Dynamische und simultane Modelle

Kapitel 16

Angewandte Ökonometrie / Ökonometrie III
Michael Hauser

Inhalt

- Motivation für Dynamiken
- Erwartungen
- Dynamische Modelle
- Mehrgleichungsmodelle, Systeme von Gleichungen
- Identifikationsprobleme in Systemen
- Reduzierte Form und Beobachtungsäquivalenz

Das Lüdeke-Modell für die BRD

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + u_{1t} \qquad \text{Konsumgleichung}$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{2t} \qquad \text{Investitionsfunktion}$$

$$M_t = \gamma_1 + \gamma_2 Y_t + \gamma_3 M_{t-1} + u_{3t} \qquad \text{Importfunktion}$$

$$Y_t = C_t + I_t - M_t + G_t \qquad \text{Definitorische Identität}$$

Variable (zu konstanten Preisen):
endogen: C privater Konsum, Y BIP, I Investitionen, M Importe
exogen: G öffentlicher Konsum, P Gewinne,
predetermined (vorherbestimmt): M_{t-1}, C_{t-1} und G, P_{t-1}

Modellcharakterisierung

Ein Modell heißt **partialanalytisch**, wenn nur ein Teil der Ökonomie modelliert wird.
Bsp: Eine Konsumfunktion.

Im Gegensatz dazu versucht ein **System von Gleichungen** die Simultanitäten und die Aufeinanderfolge von Entscheidungen zu erfassen.
Bsp: Das Lüdeke-Modell besteht aus einen System von Gleichungen für den realen Sektor. Es ist aber in dem Sinne partialanalytisch als es den monetären Teil nicht erfasst.

Ein Modell heißt **dynamisch**, wenn verzögerte Variable auftreten. Andernfalls heißt es **statisch**.

Dynamische Modelle

Verschiedene Dynamiken

"Der Wirtschaftsführung obliegt die richtige Verteilung der Güter und Kräfte über den Raum, und sodann ihre richtige Verteilung über die Zeit."(Wagemann, Konjunkturlehre, 1929, 16).

Die **räumliche Verteilung** und damit verbunden räumliche Dynamiken, werden z.B. in räumlichen Panels modelliert. Räumliche Dynamiken beschreiben den Einfluss von benachbarten Einheiten.
Z.B. ein Wirtschaftszentrum strahlt in die umliegenden Bezirke aus.

Die **zeitliche Verteilung** bilden wir durch gelaggte Variable ab.

Verschiedene zeitliche Dynamiken

Dynamische, sequenzielle Vorgänge über die Zeit sind die Regel. Dazu gehören

- Entscheidungs- und Beschaffungsprozesse
  Bsp: Kaufentscheidung, Bestellung, Produktion, Lieferung, Implementation
- Bestandseffekte
  Bsp: Kundenstock, Gewohnheit, Investitionen und Kapitalstock, Neukredite und Schulden
- Anpassungsvorgänge
  Bsp: permanentes Einkommen wird angepasst, gewünschtes Investitionsniveau wird angestrebt
- Auffinden eines Gleichgewichts
  Bsp: Preis-/Mengenfindung in allgemeinen Gleichgewichtsmodellen

Statische Modelle

Statische Modelle hingegen nehmen an, dass alle Anpassungsprozesse innerhalb der angenommenen Zeiteinheit (Beobachtungsperiode) abgeschlossen werden.

Erwartungen

Erwartungen sind Ausdruck jeder wirtschaftlichen Aktivität, die Zeit benötigt um abgeschlossen zu werden.

Formale Modelle der Erwartungsbildung verwenden das Kozept von

- Risiko im Gegensatz zu
- Unsicherheit.

Erwartungen: Risko und Unsicherheit

Risiko unterstellt eine Operationalisierung von Unsicherheit in Form von Zufallsvariablen. Die Ereignisse die eintreten können, sind wohl definiert und können mit quantifizierbaren Wahrscheinlichkeiten belegt werden.

Unsicherheit im Knight'schen Sinn akzeptiert auch nicht-quantitativ erfassbare, also nur qualitativ bewertbare Unsicherheit. Vgl. Strukturbrüche.
Soziale Systeme sind auf Grund ihrer Komplexität und Rückkoppelungseffekte nicht immer durch (einfache) quantitative Modelle beschreibbar.

Eine gewisse Ausgewogenheit zwischen beiden in der Modellierung scheint am vielversprechensten zu sein.

Erwartungen: backward und forward looking

Für Entscheidungen werden Prognosen für zukünftige Werte der Entscheidungsvariablen gebildet.

- **backward looking**, Erwartungsbildung auf Basis historischer Daten.
  Bsp: adaptive Erwartungen, ARIMA-Modelle.
- **forward looking**. Hier werden relevante geplante, zukünftige Ereignisse mit einbezogen.
  Bsp: Beschlossene Mehrwertsteuererhöhung ab 1.1. ($\rightarrow$ Vorziehkäufe), oder Verschrottungsprämie ($\rightarrow$ Kaufverschiebung). Die zukünftigen temporären Effekte können mittels Dummy Variablen unter Verwendung von historischer Information in Modelle integriert werden.

Erwartungen: rationale

- **Rationale Erwartungen**, RE ('berechenbare' im Gegensatz zu 'vernünftigen' Erwartungen).
  Rationale Erwartungen sind eine Modellierungstechnik. Sie werden von einem System erzeugt, bzw. von einem repräsentativen Akteur so gebildet, dass sie mit diesem System konsistent sind. Dabei wird unterstellt, dass das wahre Modell
  - für die gesamte Wirtschaft voliegt,
  - fix für die gesamte Zukunft ist, und dass dessen
  - Stochastik bekannt ist.

  Sie sind z.B. Bestandteil der dynamic stochastic general equilibrium models (DSGE).

Einige dynamische Modelle: Überblick

Wir diskutieren hier und im folgenden Kapitel

- Verteilte Verzögerungen, DL
- Koyck Lag
- Autoregressiver distributed Lag, ADL
- Fehlerkorrekturmodell

Einige dynamische Modelle: DL, Koyck

- **Verteilte Verzögerungen** (distributed lags) mit endlicher Ordnung s, DL(s)

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \ldots + \beta_s X_{t-s} + u_t$$

  Der maximale Lag ist s. Das Modell benötigt für die Lags s Parameter.

- **Geometrische Lagstruktur**, **Koyck Lag** (unendliche Lagstruktur): $\beta_i = \lambda_0 \lambda^i$

$$Y_t = \alpha + \lambda_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} + u_t$$

  Die geometrische Lagstruktur klingt geometrisch ab, λ^i, und benötigt dafür nur einen Parameter, λ.

Einige dynamische Modelle: Koyck (Fs)

Der Koyck Lag Modell entspricht einem autoregressiv verteilten Lag Modell mit autokorrelierten Residuen:

$$Y_t = \alpha(1 - \lambda) + \lambda_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t$$

mit $\quad v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$

Der durchschnittliche Lag wird in Kapitel 17 behandelt.

Koyck: Herleitung der rekursiven Darstellung

Wir bezeichnen $S_t = \sum \lambda^i X_{t-i}$. Es gilt:

$S_t = X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots =$

$\quad = X_t + \lambda(X_{t-1} + \lambda X_{t-2} + \ldots) = X_t + \lambda S_{t-1}$ bzw.

$$S_t - \lambda S_{t-1} = X_t$$

Wir schreiben das Modell als

$$Y_t = \alpha + \lambda_0 S_t + u_t \ \text{ und } \ Y_{t-1} = \alpha + \lambda_0 S_{t-1} + u_{t-1}$$

Nun multiplizieren wir Y_{t-1} mit λ:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \lambda_0 \lambda S_{t-1} + \lambda u_{t-1}$$

und subtrahieren λY_{t-1} von Y_t:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha(1-\lambda) + \lambda_0 X_t + v_t$$

mit $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$.

Einige dynamische Modelle: ADL

- Autogressiver verteilter Lag der Ordnung (1,1), **ADL(1,1)**

$$Y_t = \alpha + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t \qquad |\alpha_1| < 1$$

Das ADL Modell ergänzt das DL Modell um verzögerte abhängige Variable. Allgemein, ADL(r, s), lautet es:

$$A_r(L) Y_t = \alpha + B_s(L) X_t + u_t$$

$A_r(L) = 1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_r L^r$ und
$B_s(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \ldots + \beta_s L^s$

Die GGW Beziehung ($Y_t = Y_{t-1} = Y$, $X_t = X_{t-1} = X$) lautet zum ADL(1,1)

$$Y = \mu_0 + \mu_1 X$$

$\mu_0 = \alpha/(1 - \alpha_1)$ und $\mu_1 = (\beta_0 + \beta_1)/(1 - \alpha_1)$

Beispiel für ADL(1,0): kurz- und langfristige Effekte

Der private reale Konsum C hängt vom realen disponiblen Einkommen Y^d und dem vergangenen Konsum ab. Er werde als ADL(1,0) modelliert.

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t^d + \beta_2 C_{t-1} + u_t$$

Für Ö und der Periode 1977 bis 2009 (`dats_01.wf1`) geschätzt

$$\widehat{C}_t = 423.2 + 0.33\,Y_t^d + 0.64\,C_{t-1}$$

- Die **kurzfristige** Konsumneigung beträgt 0.33,
- die **langfristige** $0.33/(1-0.64) = 0.92$.

Einige dynamische Modelle: Fehlerkorrekturmodell

- **Fehlerkorrekturmodell** (Error correction model, ECM)

$$\Delta Y_t = -\gamma(Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1}) + \beta_0 \Delta X_t + u_t$$

Das Fehlerkorrekturmodell ist eine andere Darstellung des ADL(1,1).

Setzt man in das ADL(1,1) für

$$X_t = X_{t-1} + \Delta X_t \ \text{ und } \ Y_t = Y_{t-1} + \Delta Y_t,$$

erhält man die Struktur des Fehlerkorrekturmodells mit $\gamma = (1 - \alpha_1)$, $0 < \gamma < 2$.

Ist $\Delta X = \Delta Y = 0$, es gibt keine Veränderung in X und Y, so gilt (im Durchschnitt) die GGW Beziehung.

Dynamische Modelle: Fehlerkorrekturmodell (Fs)

Der Term (ausgehend von $Y_t = \mu_0 + \mu_1 X_t + \epsilon_t$)

$$Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1} = \epsilon_{t-1}$$

ist der **Fehler** bzw. die Abweichung von der langfristigen Beziehung zwischen X und Y in der Periode $(t-1)$.

Die **Korrektur** von Y_t (ΔY_t) durch den Fehler in $(t-1)$ findet durch die Multiplikation mit γ, $0 < \gamma < 2$, statt.

Daher heißt das Modell Fehlerkorrekturmodell.

Dynamische Modelle: Fehlerkorrekturmodell (Fs)

Angenommen $X_{t-1} = X_{GGW}$ (konstant) und

- $Y_{t-1} > Y_{GGW}$ (c.p.), Y_{t-1} ist c.p. *zu groß*. So ist der Fehler $\epsilon_{t-1} > 0$, *positiv*. Durch die Multiplikation mit $\gamma > 0$ wird der Effekt auf ΔY_t *negativ*. Y_t ist nun *kleiner* als Y_{t-1}.
  D.h. Y_t bewegt sich Richtung GGW Wert.
- $Y_{t-1} < Y_{GGW}$ (c.p.), Y_{t-1} ist c.p. *zu klein*. So ist der Fehler $\epsilon_{t-1} < 0$, *negativ*. Durch die Multiplikation mit $\gamma > 0$ wird der Effekt auf ΔY_t *positiv*. Y_t ist nun *größer* als Y_{t-1}.

Die Anpassung erfolgt in die richtige Richtung.

Mehrgleichungsmodelle

Mehrgleichungsmodelle: Charakterisierung

Wir wollen nun die simultane Beziehungen mehrerer (abhängiger) Variabler beschreiben. Wir unterscheiden:

- Typen von Gleichungen
- Typen von Variablen
- Identifizierbarkeit und Nicht-Identifizierbarkeit von Gleichungen

Das Lüdeke-Modell für die BRD (Wh)

$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + u_{1t}$ Konsumgleichung

$I_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 P_{t-1} + u_{2t}$ Investitionsfunktion

$M_t = \gamma_1 + \gamma_2 Y_t + \gamma_3 M_{t-1} + u_{3t}$ Importfunktion

$Y_t = C_t + I_t - M_t + G_t$ Definitorische Identität

Variable (zu konstanten Preisen):
endogen: C privater Konsum, Y BIP, I Investitionen, M Importe
exogen: G öffentlicher Konsum, P Gewinne,
predetermined (vorherbestimmt): M_{t-1}, C_{t-1} und G, P_{t-1}

Mehrgleichungsmodelle: Typen von Gleichungen

Wir unterscheiden:

- **Reaktions-** oder **Verhaltensgleichungen** beschreiben bzw. erklären das Verhalten einer abhängigen Variablen.
  Bsp: $\Delta P = \alpha(D - S)$ mit $\alpha > 0$ oder Konsumfunktion
- **Definitorische Identitäten** definieren Variable.
  Bsp: Die verwendungsseitige Definition des BIP
  $$BIP = C + I + G + (X - M)$$
- **Gleichgewichtsbedingungen**:
  Bsp: Angebot = Nachfrage

Mehrgleichungsmodelle: Typen von Variablen

Wir unterscheiden:

- **endogene** Variable:
  Variable, die vom Modell erklärt werden.
- **exogene** Variable:
  Das sind Variable, die mit allen (vergangenen und zukünftigen) Störgrößen unkorreliert sind. (Strict exogeneity)
- **predetermined** (vorherbestimmte) Variable:
  Das sind verzögerte endogene Variable und (aktuelle und verzögerte) exogene Variable. Sie sind mit den zukünftigen und kontemporären Fehlern unkorreliert.

Identifizierbarkeit: Angebots- und Nachfragefunktion I

Ein klassisches Problem zur Identifizierbarkeit ist das Schätzen eines Systems bestehend aus einer Angebots- und einer Nachfragefunktion.

Problem 1:

$Q^S = \alpha_1 + \alpha_2 P + u$	$\alpha_2 > 0$	Angebotsfunktion
$Q^D = \beta_1 + \beta_2 P + v$	$\beta_2 < 0$	Nachfragefunktion
$Q^D = Q^S$		Gleichgewichtsbedingung

Es liegen 3 Gleichungen mit 2 endogenen Variablen und keinen exogenen oder vorherbestimmten Variablen vor.

Da nur Gleichgewichtspunkte, das sind Paare (P^*, Q^*), per definitionem beobachtet werden können, kann *nicht* auf die Steigungen der beiden Funktionen geschlossen werden.
α_2 und β_2 sind *nicht* identifiziert (identifizierbar).

Identifizierbarkeit: Ag- und Nf-funktion IIa

Problem 2a:

$Q^S = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u \qquad \alpha_2 > 0$ Angebotsfunktion, S

$Q^D = \beta_1 + \beta_2 P + v \qquad \beta_2 < 0$ Nachfragefunktion, D

$Q^D = Q^S$ Gleichgewichtsbedingung

Es liegt nun zusätzlich eine exogene Variable, Y, vor.

- Es wird zu jedem GGW-Punkt ein zusätzlicher Y Werten beobachtet, (P^*, Q^*, Y). Für jedes Y erhalten wir ein GGW=GGW(Y).
- *Verändert sich* Y, so verschiebt sich S, die Lage von D ändert sich nicht. Dadurch *wird D abgetastet*.
- Die Steigung von D, β_2, ist identifiziert (identifizierbar), aber *nicht* die von S, α_2.

Identifizierbarkeit: Ag- und Nf-Funktion IIb

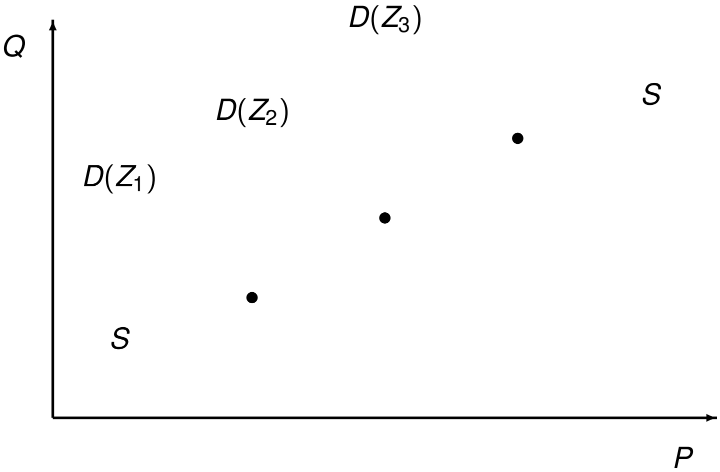
Problem 2b:

$Q^S = \alpha_1 + \alpha_2 P + u$	$\alpha_2 > 0$	Angebotsfunktion, S
$Q^D = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 Z + v$	$\beta_2 < 0$	Nachfragefunktion, D
$Q^D = Q^S$		Gleichgewichtsbedingung

Es liegt zusätzlich eine exogene Variable, Z, vor.

- Es wird zu jedem GGW-Punkt zusätzlich ein Z-Wert beobachtet, (P^*, Q^*, Z).
- *Verändert sich* Z, so verschiebt sich D, die Lage von S ändert sich nicht. Dadurch *wird S abgetastet*.
- Die Steigung von S, α_2, ist identifiziert (identifizierbar), aber *nicht* die von D, β_2.

Identifizierbarkeit: Ag- und Nf-Funktion IIb



• . . . Daten-/GGW-Punkte (P^*, Q^*, Z)

Identifizierbarkeit: Angebots- und Nachfragefunktion III

Problem 3:

$Q^S = \alpha_1 + \alpha_2 P + \alpha_3 Y + u$ $\qquad \alpha_2 > 0$ Angebotsfunktion

$Q^D = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 Z + v$ $\qquad \beta_2 < 0$ Nachfragefunktion

$Q^D = Q^S$ $\qquad$ Gleichgewichtsbedingung

Es liegen nun 2 exogene Variable, Y, Z, vor, je eine in D und S.

- Es werden die Gleichgewichtspunkte mit den zugehörigen Y und Z Werten beobachtet, (P^*, Q^*, Y, Z).
- Verändert sich Y, so verschiebt sich S, wie oben in Problem II. Verändert sich Z, so verschiebt sich D, IIb.
- Y hilft D zu identifizieren, Z analog S.
- Beide Steigungen α_2 und β_2 sind identifizierbar. Das System ist (i.A.) *exakt* identifiziert.

Identifizierbarkeit: Reduzierte Form, IIa

Wir schreiben Modell 2a unter Berücksichtigung der Identität in Matrixform an.

$$\begin{aligned} Q - \alpha_2 P &= \alpha_1 + \alpha_3 Y + u \\ Q - \beta_2 P &= \beta_1 \qquad\quad\;\; + v \end{aligned} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Identifizierbarkeit: Reduzierte Form, IIa

Die **reduzierte Form** beschreibt das Verhalten der endogenen Variablen durch exogene oder predetermined Variablen. D.h. wir multiplizieren mit A^{-1} von links.

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Pi}\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon \\ \eta \end{pmatrix}$$

Die Elemente von $\boldsymbol{\Pi}$ sind

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix}$$

Als einzelne Gleichungen angeschrieben

$$\begin{aligned} Q &= \pi_{11} + \pi_{12}Y + \epsilon \\ P &= \pi_{21} + \pi_{22}Y + \eta \end{aligned}$$

Identifizierbarkeit: Reduzierte Form, IIa

Die π-Koeffizienten als Funktion der α's und β's finden sich in Hackl Bsp 16.3 bzw. 20.11.

β_1 und β_2 können aus den π's eindeutig angegeben werden. Die α's hingegen können *nicht* bestimmt werden.

$$\beta_1 = \pi_{11} - \beta_2 \pi_{21}$$

$$\beta_2 = \pi_{12} / \pi_{22}$$

Die Parameter der 2-ten Gl sind identifiziert.
Die reduzierte Form umfasst nur 4 Koeffizienten, das Modell selbst aber hat 5.

Reduzierte Form und Beobachtungsäquivalenz

Reduzierte Form

Für das Lüdeke-Modell kann man unter Verwendung der Identität ebenfalls eine reduzierte Form in den endogenen Variablen, C, I und M, angeben.
Oft ist aber nur der Verlauf von Y von Interesse. Daher stellt man nur Y in Abhängigkeit der vorherbestimmten Variablen dar.

$$Y_t = \delta_1 + \delta_2 C_{t-1} + \delta_3 P_{t-1} + \delta_4 M_{t-1} + \delta_5 G_t + v_t$$

- Die δ-Koeffizienten bestimmen sich aus den Strukturparametern.
- Umgekehrt lassen sich aber die Strukturparameter nur bei exakter Identifizierbarkeit aus den Koeffizienten der reduzierten Form bestimmen.

Observational equivalence

Beobachtungsäquivalenz bedeutet, dass 2 (Struktur-)Modelle dieselbe reduzierten Form besitzen.

- Z.B. wenn im Lüdeke-Modell ein Teil von G (z.B. Transferzahlungen) auch den Konsum bestimmen, ist die Struktur der reduzierten Form dieselbe.
- Das Problem der observational equivalence tritt - ganz allgemein - bei vielen Modellen auf. Z.B. kann selbst eine (aggregierte) Konsumfunktion als reduzierte Form verschiedener komplexer Konsumentscheidungsmodelle angesehen werden.
- Dies schränkt die Aussagekraft einer empirischen 'Bestätigung' von Modellen erheblich ein.

Übungsbeispiele

- Hackl 16.A.1: 1., 2., 3. und 4.
- B16.1: Alternativ zu Hackl 16.A.1:4, zeigen sie, dass die reduzierte Form von Y aus beiden Varianten des obigen Lüdeke-Modells (mit/ohne Transferzahlung in der Konsumgl) nicht unterscheidbar sind.