Kointegration

Kapitel 19

Angewandte Ökonometrie / Ökonometrie III
Michael Hauser

Inhalt

- I(d), Trends, Beispiele
- Spurious Regression
- Kointegration, common trends
- Fehlerkorrektur-Modell
- Test auf Kointegration
- Engle-Granger Verfahren

$\mathbf{I}(d)$

Trends: Deterministischer Trend

Ein **deterministischer Trend** hat z.B. die Form

- **Linearer Trend**: $t = 1, 2, \ldots, n$,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$$

- **Exponentieller Trend**:

$$Y_t = \beta_0 \cdot \exp(\beta_1 t) \cdot u_t$$

  Durch Logarithmierung erhält man eine lineare Funktion

$$\log(Y_t) = \gamma + \beta_1 t + v_t$$

  $\gamma = \log(\beta_0)$, $v_t = \log(u_t)$.

Das Mittel von Y gehorcht einer deterministischen Funktion.

Trends: Deterministischer Trend, trend-stationär

Die Fehler schwanken mit *konstanter Varianz* um den linearen Trend.
Y ist nicht-stationär (unbedingtes Mittel steigt mit der Zeit, ist nicht konstant), aber auch nicht integriert.

Da Y nach Korrektur um den linearen Trend stationär ist, wird der Prozess als **trend-stationär** bezeichnet.

$$Y_t - (\beta_0 + \beta_1\, t) = u_t$$

Trends: Stochastischer Trend, I(1)

Der Random Walk (ohne Drift) ist ein **stochastischer Trend**

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

Der Random Walk mit Drift ebenfalls

$$Y_t = c + Y_{t-1} + u_t$$

Es treten permanente, nicht-deterministische Verschiebungen im Mittel auf.

Die Varianz um das bedingte Mittel ausgehend vom Zeitpunkt t ist nicht konstant.
Sie *wächst mit der Zeit*. Y_t ist integriert der Ordnung 1.
Die Standardabweichung steigt mit der Wurzel von t, $\sqrt{t}$.

Trends: Stochastischer Trend, I(1)

ΔY_t ist stationär.

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = c + u_t$$

Die ACF (Autokorrelationsfunktion) eines

- I(1) fällt (empirisch) langsam bzw. *linear* ab. (Hängt oft auch stark durch.)
- I(0) fällt *geometrisch* ab. Im Fall eines WN ist sie null.

I(d), Beispiele

Allgemeiner:
Ein Prozess heißt **integriert der Ordnung** d, wenn (d die kleinste Zahl mit) $\Delta^d Y_t$ stationär ist. Man schreibt:

$$Y_t \sim \mathrm{I}(d)$$

Tabelle: Beobachtete Integrationsordnungen von Variablen

Variable	d
BIP real, Privater Konsum real	0.8 - 1
(log) Aktienkurse	1
Preise	1 - 2
Arbeitslosenrate	< 1
Zinssätze	0.9 - 1
Geldmenge	1 - 1.5

I(d)

Die Ordnung der Integration wird durch

1. Inspektion der Reihe
2. Inspektion des zugehörigen Korrelogramms
3. Inspektion der differenzierten Reihe und deren Korrelogramm, und
4. Dickey-Fuller Test

festgestellt.

Kointegration

Definition: Kointegration für I(1) Prozesse

Zwei Prozesse X und Y sind **kointegriert**, wenn sie dieselbe Integrationsordnung $d = 1$ besitzen *und* eine Linearkombination

$$Y_t - \mu_1 X_t = \mu_0 + u_t$$

existiert, die eine Integrationsordnung von *null* aufweist, $u \sim \mathrm{I}(0)$, u stationär.
Man schreibt

$$X, Y \sim \mathrm{CI}(1, 1)$$

Allgemein für I(d) Prozesse, wenn eine Reduktion der Integrationsordnung um $b\,(> 0)$ Ordnungen vorliegt (wenn die Residuen u_t eine Integrationsordnung $(d - b)$ aufweisen)

$$X, Y \sim \mathrm{I}(d), \quad u \sim \mathrm{I}(d-b): \; X, Y \sim \mathrm{CI}(d, b)$$

Definition: Kointegration für I(1) Prozesse

Beispiel: $X, Y \ \sim \ \text{CI}(1,1)$
$Y \ \sim \ \text{I}(1) \quad \text{und} \quad X \ \sim \ \text{I}(1), \quad Y_t - 2X_t = -1 + u_t \ \sim \ \text{I}(0) \quad \text{bzw.}$

$$Y_t = -1 + 2X_t + u_t \qquad u \ \text{stationär}$$

$[Y_t - 2X_t]$ heißt **kointegrierende** bzw. GGW-**Beziehung.**

Wir zeigen, dass X und Y einen **gemeinsamen stochastischen Trend** besitzen.

Der gemeinsame stochastische Trend

Sei $Z \sim$ I(1), und v, w stationär, sodass

$$Y_t = 3 + 2Z_t + v_t$$

$$X_t = 2 + Z_t + w_t$$

Dann sind Y_t und X_t beide I(1).
Wiir multiplizieren die 2-te Gl mit (-2) und addieren sie zur ersten, dann erhalten wir

$$Y_t - 2X_t = -1 + u_t$$

wobei $\quad u_t = v_t - 2w_t \quad$ ebenfalls stationär ist.

Daher sagt man, X und Y besitzen einen **gemeinsamen stochastischen Trend**.

Idee der Kointegration

Gehen wir von einem fiktiven Markt mit einer Nachfragefunktion und einem von der Nachfragefunktion unabhängigen Angebotsfunktion aus. Bei gegebenem Preis stimmen Nf- und Ag-Menge zwar nicht überein, aber die initiierte Preisänderung gewährleistet eine Konvergenz zum GGW.
Ag- und Nf-Mengen folgen i.A. keinen stationären Pfaden, durch die Preisänderungen können sie aber nicht beliebig weit auseinanderdriften.

Empirisch werden viele Reihen beobachtet, die (nicht stationär) integriert I(1) zu sein scheinen, und möglicherweise in einer 'stabilen' Beziehung zueinander stehen.

Die Kombination aus Nicht-Stationarität und parallelem Verlauf beschreibt das Konzept der Kointegration.

Regression zweier I(1) Variabler

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 X_t + u_t \qquad X, Y \;\sim\; \mathrm{I}(1)$$

Sind die Variablen

- *nicht kointegriert*, so erhalten wir I(1) Residuen.
  Das R^2 ist in der Regel viel zu hoch, die Schätzung der Standardfehler ist erheblich nach unten verzerrt. Vgl. spurious regression.
- *kointegriert*, so erhalten wir I(0) Residuen.

Beispiel: In der Theorie gilt die purchasing power parity, PPP,

$$P_{US} = P_{DK}\, X_{US/DK}\,,$$

logarithmiert

$$\log(P_{US}) = \log(P_{DK}) + \log(X_{US/DK}) + u_t$$

Empirisch stellt sich allerdings oft $u \;\sim\; \mathrm{I}(1)$ heraus.

Test auf Kointegration (einfach), Engle-Granger

1. Testen beider Variabler auf I(1), unit root test.
2. Regressieren von $Y = \mu_0 + \mu_1 X + u$. Test von u auf I(1), unit root test.

$$\mathrm{H}_0 : X, Y \text{ nicht koint bzw. } u \sim \mathrm{I}(1)$$

$$\mathrm{H}_1 : X, Y \text{ kointegriert bzw. } u \sim \mathrm{I}(0)$$

Bem.: Für I(0) können die Residuen autokorreliert sein, müssen aber stationär sein.

Unit root Tests haben i.A. eine geringe Macht, da I(1) wie auch Kointegration *langfristige Eigenschaften* sind.

Beispiel: 1. Tests auf unit root, 1976-2001

Wir testen Y^d und C aus `DATS_01.wf1` mit dem ADF (augmented Dickey-Fuller Test) auf unit roots:

$$\Delta y_t = c + (\phi - 1) y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + u_t$$

$$\mathrm{H}_0 : (\phi - 1) = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : (\phi - 1) < 0$$

Tabelle: Augmented Dickey-Fuller Tests für C, Y^d, 1976-2001

Variable	$t_{\phi-1}$	p
C	1.100	0.996
Y^d	-0.512	0.873

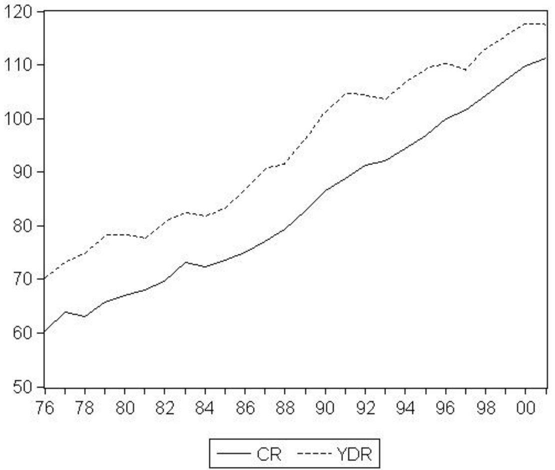
Bem.: Die unit root Tests mit Interzept und Trend im Modell sind nicht so klar.

Beispiel: 1. Tests auf unit root, 1976-2001

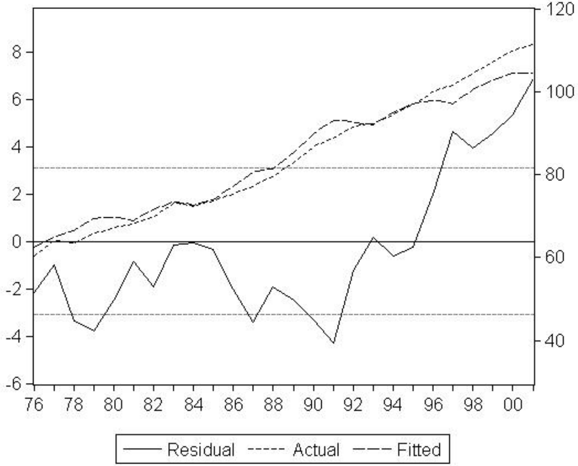
Wir

- betrachten nun den Plot der beiden Reihen,
- schätzen die Gleichung $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t^d + u_t$ und
- betrachten die Residuen.

Beispiel: 2. Plot der Reihen, 1976-2001



Beispiel: 2. Stationarität der Residuen $\hat{u}_t$ aus $C_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Y_t^d + \hat{u}_t$, 1976-2001



Beispiel: 2. Engle-Granger, 1976-2001 (Fs.)

Die Residuen deuten auf Nicht-Stationarität hin. Sie steigen gegen Ende der Periode an. Die geschätzte Gleichung ist

$$\hat{C}_t = -12.698 + 1.020 Y_t^d \qquad R^2 = 0.979, \quad DW = 0.484$$

Der niedrige *DW*-Wert weist auf hohe positive Autokorrelation in den Residuen hin und damit auf I(1). C und Y^d sind *nicht* kointegriert.

Zur Bestätigung wird der Test der Residuen auf I(1) mit einem ADF-Test durchgeführt.

Beispiel: Vergleich mit 1976-1992

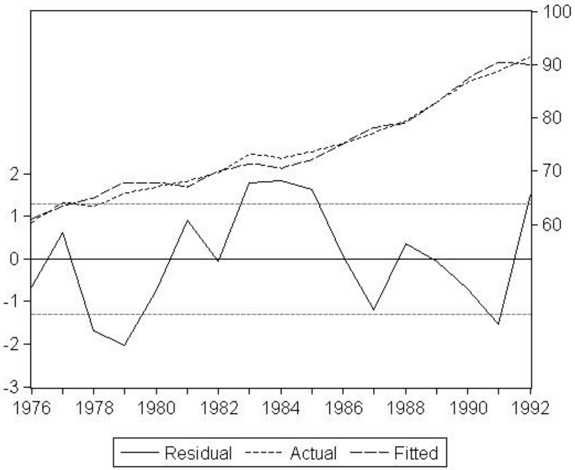
Das selbe für die Periode 1976 - 1992 durchführt ergibt ebenfalls klare I(1) Testergebnisse für C, Y^d (auch mit Trend und Interzept). Die geschätzte Gleichung ist

$$\hat{C}_t = 1.069 + 0.852\,Y_t^d \qquad R^2 = 0.982, \quad DW = 1.310$$

Der DW-Wert liegt im Unentscheidbarkeits-Bereich. Der Plot der Residuen deutet auf Stationarität und damit Kointegration.

Zur Bestätigung wird der Test der Residuen auf I(1) mit einem ADF-Test durchgeführt.

Beispiel: Vergleich mit 1976-1992



Schätzung als ECM

Um des Problem der geringen Macht und der Gefahr der Wahl eines spurious Zusammenhangs zu vermeiden, wird das Modell i.A. in Differenzen geschätzt. In EC Form lautet $Y = \mu_0 + \mu_1 X + u$

$$\Delta Y_t = -\gamma[Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1}] + \alpha \Delta X_{t-1} + u_t$$

Es kann auch mit verzögerten ΔY_{t-i} und ΔX_{t-j} zur Erfassung kurzfristiger Dynamik ergänzt werden, z.B.

$$\Delta Y_t = -\gamma[Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1}] + \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \alpha_2 \Delta X_{t-2} + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

In [. . .] scheint die *langfristige, kointegrierende Beziehung* explizit auf.

Modellierung nicht-kointegierter Variabler

Sind in den EC Gleichungen für $\Delta Y_t = \ldots$ *und* für $\Delta X_t = \ldots$ beide γ-Parameter

$$\gamma = 0$$

so gibt es *keine* kointegrierende Beziehung. (Vgl. Granger Kausalität)

In diesem Fall beschreibt ein Modell der Form

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \alpha_2 \Delta X_{t-2} + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

den Zusammenhang (in den Differenzen) zweier nicht kointegrierter Variabler, wobei die Variablen im Niveau nicht aufscheinen.

Modellierung

- *Nicht kointegrierte I(1)* Variable modelliert man daher in Differenzen.
- *Kointegrierte I(1)* Variable kann man im Niveau (Engle-Granger) als auch in EC -Form (siehe Johansen) modellieren. Letzteres ist empfehlenswert, wenn die (langfristigen) Strukturen in multivariaten Problemen entdeckt werden sollen.
- *Stationäre* Variable modelliert man im Niveau, da durch die Differenzenbildung eine künstliche Dynamik eingeführt wird.
  Die EC-Darstellung kann zur Interpretation herangezogen werden.

Beispiel: ECM für die Konsumgleichung

Wir schätzen für 1976 - 2001 ein ECM, wobei wir von einer kointegrierenden Beziehung zwischen C, Y^d *und* M/PC, des realen Vermögens, ausgehen.

$$\widehat{\Delta C_t} = -0.337[C_{t-1} - 0.846\,Y^d_{t-1} - 0.072(M/PC)_{t-1}] - 0.351\,\Delta C_{t-1}$$

mit $R^2 = 0.413$ und $DW = 1.517$.

Es besteht (voraussichtlich) eine kointegrierende Beziehung zwischen dem privaten Konsum, dem disponiblen Einkommen und dem Vermögensindikator.

$\gamma = 0.337$ ist wie erwartet positiv. Die langfristige Beziehung lautet

$$C = 0.846\,Y^d + 0.072(M/PC)$$