Dynamische Modelle: Stabilität und Interpretation

Kapitel 17

Angewandte Ökonometrie / Ökonometrie III

Michael Hauser

Inhalt

- Kurz- und langfristige Effekte
  - Einmalige Änderung in X
  - Permanente Änderung in X
  - Langfristiges 'Gleichgewicht'
- Wahl der Lagstruktur
- Adaptive Erwartungen
- Anpassungsmodell

ADL(1,1) rekursiv und explizit

Das ADL(1,1) hat die rekursive Darstellung

$$Y_t = \alpha + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$$

Im Vergleich dazu läßt sich ein AR(1), $Y_t = \alpha + \alpha_1 Y_{t-1} + v_t$, darstellen als

$$Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} = \alpha + v_t \quad \text{bzw.} \quad (1 - \alpha_1 \mathrm{L}) Y_t = \alpha + v_t$$

und durch Division mit $(1 - \alpha_1 \mathrm{L})$, $|\alpha_1| < 1$, und da $\alpha/(1 - \alpha_1 \mathrm{L}) = \alpha/(1 - \alpha_1)$
$Y_t = (\alpha + v_t)/(1 - \alpha_1 \mathrm{L}) = (\alpha + v_t)(1 + \alpha_1 \mathrm{L} + \alpha_1^2 \mathrm{L}^2 + \ldots)$

$$Y_t = \alpha/(1 - \alpha_1) + (1 + \alpha_1 \mathrm{L} + \alpha_1^2 \mathrm{L}^2 + \ldots) v_t$$

Angewendet auf das obige ADL mit $v_t = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$

Vgl. Summe der geometrischen Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1/(1 - q)$, $|q| < 1$.

Dynamic response: einmalige Änderung in X

$$Y_t = \alpha/(1-\alpha_1) + (1 + \alpha_1 \mathrm{L} + \alpha_1^2 \mathrm{L}^2 + \ldots)(\beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t)$$

Wir betrachten den Einfluss einer *einmaligen* Änderung (**impulse**) in X_t (c.p.) um eine Einheit auf Y_{t+i}. Das ist die partielle Ableitung von Y_{t+i} nach X_t bzw. Y_t nach X_{t-i}.

Der *kontemporäre* Effekt, $i = 0$:

$$\partial Y_t / \partial X_t = \beta_0$$

Die Beiträge von X_{t-1} und X_{t-2} sind ersichtlich aus
$Y_t = \alpha/(1-\alpha_1) + \beta_0 X_t + [\beta_1 X_{t-1} + \alpha_1 \beta_0 X_{t-1}] + [\alpha_1 \beta_1 X_{t-2} + \alpha_1^2 \beta_0 X_{t-2}] + \ldots$

Dynamic response: einmalige Änderung in X

Der *kurz-* bzw. *mittelfristige* Effekt, $i > 0$:

$$\partial Y_{t+1}/\partial X_t = \partial Y_t/\partial X_{t-1} = \beta_1 + \alpha_1\beta_0$$

$$\partial Y_{t+2}/\partial X_t = \partial Y_t/\partial X_{t-2} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1^2\beta_0$$

$$\dots$$

$$\partial Y_{t+i}/\partial X_t = \partial Y_t/\partial X_{t-i} = \alpha_1^{i-1}(\beta_1 + \alpha_1\beta_0)$$

Eine einmalige Änderung in X heute bewirkt eine Änderung von $\alpha_1^{i-1}(\beta_1 + \alpha_1\beta_0)$ in Y i Perioden in der Zukunft.

Eine einmalige Änderung in X vor i Perioden hat auf das heutige Y die gleiche Auswirkung.
Das ADL(1,1) gilt für jeden Zeitpunkt t oder $(t+1), \dots$
$Y_{t+1} = \alpha + \alpha_1 Y_t + \beta_0 X_{t+1} + \beta_1 X_t + u_{t+1}$

Dynamic response: einmalige Änderung in X

Der *langfristige* Effekt, $i \to \infty$:
Langfristig geht der Einfluß gegen *null*, da $|\alpha_1| < 1$.

Wir nennen

$$\partial Y_t / \partial X_{t-i}$$

impusle response function, IRF.

Dynamic response: permanente Änderung in X

Ang wir erhöhen X in t um eins und behalten das neue Niveau bei (**step**). Die Auswirkungen in

- t sind
$$\partial Y_t / \partial X_t$$
- $t+1$ sind
$$\partial Y_t / \partial X_t + \partial Y_{t+1} / \partial X_t = \partial Y_t / \partial X_t + \partial Y_t / \partial X_{t-1}$$

  $\ldots$
- $t+i$ sind
$$\sum_{j=0}^{i} \partial Y_{t+j} / \partial X_t = \sum_{j=0}^{i} \partial Y_t / \partial X_{t-j}$$

Wir nennen
$$\sum_{j=0}^{i} \partial Y_t / \partial X_{t-j}$$
die **cumulative impulse response function.**

Dynamic response: permanente Änderung in X

Langfristig, $i \to \infty$, wirkt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \partial Y_{t+j}/\partial X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \partial Y_t/\partial X_{t-j}$$

Für den ADL(1,1) gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \partial Y_t/\partial X_{t-j} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^{j-1}(\beta_1 + \alpha_1\beta_0) = \frac{(\beta_0 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1)}$$

Die Summe existiert wiederum, solange $|\alpha_1| < 1$ ist.

Dynamic response: permanente Änderung in X

Der langfristige Effekt einer permanenten Veränderung von X um eine Einheit ist die Summe aller kurz- bzw. mittelfristigen Effekte aus einmaligen Änderungen.

Den *langfristigen* Effekt einer permanenten Änderung Beziehung in X erhält man auch aus der langfristigen Beziehung zwischen Y und X. Wir setzen

$$Y_t = \bar{Y} = const, \quad X_t = \bar{X} = const, \quad \forall t$$

und erhalten im ADL(1,1) (vgl. das ECM in K16)

$$\bar{Y} = \alpha/(1 - \alpha_1) + (\beta_0 + \beta_1)/(1 - \alpha_1)\bar{X}$$

- Das ist die **statische Gleichgewichtsbeziehung**.
- Der Koeffizient vor $\bar{X}$ ist der **langfristige Multiplikator**.

Bsp für einmalige und permanente Änderungen

Einige Beispiele für temporäre Änderungen sind:

- Verschrottungsprämie für PKW in DE 2009
- 'Autofreier Tag' nach Ölpreisschock 1974
- Einmalzahlungen bei der Pension
- einmalige vorzeitige Abschreibungen

Einige Beispiele für permanente Änderungen sind:

- Zinssatzsteuerung durch die Zentralbank
- Steuererhöhungen
- Ölpreis'schocks' (sind i.A. permanent)
- Technologieschocks, technologische Entwicklungen

DL(s)

Im DL(s) Modell

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \ldots + \beta_s X_{t-s} + u_t$$

ist das statische GGW

$$\bar{Y} = \alpha + (\beta_0 + \ldots + \beta_s)\bar{X}$$

Die kurzfristigen Multiplikatoren sind

$$\partial Y_{t+j}/\partial X_t = \partial Y_t/\partial X_{t-j} = \begin{cases} \beta_j & j = 0, \ldots, s \\ 0 & j > s \end{cases}$$

DL(s), durchschnittliche Verzögerung

Die durchschnittliche Verzögerung der Reaktion auf eine einmalige Veränderung in X_t ist die gewichtetet Summe der Lags.

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\, w_i, \qquad w_i \geq 0$$

Für das DL(s) sind die Gewichte

$$w_i = \beta_i / (\beta_0 + \ldots + \beta_s) \quad \text{und} \quad w_i = 0, \qquad i > s$$

sofern alle $\beta_i \geq 0$.

Die Partialsumme

$$\sum_{i=0}^{k} w_i$$

ist die kumulierte Anpassung bis zum Lag k.

Koyck-Lag, $0 < \lambda < 1$, dynamic responses

Der Koyck-Lag hat folgende explizite bzw. rekursive Darstellung (vgl. Kap. 16)

$$Y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} + u_t$$

$$Y_t = \alpha(1-\lambda) + \lambda Y_{t-1} + \beta(1-\lambda)X_t + v_t$$

Die dynamic responses einer einmaligen Veränderung in X, $i \geq 0$, sind

$$\partial Y_{t+i}/\partial X_t = \partial Y_t/\partial X_{t-i} = \beta(1-\lambda)\lambda^i$$

Sie klingen geometrisch ab.

Koyck-Lag, $0 < \lambda < 1$, durchschnittlicher Lag

Da $\sum_0^\infty \lambda^i = 1/(1-\lambda)$, sind die Gewichte der Lags $\quad w_i = (1-\lambda)\lambda^i$.
Der durchschnittliche Lag einer einmaligen Veränderung in X ist in Beobachtungsperioden gemessen:

$$\sum_0^\infty i\, w_i = \lambda/(1-\lambda)$$

Tabelle: λ Werte und die durchschnittliche Anpassungsdauer

λ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\lambda/(1-\lambda)$	0.11	0.43	1.00	2.33	9.00

Kleine λ bedeuten eine schnelle Anpassung, große eine langsame.
λ ist ein “Memory”-Parameter.

Koyck: Beispiel

Die Schätzung einer Konsumfunktion für österreichische Jahresdaten (1977-2001) ergibt

$$\hat{C}_t = -3.477 + 0.766\,C_{t-1} + 0.260\,Y_t^d$$

Ein Vergleich mit der rekursiven Darstellung des Koyck-Modells:
$\alpha(1-\lambda) = -3.477$, $\lambda = 0.766$ und $\beta(1-\lambda) = 0.260$
Daher ist

$$\alpha = -14.869,\ \lambda = 0.766,\ \beta = 1.111(!)$$

Der durchschnittliche Lag, $\lambda/(1-\lambda)$, beträgt daher 3.27 Jahre.
Eine (einmalige) Veränderung im disponiblen Einkommen wirkt mit einer durchschnittlichen Verzögerung von 3 Jahren und 1 Quartal auf den privaten Konsum.

Wahl der Lagstruktur

Wahl von Lagstruktur: DL(s)

- Wählt man in kleinen Stichproben s zu groß, werden die Freiheitsgrade für die Tests sehr klein.
  - Damit werden die Tests anfälliger gegenüber Abweichungen von der Annahme der Normalverteilung für die Residuen.
  - Die Standardfehler werden größer und damit die Macht der Tests geringer.
- Wenn die x-Variablen Trend-behaftet oder hoch autokorreliert sind, tritt möglicherweise das Problem der Multikollinerität auf.
- s ist i.A. nicht bekannt. Üblicherweise geht man so vor, dass die Ordnung s mit Hilfe eines Informationskriteriums gewählt wird. D.h. man schätzt alle Modelle mit s-Werten kleiner einem maximalen s, und wählt dann das Modell mit dem kleinsten AIC oder SBC.

Einfache Erwartungsbildung

Adaptive Erwartungen

Ein einfaches Modell für die Erwartungsbildung basierend auf univariater historischer Information sind **adaptive Erwartungen**, $0 < \lambda < 1$.

$$X^e_{t+1} = \lambda X^e_t + (1 - \lambda) X_t$$

bzw.

$$(X^e_{t+1} - X^e_t) = (1 - \lambda)(X_t - X^e_t)$$

Die Erwartungen werden proportional zum Fehler aus der Vorperiode angepasst.

Die explizite Darstellung ist

$$X^e_{t+1} = (1 - \lambda)[X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots]$$

vergleichbar einem AR(∞).

Verwendung adaptiver Erwartungen

Die Erwartung X^e wird nicht beobachtet.

- Sie kann für eine gewähltes λ konstruiert werden, oder
- es wird die explizite Darstellung in ein Regressionsmodell

$$Y_t = a + bX^e_{t+1} + u_t$$

eingesetzt und die rekursive Darstellung

$$Y_t = a + b(1-\lambda)[X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots] + u_t$$

$$Y_t = a(1-\lambda) + \lambda Y_{t-1} + b(1-\lambda)X_t + v_t$$

ermittelt. (v_t ist kein White Noise.) Damit kann das λ aus vorliegenden Daten geschätzt werden.

In der ADL(1,1)-Variante der Konsumfunktion könnte der verzögerte Konsum nicht Ausdruck von habit persistence, sondern von Berücksichtigung zukünftiger Einkommensströme sein.

Naive Erwartungen

Ist $\lambda = 0$, so heißen die Erwartungen **naiv**.

$$X^e_{t+1} = X_t$$

Die Prognose für morgen ist der heutige Wert.

Gehorcht X einem Random Walk (ohne Drift), ist diese Erwartungsbildung optimal.

$$X_t = X_{t-1} + u_t$$

u_t weißes Rauschen.

Partielle Anpassung, Anpassungsmodell

Partielle Anpassung

Das **Anpassungsmodell** hat seine Motivation in geplanten Entscheidungen, die sich nicht sofort zur Gänze realisieren lassen, z.B. gewünschter Lagerbestand, gewünschter Kapitalstock.

Angenommen der *gewünschte* Lagerbestand, K^*, hängt vom laufenden Umsatz, S_t (sales), ab.

$$K_t^* = \alpha + \beta S_t$$

Da der Lagerauf-/abbau eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt, kann nur ein Teil, $(\delta * 100)$%, davon realisiert werden. (u ist WN.)

$$K_t - K_{t-1} = \delta(K_t^* - K_{t-1}) + u_t$$

δ heißt *Anpassungsparameter*, $0 < \delta < 1$.

Partielle Anpassung

K^* selbst ist nicht beobachtbar. Daher verwenden wir dafür das obige Verhaltensmodell.

$$K_t - K_{t-1} = \delta([\alpha + \beta S_t] - K_{t-1}) + u_t,$$

ergibt

$$\Delta K_t = a + bS_t - \delta K_{t-1} + u_t$$

mit $a = \delta\alpha$ und $b = \delta\beta$, $\Delta K_t = K_t - K_{t-1}$.

Aus der Schätzung der Gleichung können wir alle Strukturparameter, α, β und δ bestimmen.