Mehrgleichungsmodelle

Kapitel 20

Angewandte Ökonometrie / Ökonometrie III
Michael Hauser

Inhalt

- SUR, seemingly unrelated regressions
- Systeme von interdependenten Gleichungen
- Identifikation
- Reduzierte Form
- Ordnungs- und Rangbedingung

Seemingly unrelated regressions, SUR

Beispiel: CAPM

Das CAPM (capital asset pricing model) erklärt

- die Abweichung einer Aktienrendite r vom riskofreien Zinssatz r_f durch
- die Abweichung der erwarteten Marktrendite r_m vom risikofreien Zinssatz und
- einer idiosynkratischen (individuellen) Komponente (= Störterm).

$$r_i - r_f = \beta_i[\mathrm{E}(r_m) - r_f] + u_i$$

r_i ist die Rendite der i-ten Aktie, $i = 1, \ldots, N$.

Wenn N Zeitreihen vorliegen, können die u_i von denselben Dritt-Effekten beinflusst werden, und sind daher kontemporär nicht unkorreliert.

Beispiel: Grunfeld & Griliches(58)

Grunfeld und Griliches haben das Investitionsverhalten von 10 Unternehmen (z.B. General Motors, Chrysler, General Electric) für die Periode 1935-1954 untersucht.

$$I = \beta_1 + \beta_2 F + \beta_3 C + u$$

I . . . Bruttoinvestitionen
F . . . Marktwert des Unternehmens am Ende der Vorperiode
C . . . Anlagenwert am Ende der Vorperiode
Da die Entscheidungen auch von dritten Variablen (z.B. Konjunktur) gemeinsam beeinfusst werden, sind die Störterme kontemporär korreliert.

SUR

Diese Modelle werden als **seemingly unrelated regressions (SUR)** bzeichnet, wenn die Fehler zwar über die Zeit unkorreliert, aber kontemporär korreliert sein können.

Konsequenz für den Einzel-Gleichungs-OLS-Schätzer:

- unverzerrt, aber
- nicht effizient.

Die Information über den kontemporären Zusammenhang wird nicht benutzt.

Notation

Angenommen es liegen 2 Gleichungen, $m = 2$ und
n Beobachtungen vor.

$$\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{u}_i \qquad i = 1, 2$$

$\boldsymbol{y}_i$ und $\boldsymbol{u}_i$ sind Vektoren der Länge n.
$\boldsymbol{X}_i$ die $(n \times k_i)$ Datenmatrix,
$\boldsymbol{\beta}_i$ ein Vektor der Länge k_i.
Die Fehler haben die Kovarianzstruktur

$$\mathrm{Var}(u_{ti}) = \sigma_i^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_1' \boldsymbol{u}_2) = \sigma_{12}$$

Die Schätzung dieses Modell-Typs (GLS) wird im folgenden Kapitel behandelt.

Notation

Als System angeschrieben

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{V} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Sigma}_c \otimes \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_c = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Ist $\sigma_{12} = 0$ besteht kein Zusammenhang zwischen den Gleichungen, und die Einzel-Gleichungsschätzer sind effizient.

$\boldsymbol{y}$ heißt **stacked** Vektor der $\boldsymbol{y}_i$.

Exkurs: Kronecker-Produkt $\otimes$

Definition:
Gegeben sind 2 Matrizen $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ und $\boldsymbol{B}_{r\times s}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}$$

Das Kronecker-Produkt ist definiert als

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \dots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \dots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ ist eine $(m.r \times n.s)$ Matrix.

Mehrgleichungsmodelle: Identifikation

Wiederholung: Das Lüdeke-Modell für die BRD

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + u_{1t} \qquad \text{Konsumgleichung}$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{2t} \qquad \text{Investitionsfunktion}$$

$$M_t = \gamma_1 + \gamma_2 Y_t + \gamma_3 M_{t-1} + u_{3t} \qquad \text{Importfunktion}$$

$$Y_t = C_t + I_t - M_t + G_t \qquad \text{Definitorische Identität}$$

Variable (zu konstanten Preisen):
endogen: C privater Konsum, Y BIP, I Investitionen, M Importe
exogen: G öffentlicher Konsum
predetermined (vorherbestimmt): P_{t-1} Gewinne, M_{t-1}, G, C_{t-1}

Angebots- und Nachfragefunktion II

Das Ag (α_2) ist nicht identifiziert.

$Q^S = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u$ $\qquad \alpha_2 > 0$ Angebotsfunktion, S

$Q^D = \beta_1 + \beta_2 P + v$ $\qquad \beta_2 < 0$ Nachfragefunktion, D

$Q^D = Q^S$ $\qquad$ Gleichgewichtsbedingung

In Matrixschreibweise unter Berücksichtigung der Identität:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

mit $\quad \boldsymbol{y}_t = (Q \;\; P)'$, $\boldsymbol{z}_t = (1 \;\; Y)'$ $\quad$ und $\quad \boldsymbol{u}_t = (u \;\; v)'$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_t = \Gamma \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{u}_t$$

Angebots- und Nachfragefunktion II

Die reduzierte Form ergibt sich als

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{v}_t$$

mit $\quad \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Gamma} \quad$ wobei $\boldsymbol{\Pi}$ eine (2×2) Matrix mit 4 Elementen ist.
Das Modell selbst besitzt 5 Koeffizienten.

Identifizierbarkeit

Das *Strukturmodell* kann als Tripel

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Sigma}_c)$$

geschrieben werden. $\boldsymbol{\Sigma}_c$ ist die kontemporäre Kovarianzmatrix der Fehler.
Das *reduzierte Modell* kann als Paar

$$(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Omega}_c)$$

geschrieben werden. $\boldsymbol{\Omega}_c$ ist die kontemporäre Kovarianzmatrix der transformierten Fehler.

Frage: Wann können aus den Koeffizienten der reduzierten Form die Strukturparameter eindeutig bestimmt werden?

Die Anzahl der Parameter in den Matrizen reicht als Kriterium nicht aus, da Nullrestriktionen für die Strukturparameter mit linearen Abhängigkeiten vorliegen können.

Identifizierbarkeit

Wir untersuchen hier nur Nullrestriktionen und unterscheiden 2 Kriterien:

- Die Abzählbarkeits- oder Ordnungs-Bedingung, und
- die Rang-Bedingung

Unser Modell lautet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_t = \Gamma \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{u}_t$$

mit der $(m \times m)$ Matrix $\boldsymbol{A}$, und der $(m \times K)$ Matrix Γ.
Es gibt

- m abhängige Variable, und
- K vorherbestimmte Variable.

Bezeichnungen und Ordnungs-Bedingung

Die i-te Gleichung enthält auf der *rechten* Seite:

- m_i erklärende endogene Variable
- m_i^* (durch Nullrestriktionen) ausgeschlossene endogene Variable

$$m = m_i + 1 + m_i^*$$

- K_i exogene oder vorherbestimmte Variable
- K_i^* (durch Nullrestriktionen) ausgeschlossene vorherbestimmte Variable

$$K = K_i + K_i^*$$

Die **Ordnungs-Bedingung** sagt:
Die Gleichung i ist identifizierbar, wenn

$$K_i^* + m_i^* \geq m - 1 \quad \text{oder} \quad K_i^* \geq m_i$$

Ordnungs-Bedingung

In Worten:

- $K_i^* + m_i^* \geq m - 1$:
  Die Anzahl aller ausgeschlossen Variablen, $K_i^* + m_i^*$, der i-ten Gleichung ist mindestens so groß wie die Anzahl *aller* endogenen Variablen minus eins, $m - 1$. *Oder*
- $K_i^* \geq m_i$: Die Anzahl der ausgeschlossenen vorherbestimmten Variablen ist mindestens so groß wie die endogenen der i-ten Gleichung.

Die Ordnungs-Bedingung ist nur eine *notwendige* Bedingung. Sie muß erfüllt sein.
Sie garantiert aber allein noch nicht die Identifizierbarkeit.
Ist sie nicht erfüllt, so ist die i-te Gleichung nicht identifiziert.

Beispiel: Ordnungs-Bedingung

Im Modell II oben setzen wir die GGW-Bedingung ein:

$$Q = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u \qquad \alpha_2 > 0 \quad \text{Angebotsfunktion, S}$$

$$Q = \beta_1 + \beta_2 P + v \qquad \beta_2 < 0 \quad \text{Nachfragefunktion, D}$$

Es gibt 2 endogene Variable, P, Q. $\quad m = 2$.
Und 2 exogene Variable, 1, Y. $\quad K = 2$.

- Gleichung 1: $K_1^* = 0$, $m_1 = 1$. Es gilt: $K_i^* \ngeq m_i$.
  Die Angebots-Gleichung ist nicht identifiziert.
- Gleichung 2: $K_2^* = 1$, $m_2 = 1$. Es gilt: $K_i^* = m_i$.
  Die Nachfrage-Gleichung ist identifiziert.

Rang-Bedingung

Das Strukturmodell lautet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_t = \Gamma \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{u}_t$$

- Wir bilden die Matrizen $\boldsymbol{A}^*{}_i$ und $\Gamma^*{}_i$:
  Die Matrizen $\boldsymbol{A}^*{}_i$ und $\Gamma^*{}_i$ werden aus den Spalten von $\boldsymbol{A}$ bzw. Γ gebildet, die in der i-ten Zeile einen Koeffizienten von **null** aufweisen.
- In beiden Matrizen, $\boldsymbol{A}_i^*$ und Γ_i^*, wird die i-te Zeile (Gleichung) **gestrichen.**

Die **Rang-Bedingung** lautet:
Die i-te Gleichung ist identifizierbar, wenn

$$\mathrm{rg}[(\boldsymbol{A}_i^* \;\; \Gamma_i^*)] \geq m - 1$$

Beispiel: Rang-Bedingung

Die Matrix der Koeffizienten $(\boldsymbol{A} \;\; \Gamma)$ des Lüdeke-Modells lautet

Gl.	Y	C	I	M	1	C_{-1}	P_{-1}	M_{-1}	G
1	$\times$	1	0	0	$\times$	$\times$	0	0	0
2	$\times$	0	1	0	$\times$	0	$\times$	0	0
3	$\times$	0	0	1	$\times$	0	0	$\times$	0
4	1	-1	-1	1	0	0	0	0	1

Für die Rang-Bedingung der 3.Gleichung *streichen* wir die 3.Zeile und alle Spalten, die dort *ungleich null* sind.

$$\left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \times & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel: Rang-Bedingung

$m = 4$

$$\mathrm{rg}[(\boldsymbol{A}_3^* \;\; \boldsymbol{\Gamma}_3^*)] = 3 \geq 3 = m - 1$$

Die 3.Gleichung ist identifiziert.

Identifizierung

- Ein Modell ist identifiziert, wenn alle Gleichungen identfiziert sind.
- Ist die Rangbedingung erfüllt, so auch die Ordnungsbedingung.
- Die Rang-Bedingung ist für große Modelle schwierig zu bestimmen.

Identifizierung

- Die Reduktion einer Gleichung um einen prädeterminierten Regressor macht diese Gleichung eher identifizierbar. ($K_i^* \uparrow$)
- Das fälschliche Verwenden einer präderterminierten Variablen im Modell hat möglicherweise die fälschliche Identifizierbarkeit einer anderen Gleichung zur Folge. ($K, K_j^* \uparrow$)
- Fügt man eine neue Gleichung zum Modell ($m \uparrow$), so ist das neue Modell identifierbar, wenn zumindest in einer anderen Gleichung mindestens eine weitere (neue) prädeterminierte Variable verwendet wird.

Identifizierung

Eine Gleichung ist

- *unteridentifiziert* (nicht identifiziert), wenn in der Ordnungs-Bedingung

$$K_i^* < m_i$$

- *exakt identifiziert*

$$K_i^* = m_i$$

  und Rangbedingung
- *überidentifiziert*

$$K_i^* > m_i$$

  und Rangbedingung

gilt.

Übungsbeispiele

- Hackl 20.A.1: Wählen sie 3 Beispiele aus 1 bis 5.
  Geben sie die Π -Matrizen nur allgemein und die Anzahl ihrer Elemente an.
- Hackl 20.A.1: 6