*.
- ▶ Jedes y lässt sich als Linearkombination aus beiden, $z_{1,t}$ und $z_{2,t}$ darstellen.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Cz}_t$$
$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix}$$

y_1 und y_2 sind beide $I(1)$, da sie durch einen random walk (z_1) erzeugt werden. y_{1t} und y_{2t} sind *kointegriert*. $y_{1,t-1} - y_{2,t-1} = -z_{2t}$ ist stationär.

III: $|\nu_1| < 1$, $|\nu_2| < 1$; $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$; $\text{rg}(\Pi) = 2$

Wir setzen wieder für Φ Zahlen ein und vereinfachen mit $\mu = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

y_1 und y_2 sind beide $I(0)$, stationär.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Kointegrationseigenschaften wird nur der Rang von $\mathbf{\Pi}$ über die von null verschiedenen Eigenwerte abgezählt.

$$\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = r$$

Wir hatten im Fall

- I. $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 0$ (alle Eigenwerte $\lambda(\mathbf{\Pi}) = 0$)
Keine Kointegration.
- II. $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 1$
Eine kointegrierende Beziehung.
- III. $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 2$
Keine Kointegration, weil alle y stationär sind.

Zusammenfassung

Die Modellvarianten, die zur Diskussion stehen, sind

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

bzw.

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

mit

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}$$

und den Eigenwerten

$$\lambda_i(\boldsymbol{\Pi}) = 1 - \nu_i(\boldsymbol{\Phi})$$

Zusammenfassung für $m \geq 2$

- I. $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 0$, $r = 0$, $\nu_1 = \dots = \nu_m = 1$:

Alle y_i sind $I(1)$ und *nicht kointegriert* (oder $I(2)$).

Man schätzt das Model als VAR in den ersten Differenzen

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{\Gamma}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \mathbf{\Gamma}_p \Delta \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

- II. $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = r$, $0 < r < m$, r Eigenwerte von Φ sind betragsmäßig < 1 ,
 $(m - r)$ sind 1:

Der Rang von $\mathbf{\Pi}$ ist reduziert.

Die Vars sind integriert, $I(1)$, und kointegriert.

Es gibt r linear unabhängige *kointegrierende Beziehungen*.

Man schätzt ein VECM unter der speziellen Struktur von

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' \quad \text{mit} \quad \text{rg}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{rg}(\boldsymbol{\beta}) = r < m$$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

Zusammenfassung für $m \geq 2$

III. $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = m$, $r = m$, $|\nu_1|, \dots, |\nu_m| < 1$:

Alle Eigenwerte von $\mathbf{\Pi}$ sind $\neq 0$. Daher ist der Rang von $\mathbf{\Pi}$ nicht reduziert.

Alle y_i sind *stationär*, und daher auch nicht kointegriert. Man schätzt das Modell als VAR im Niveau.

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

Tests und Schätzung

Die λ im folgenden Abschnitt sind mit den quadrierten Eigenwerten von $\mathbf{\Pi}$ vergleichbar. Sie besitzen die gleichen $\lambda \neq 0$ bzw. $\lambda = 0$ Eigenschaften.

Test auf kointegrierenden Rang r (Johansen), λ_{max}

▶ **Maximum Eigenwert Test** bez. Π

$$H_0 : r \leq r_0 \quad H_1 : r = r_0 + 1$$

$$\lambda_{max}(r_0) = -n \log(1 - \hat{\lambda}_{r_0+1})$$

$\hat{\lambda}_{r_0+1}$ ist der $(r_0 + 1)$ -t größte geschätzte Eigenwert von Π .

Die Eigenwerte werden der Größe nach absteigend geordnet.

- ▶ Ist der größte Eigenwert nicht verschieden von null, ist $\text{rg}(\Pi) = 0$. Es besteht keine Kointegration.
- ▶ Ist der größte Eigenwert verschieden von null, ist $\text{rg}(\Pi) > 0$, und es liegt zumindest eine kointegrierende Beziehung vor.
- ▶ Usw.

Bsp.: Test auf kointegrierenden Rang r , $m = 3$

Die Verteilung von λ_{max} ist nicht-standard χ^2 . Sie hängt wie beim Dickey-Fuller Test davon ab, ob eine Konstante, Trend, etc. in der kointegrierenden Beziehung vorhanden sind.

Tabelle: Bsp. Maximum Eigenwert Test auf Kointegration

	H ₀ koint Bez	H ₁	λ_{max}	5% Krit. Wert	
$r=0$	None	$r=1$	65.509	22.04	H ₀ verw.
$r \leq 1$	At most 1	$r=2$	22.032	15.87	H ₀ verw.
$r \leq 2$	At most 2	$r=3$	6.371	9.16	H ₀ nicht verw.

Geschätzte Eigenwerte: 0.301, 0.113, 0.034. $n = 183$.

Wir finden 2 kointegrierende Beziehungen.

Tests auf kointegrierenden Rang r (Johansen), λ_{trace}

- ▶ Der **Trace** (Spur) **Test** überprüft, ob die kleinsten $(m - r_0)$ EW von $\mathbf{\Pi}$ signifikant von null verschieden sind.

$$H_0 : r \leq r_0 \quad H_1 : r_0 < r \leq m$$

$$\lambda_{trace}(r_0) = -n \sum_{j=r_0+1}^m \log(1 - \hat{\lambda}_j)$$

Die Eigenwerte werden absteigend angeordnet.

- ▶ Ist die 'Summe' aller EW nicht versch von 0, ist $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 0$.
- ▶ Ist 'Summe' aller EW verschieden von null, ist $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) > 0$, und es liegt zumindest eine kointegrierende Beziehung vor.
- ▶ Ist 'Summe' aller EW bis auf den größten nicht verschieden von null, ist $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) = 1$.
- ▶ Ist 'Summe' aller EW bis auf den größten verschieden von null, ist $\text{rg}(\mathbf{\Pi}) > 1$.
- ▶ Usw.

Diese LR-Test-Statistik ist ebenfalls nicht standard χ^2 -verteilt.

Das VEC(p)

Wir lassen nun weitere verzögerte $\Delta \mathbf{y}$ zu.

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Psi}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t$$

Die VAR-Darstellung davon ist

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

mit

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p$$

Granger-Representation Theorem:

Das VEC ist die EC Darstellung des VAR Modells.

Schätzen eines VEC Modells

1. Bestimmen der Integrationsordnung der Variablen mittels unit root Tests.
2. Test auf die Kointegrationsordnung.
(Vs.: Alle Variablen haben dieselbe Integrationsordnung.)
Dazu Wahl der Form der koint Beziehung: ohne/mit Konstante, ohne/mit Trend
Feststellen der Anzahl der koint Beziehungen.
3. Schätzen des VEC Modells. Wahl des maximalen Lags mittels Informationskriteriums.

Bsp: Einkommen und Konsum

Ein VEC(1) ergibt sich für C und Y^d für Österreich wie folgt:

- ▶ Unit root Tests ergeben $I(1)$ für C und Y^d (in log).
- ▶ Johansen Test zeigt eine kointegrierende Beziehung.
- ▶ Das VEC(1) ist

Tabelle: VEC(1) Koeffizienten und t -Werte in Klammer

	koint B	ΔY_{-1}	ΔC_{-1}	adj R^2	AIC
ΔY	0.029 (5.02)	0.167 (1.59)	0.059 (0.49)	0.14	-7.42
ΔC	0.047 (2.36)	0.226 (2.34)	-.148 (1.35)	0.18	-7.59

Die kointegrierende Beziehung ist $C = 8.55 + 1.61 Y^d$.

Empirie: Vergleich VAR in Differenzen und VEC

Für makroökonomische Fragestellungen hat sich empirisch gezeigt, dass

- ▶ trotz der theoretischen Attraktivität langfristige Beziehungen beschreiben zu können,
- ▶ die Differenzen der (log)Variablen als VAR Modell geschätzt in der Regel robuster sind
- ▶ als die VEC Modelle.