Kapitel 15

Instrumentvariablen-Schätzung

Der Sachverhalt

t-te Realisation des Modell $y = X\beta + u$ (Ordnung von X: $n \times k$) wird geschrieben als $Y_t = x_t' \beta + u_t$

Annahme A4: Die Regressoren X_i, $i = 2,\ldots,k$ sind exogen (X sind hier stochastisch)

d.h., dass alle X_{ti} für alle t unkorreliert sind mit der aktuellen Störgröße u_t (keine kontemporäre Korrelation) und mit allen vergangenen und künftigen u_s, $s \neq t$ (keine intertemporäre Korrelation)

In der Realität trifft diese Annahme nicht immer zu; siehe die folgenden Beispiele

Bsp: Konsumfunktion, Endogenität Simultanität

$$C = \beta_1 + \beta_2 Y + u$$

Y: Einkommen mit Komponenten

- Konsum
- Investitionen, Ausgaben der Öffentlichen Hand, etc.

$Y = C + R$ (R umfasst alle Einkommenskomponenten außer Konsum)

$$\text{Cov}\{Y,u\} = \text{Cov}\{C,u\} + \text{Cov}\{R,u\} = \text{Cov}\{(\beta_1 + \beta_2 Y + u),u\}$$
$$= \beta_2 \text{Cov}\{Y,u\} + \sigma^2$$

$$Cov\{Y,u\} = \frac{\sigma^2}{1-\beta_2}$$

wenn R mit u unkorreliert ist. *Y und u sind korreliert !*

Bsp: Regressor mit Messfehler

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u \qquad \text{wahres Modell}$$

Wenn Regressor X nur mit Messfehler beobachtet werden kann: X^* *… beobachtet*

$$X^* = X + \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ Weißes Rauschen mit Varianz } \sigma_e^2$$

Statt $Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$ wird

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^* + v \quad \textit{geschätzt.}$$

mit $v = u - \beta_2 \varepsilon$; es gilt

$$\mathrm{Cov}\{X^*,v\} = \mathrm{Cov}\{X^*,u\} - \beta_2\mathrm{Cov}\{X^*,\varepsilon\} = - \beta_2\mathrm{Cov}\{\varepsilon,\varepsilon\} \neq 0$$

Der tatsächlich verwendete Regressor X^* ist mit der effektiven Störgröße v kontemporär korreliert.

Beispiel: Dynamische Regression

Y wird durch eigene Vergangenheit beschrieben:

$$Y_t = \alpha + \varphi Y_{t-1} + u_t$$

Y_{t-1} ist unkorreliert mit u_t

- keine kontemporäre, aber intertemporäre Korrelation: Y_{t-1} ist mit u_{t-1} korreliert
- wenn *u* kein Weißes Rauschen ist, sondern eine Abhängigkeitsstruktur hat, z.B. ein AR(1)-Prozess, ist Y_{t-1} auch mit u_{t-1} korreliert. Es liegt dann kontemporäre <u>und</u> intertemporäre Korrelation vor.

Beispiel: Mehrgleichungs-Modell

Ökonomische Phänomene werden meist durch das Verhalten von mehr als nur einer abhängigen Variablen charakterisiert.

Zur Beschreibung werden mehr als eine Modellgleichung – mit je einer Störgröße – benötigt

Typischerweise

- sind die Störgrößen der verschiedenen Gleichungen kontemporär korreliert
- treten abhängige Variable als Regressoren auf

Daher gibt es typischerweise Regressoren, die mit den Störgröße korreliert sind.

Bei dynamischen Komponenten: intertemporäre Korrelation

Fragestellungen

Annahme A4: Regressoren X_i, $i = 2,\ldots,k$ sind exogen

Wenn die Annahme A4 nicht zutrifft:

- Was sind die Konsequenzen?
- Wie kann herausgefunden werden, ob die Annahme A4 verletzt ist?
- Wie können nachteilige Konsequenzen vermieden werden?

Instrumentvariablen-Schätzung, ist ein Verfahren zum Vermeiden der Konsequenzen von nicht zutreffender Exogenität

Nicht-exogene Regressoren: Konsequenzen

Modell $y = X\beta + u$ mit Weißem Rauschen u

OLS-Schätzer $b = \beta + (X'X)^{-1}X'u$ siehe CWS11-F7/1

$$E\{b\} = \beta + E\{(X'X)^{-1}X'u\}$$

Trifft Annahme 4 zu, ist $E\{(X'X)^{-1}X'u\}$ ein Null-Vektor

Trifft Annahme 4 nicht zu,

- dann ist $E\{(X'X)^{-1}X'u\}$ von einem Null-Vektor verschieden,
- OLS-Schätzer b sind *verzerrt*
- Bias von b ist $E\{(X'X)^{-1}X'u\}$; seine Komponenten sind schwierig abzuschätzen

Nicht-exogene Regressoren x
Konsequenzen: Asymptotik

Annahme A3 sei erfüllt: $\text{plim}\,(n^{-1}X'X)^{-1} = Q$, mit nicht-singulärer Matrix Q

$$\text{plim}\{b\} = \beta + \text{plim}(n^{-1}X'X)^{-1}\text{plim}(n^{-1}X'u)$$

Konsistenz hängt vom Vektor $q = \text{plim}(n^{-1}X'u)$ ab:

- Gilt $q = 0$ (sind Regressoren X und u asymptotisch unkorreliert): OLS-Schätzer b ist auch bei nicht-exogenen Regressoren konsistent
- Gilt $q \neq 0$ (sind die Störgrößen mit mindestens einem Regressor asymptotisch korreliert): $\text{plim}\{b\} \neq \beta$, sind die OLS-Schätzer b nicht konsistent

Nicht-exogene Regressoren: Konsequenzen, Forts.

Trifft die Annahme A4 nicht zu:

- es muss mit *verzerrten* OLS-Schätzern gerechnet werden
- der Bias verschwindet nur dann mit n gegen unendlich, wenn die Korrelation zwischen den Regressoren und den Störgrößen gegen Null geht.

Konsumfunktion

Daten: Jahresdifferenzen der logarithmierten Zeitreihen PCR (Privater Konsum) und PYR (Verfügbares Einkommen der Haushalte) aus der AWM-Datenbasis (1970:1 bis 2003:4)

(0) Angepasstes Modell

$$\hat{C} = 0.011 + 0.718\, Y$$

Mit $t = 15.55$, $R^2 = 0.65$, $DW = 0.50$

(1) Achtung! Das Einkommen Y in $C = \beta_1 + \beta_2 Y + u$

ist wegen $Y = C + R$ (R umfasst alle Einkommenskomponenten außer Konsum) möglicherweise mit den Störgrößen korreliert

Konsumfunktion, Forts.

(2) Alternativer Regressor: Anstelle Y_t wird das Einkommen Y_{t-1} der Vorperiode verwendet

- Y_{t-1} und u_t sind i.A. unkorreliert: Die beiden Größen werden in unterschiedlichen Perioden realisiert
- Y_{t-1} wird mit Y_t i.A. sehr hoch korreliert sein, ist daher ein fast so guter Regressor wie Y_t selbst

Ad hoc korrigiertes Modell

$$\hat{C} = 0.012 + 0.660\, Y_{-1}$$

mit $t = 12.86$, $R^2 = 0.56$, DW = 0.79

Verschlechterungen von t und R^2 sind Preis für mögliche Verbesserung des Schätzers

IV-Schätzer: Die Idee

Instrumentvariablen-Schätzer (IV-Schätzer):

Ersetzen von mit den Störgrößen korrelierten Regressoren durch andere Regressoren, die

- mit den Störgrößen nicht korreliert sind
- mit den zu ersetzenden Regressoren hoch korreliert sind (andernfalls werden sie nicht zur Erklärung beitragen)

Man hofft, dass der IV-Schätzer nicht oder weniger verzerrt ist als der OLS-Schätzer

Preis: schlechtere Modellanpassung (z.B. *t* –Statistiken, R^2)

Instrumente

x

Modell $y = X\beta + u$ mit Weißem Rauschen u, X: *n* x *k* Matrix

W: *n* x *k* Matrix mit *k* erzeugenden Variablen oder Instrumenten; Eigenschaften:

1. $\text{plim}(n^{-1}W'u) = 0$
2. $\text{plim}(n^{-1}W'X) = Q_{wx}$, $\text{rang}(Q_{wx}) = k$
3. $\text{plim}(n^{-1}W'W) = Q_{w}$, $\text{rang}(Q_{w}) = k$

D.h., die Variablen aus W sind

1. asymptotisch unkorreliert mit u,
2. asymptotisch korreliert mit den Regressoren in X;
3. für Variablen aus W gilt eine Bedingung analog zu Annahme A3 für X

IV-Schätzer

auch Instrumentvariablen- oder Hilfsvariablen-Schätzer für β aus y = Xβ + u mit Weißem Rauschen *u*:

$$\tilde{b} = (W'X)^{-1}W'y$$

Verallgemeinerter IV-Schätzer (GIV-Schätzer)

- Matrix W der Instrumente hat Ordnung n x p, $p \geq k$
- OLS-Schätzer für X aus Regression der Spalten von X auf W:
  $$\hat{X} = W(W'W)^{-1}W'X = P_w X$$
  mit Projektionsmatrix P_w
- GIV-Schätzer: $\tilde{b} = (\hat{X}'\hat{X})^{-1}\hat{X}'y$
- GIV- und IV-Schätzer sind ident, wenn $p = k$

IV-Schätzer: Eigenschaften

- IV-Schätzer sind konsistent
- Kovarianzmatrix ist bei großem n näherungsweise

  $$\tilde{\sigma}^2(\hat{X}'\hat{X})^{-1}$$

  die geschätzte Varianz der Störgrößen wird bestimmt auf Basis der IV-Residuen

  $$\tilde{e} = y - X\tilde{b}$$

- IV-Schätzer sind nicht effizient
- IV-Schätzer sind asymptotisch normalverteilt; bei großem *n* ist die näherungsweise Verteilung

  $$N[\beta, \sigma^2(\hat{X}'\hat{X})^{-1}]$$

IV-Schätzer: Berechnung

2-stufiges Verfahren

1. Berechnung der Approximation von X durch Regression jeder Spalte aus X auf W (Instrumente)

$$\hat{X} = P_w X = W(W'W)^{-1}W'X$$

2. Regression von y auf $\hat{X}$ gibt die GIV- oder IV-Schätzer

$$\tilde{b} = (\hat{X}'\hat{X})^{-1}\hat{X}'y = (X'P_w X)^{-1}X'P_w y$$

durch OLS-Anpassung

Voraussetzung: Rang(W)=$p \geq k$ (Ordnungsbedingung)

Konstruktion von W:

- Wahl (≥1) Instrumente für jeden nicht-exogenen Regressor
- Ergänzen der Spalten von W mit exogenen Variablen

IV-Residuen

x

Definiert als

$$\tilde{e} = y - X\tilde{b}$$

Davon zu unterscheiden sind die Residuen der 2. Stufe zum Berechnen der IV-Schätzer:

$$e = y - \hat{X}\tilde{b}$$

Zum Beurteilen der Modellanpassung (*t*-Statistik, R^2, etc.) sind die IV-Residuen zu verwenden!

IV-Schätzer: Die Schritte

(0) Modell spezifizieren: $y = X\beta + u$

(1) Feststellen, ob X mit u korreliert. Wenn ja.

(2) Wahl von Instrumenten (exogene Variable) für X: W
Anzahl der Instrumente ≥ Anzahl der X Variablen

(3) 2-stufiges Verfahren:
(3a) X auf W regressieren: X = W ☝ + u mit $\hat{X} = W\hat{\Gamma}$
(3b) Im Modell X durch $\hat{X}$ ersetzen

(4) b_{IV} aus $y = \hat{X}b + e$ (OLS)

(5) IV-Modell: $y = X\, b_{IV} + e$

Konsumfunktion, Forts.

Das Ausgangs-Modell - (0) - ist

$$\hat{C} = 0.011 + 0.718\ Y$$

mit $t = 15.55$, $R^2 = 0.65$, DW = 0.50 . Alternativ erhält man

$$\hat{C} = 0.012 + 0.660\ Y_{-1}$$

mit $t = 12.86$, $R^2 = 0.56$, DW = 0.79.

Mit dem Instrument Y_{-1} - (1), (2) - ergibt sich (erste Stufe) (3a)

$$\hat{Y} = 0.002 + 0.885\ Y_{-1} \quad \text{mit} \quad t = 22.62,\ R^2 = 0.80$$

Die zweite Stufe - (3b), (4), (5) - gibt

$$\hat{C} = 0.010 + 0.746\ \hat{Y}$$

mit $t = 14.22$, $R^2 = 0.64$, DW = 0.51 .

Das ist das nach der IV-Methode geschätzte Modell.

Praxis der IV-Schätzung

Welche Instrumente sollen gewählt werden?

- Variable, welche die ökonomische Theorie nahe legt
- die verzögerte, abhängige Variable Y_{-1}, wenn die Störgrößen nicht seriell korreliert sind
- an Stelle einer bestimmten Variablen
  - die Ränge ihrer nach steigenden Werten sortierten Beobachtungen oder
  - die Variable mit dem Wert „-1“ für Beobachtungen mit Werten kleiner als der Median und mit „+1“ für Werte größer als der Median

Preis für die Konsistenz des IV-Schätzers ist seine geringere Effizienz

Bewertung von Regressoren

Tests zum Beurteilen der Voraussetzungen der IV-Schätzung

- Hausman-Wu-Test dient zum Prüfen der Exogenität von Regressoren
- Sargan-Test dient zum Prüfen der Eignung von Variablen als Instrumente

Modell 0: $y = Y_1\alpha + Z\beta + u$ $\quad S_0, \tilde{\sigma}_0^{\,2}$

Modell 1: $y = Y_1\alpha + Z\beta + \hat{Y}_1\alpha_1 + v$ $\quad S_1$

Y_1 ist möglicherweise mit u korreliert. Z ist exogen.

$\hat{Y}_1$ ist Y_1 durch geeignete Instrumente approximiert.

Hausman-Wu-Test

H_0: Cov(Y_1,u) = 0

Modell 0 ist korrekt: OLS unverzerrt, effizient

Modell 1 überspezifiziert: OLS unverzerrt

(durch $\hat{Y}_1$)

H_1: Cov(Y_1,u) ≠ 0

Modell 0: OLS gibt verzerrte Schätzer für α (und β)

Modell 1 überspezifiziert: OLS unverzerrt

(durch Y_1)

Hausman-Wu-Test

Im Modell $y = Y_1\alpha + Z\beta + u$ mit Weißem Rauschen u soll geprüft werden, ob die *r* Regressoren aus Y_1 exogen sind (H_0)

Teststatistik:

$$T^{HW} = \frac{S_0 - S_1}{\tilde{\sigma}_0^{\,2}}$$

- S_0: Summe der quadrierten OLS-Residuen
- S_1: Summe der quadrierten IV-Residuen der Regression, bei der das Modell um die Spalten der Hilfsvariablen $\hat{Y}_1$ erweitert ist

Unter H_0 folgt T^{HW} näherungsweise der $\chi^2(r)$-Verteilung.

Konsumfunktion, Forts.

Das Ausgangs-Modell ist

$$\hat{C} = 0.011 + 0.718\ Y$$

mit t = 15.55, R^2 = 0.65, DW = 0.50 Die Summe der quadrierten Residuen ist S_0 = 0.01006 und die geschätzte Varianz der Störgrößen ist 0.0088^2.

Das Erweitern des Modells um die Instrumentvariable $\hat{Y}$ aus

$\hat{Y} = 0.002 + 0.885 Y_{-1}$ gibt

$$\hat{C} = 0.010 + 0.583 Y + 0.164 \hat{Y}$$

mit S_1 = 0.00988

Hausman-Wu-Test: $T^{HW} = (0.01006-0.00988)/0.0088^2 = 2.32$

Der p-Wert = 0.13. Y kann als exogen angesehen werden.

Sargan-Test

x

Damit kann überprüft werden, ob die Variablen aus W

- mit den Störgrößen (asymptotisch) unkorreliert
- mit den nicht-exogenen Regressoren (asymptotisch) korreliert sind.

Teststatistik:

$$T^S = \frac{\tilde{e}' P_w \tilde{e}}{\tilde{\sigma}^2}$$

mit der Projektionsmatrix $P_w = W(W' W)^{-1}W'$.

Unter H_0 folgt T^S näherungsweise der $\chi^2(p\text{-}k)$-Verteilung.