Kapitel 14

Trends und *Unit-root*-Tests

Trends

Trend: Der Erwartungswert eines Prozesses Y_t nimmt mit Fortschreiten der Zeit zu (oder ab)

Deterministischer Trend: ist eine Funktion $f(t)$ der Zeit, die den Erwartungswert von Y beschreibt:

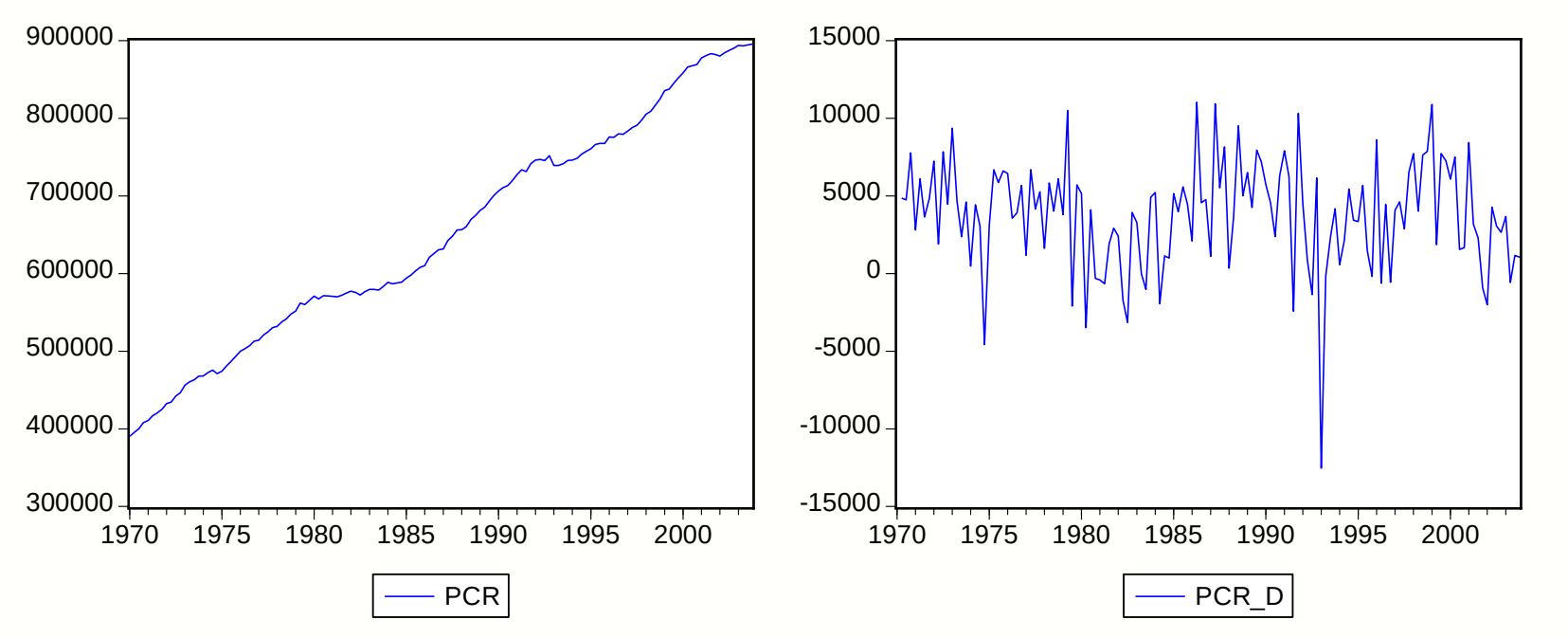
$$Y_t = f(t) + u_t \text{ mit Weißem Rauschen } u_t$$

Beispiel: das Modell $Y_t = \alpha + \beta\, t + u_t$ für Y nennt man linearer Trend; ein steigender Trend entspricht $\beta > 0$

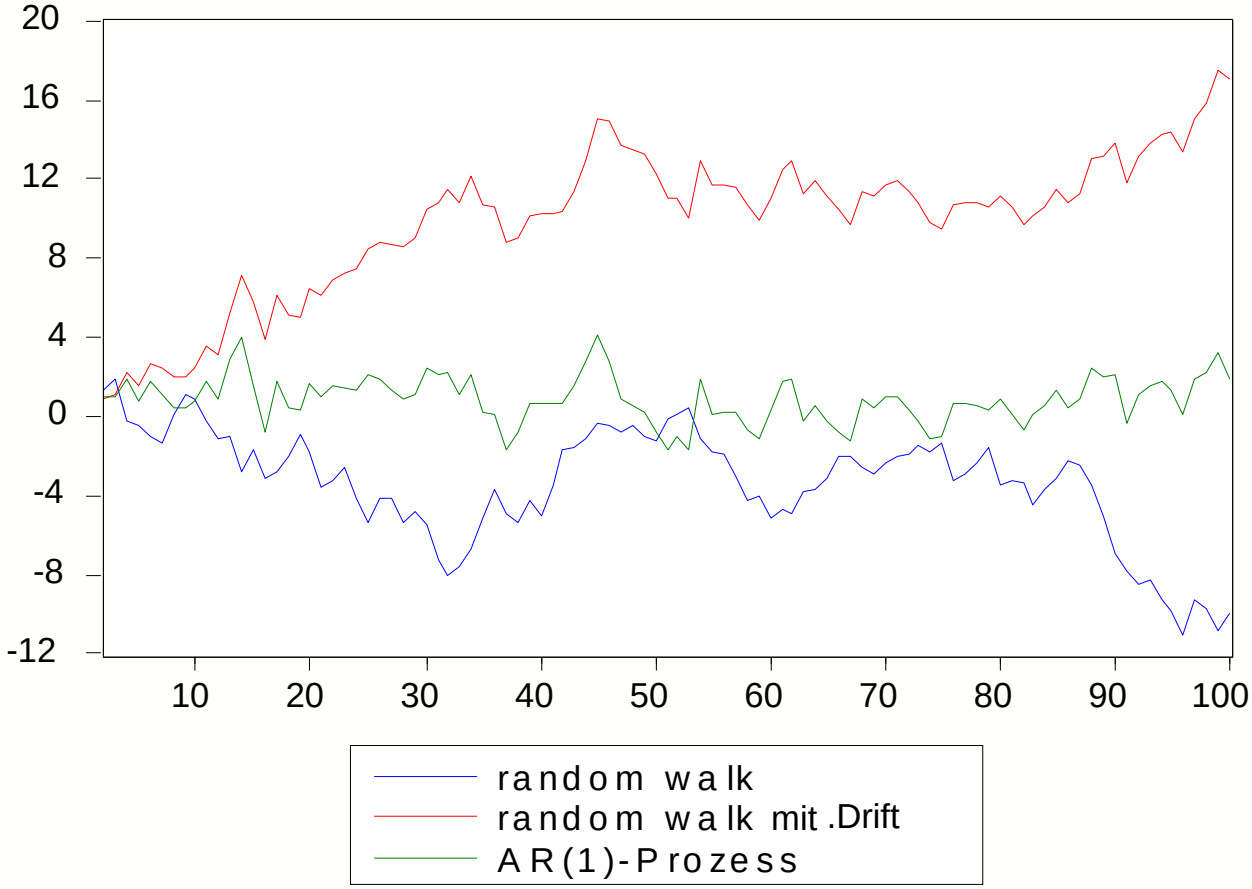
Stochastischer Trend: Das Modell $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$ oder $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \delta + u_t$ mit Weißem Rauschen u_t beschreibt ein irreguläres oder zufälliges Fluktuieren der Differenzen ΔY_t um den Erwartungswert δ; Y_t folgt einem ***random walk* mit Drift**

Konsumfunktion

Privater Konsum, AWM-Datenbasis; Niveauwerte (PCR) und erste Differenzen (PCR_D)



Trends: Random walk und AR-Prozess



Random walk mit Drift

Das Modell $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$ kann geschrieben werden als

$$Y_t = Y_0 + \delta\, t + \Sigma_{i \le t} u_i$$

δ: Drift

Komponenten des Prozesses:

- Deterministischer Wachstumspfad $Y_0 + \delta\, t$
- Kumulierte Störgrößen $\Sigma_{i \le t} u_i$

Eigenschaften:

- Erwartungswert $Y_0 + \delta\, t$ ist nicht konstant!
- $\mathrm{Var}\{Y_t\} = \sigma^2\, t$ wird beliebig groß!
- $\mathrm{Corr}\{Y_t, Y_{t-k}\} = \sqrt{(1-k/t)}$
- Nicht-stationär

Random walk mit Drift, Forts.

Aus $\mathrm{Corr}\{Y_t, Y_{t-k}\} = \sqrt{(1-k/t)}$ folgt:

- Für fixes k sind Y_t und Y_{t-k} umso stärker korreliert, je größer t
- Mit wachsendem k geht Korrelation gegen Null, aber umso langsamer, je größer t (*long memory property*)

Vergleich von *random walk* mit AR(1)-Prozess

$$Y_t = \delta + \varphi Y_{t-1} + u_t$$

- Bei AR(1)-Prozess fallen die Gewicht von u_{t-i} mit i
- Bei φ nahe bei Eins ist ähnlicher Verlauf des AR(1)-Prozesses zu erwarten wie bei *random walk*

Nicht-Stationarität: Konsequenzen

AR(1)-Prozess $Y_t = \varphi Y_{t-1} + u_t$ mit Weißem Rauschen u

OLS-Schätzer für φ:

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_t Y_t Y_{t-1}}{\sum_t Y_t^2}$$

- Für $|\varphi| < 1$:
  - konsistent
  - Asymptotisch normalverteilt
- Für $\varphi = 1$:
  - φ wird unterschätzt
  - Schätzer nicht normalverteilt
  - *spurious regression* Problem bei 2 nicht-stat. Proz.

Spurious Regression

Y_t sei ein *random walk* ohne Drift (wahres Modell):

$Y_t = Y_{t-1} + u_t$ mit Weißem Rauschen u

- Y_t ist ein nicht-stationärer Prozess; stochastischer Trend
- Varianz von Y_t ist Vielfaches von t

wird modelliert als (misspezifiziertes) Modell: $Y_t = \alpha + \beta t + v_t$

- Deterministischer Trend
- Konstante Fehlervarianz

Was kann für den OLS-Schätzer für β erwartet werden?

Spurious Regression, Forts.

Modellierung eines stochastischen Trends $Y_t = Y_{t-1} + u_t$ durch einen deterministischen Trend $Y_t = \alpha + \beta\, t + v_t$

- Verteilungen der *t*- und *F*-Statistiken sind nicht die *t*- und *F*-Verteilung; kritische Schranken sind wesentlich größer!
- Nullhypothese wird im *t*-Test zu oft verworfen!
- Bestimmtheitsmaß liegt bei etwa 0.45 (n=100), obwohl Y_t ein *random walk* ohne Drift!

Regression von Y_t auf einen anderen, unabhängigen *random walk* X_t:

- Testverteilungen sind nicht *t* und *F*.
- R^2 ist zu groß ! [Granger & Newbold (1974)]

Modelle für Variable mit Trend

Liegt ein deterministischer Trend $Y_t = \alpha + \beta\, t + u_t$ vor

- wird Y_t im Niveau modelliert $Y_t = \alpha + \beta\, t + u_t$
- Modellieren in 1.Differenzen $\Delta Y_t = \beta + v_t$ hat auto-korrelierte Störgrößen v_t zur Folge

  (Schätzer sind unverzerrt, konsistent, HAC-Korrektur, asymptotisch normal verteilt)

Liegt ein RW vor $Y_t = Y_{t-1} + u_t$

fehlerhafter Entscheidungen, Varianz wird unterschätzt

- wird Y_t in der 1.Differenz modelliert $\Delta Y_t = \beta + u_t$

  u_t ist nicht autokorreliert, und hat konstante Varianz

Modelle für Variable mit Trend

Der *unit-root*-Test hilft beim Entscheiden, welche Spezifikation korrekt ist.

- Stationärer Prozess
- Random walk (stoch. Trend)
- Deterministischer Trend

Eliminieren von Trends

Eliminieren eines Trends kann Stationarität herbeiführen.

- Trend-stationärer Prozess: der Prozess kann durch Subtrahieren eines deterministischen Trends in einen stationären Prozess übergeführt werden.
- Differenz-stationärer Prozess oder integrierter Prozess: stationärer Prozess kann durch das Bilden von Differenzen abgeleitet werden.

Ein stochastischer Prozess Y heißt

- integriert von der Ordnung Eins, wenn die ersten Differenzen einen stationären Prozess ergeben: $Y \sim I(1)$
- integriert von der Ordnung d, wenn die d-fachen Differenzen einen stationären Prozess ergeben: $Y \sim I(d)$

Eliminieren von Trends: Beispiele

Random walk $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$ mit Weißem Rauschen u:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \delta + u_t$$

ist ein stationärer Prozess; ein *random walk* ist ein differenzen-stationärer oder integrierter Prozess der Ordnung eins

Linearer Trend $Y_t = \alpha + \beta\, t + u_t$ besteht aus einem linearen Trend und Weißem Rauschen; Subtrahieren der Trendkomponente $(\alpha + \beta t)$ liefert einen stationären Prozess; Y_t ist ein trend-stationärer Prozess

Integrierte stochastische Prozesse

Random walk $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$ mit Weißem Rauschen u ist integriert von der Ordnung eins

Viele ökonomische Zeitreihen zeigen stochastische Trends; aus der AWM-Datendasis:

	Variable	*d*
YER	Brutto-Inlandsprodukt, real	1
PCR	Privater Konsum, real	1-2
PYR	Verf. Einkommen der HH, real	1-2
PCD	Konsumdeflator	2

ARIMA(p,d,q)-Prozess: d-te Differenzen folgen einem ARMA(p,q)-Prozess

Unit-root-Test

AR(1)-Prozess $Y_t = \varphi Y_{t-1} + u_t$ mit Weißem Rauschen u

OLS-Schätzer für φ:

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_t Y_t Y_{t-1}}{\sum_t Y_t^2}$$

- Verteilung von (sprich „Tau“)

$$\tau = \frac{\hat{\varphi} - \varphi}{se(\hat{\varphi})}$$

- $|\varphi| < 1$: näherungsweise $t(n\text{-}1)$
- $\varphi = 1$: Perzentile nach Dickey & Fuller

DF-Test zum Testen von H_0: $\varphi = 1$ gegen H_1: $\varphi < 1$

$\varphi = 1$: das charakterist. Polynom hat die Wurzel eins

Dickey & Fuller Perzentile

Monte Carlo geschätzt nach Fuller (1976)

n		$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.10$
25	τ	-2.66	-1.95	-1.60
	τ_μ	-3.75	-3.00	-2.63
	τ_τ	-4.38	-3.60	-3.24
100	τ	-2.60	-1.95	-1.61
	τ_μ	-3.51	-2.89	-2.58
	τ_τ	-4.04	-3.45	-3.15
N(0,1)		-2.33	-1.65	-1.28

DF-Test

AR(1)-Prozess: $Y_t = \varphi Y_{t-1} + u_t$ (auf beiden Seiten $-Y_{t-1}$)

oder $\Delta Y_t = (\varphi-1)Y_{t-1} + u_t = \delta Y_{t-1} + u_t$

DF-Test testet H_0: $(\varphi-1) = 0$ gegen H_1: $(\varphi-1) < 0$

bzw. H_0: $\delta = 0$ gegen H_1: $\delta < 0$

bzw. H_0: $\varphi = 1$ gegen H_1: $\varphi < 1$

Teststatistik: $\tau = d/\mathrm{se}(d)$

mit $d = \hat{\varphi} - 1$ und $\mathrm{se}(d) = \mathrm{se}(\hat{\varphi})$

DF-Test: Das Verfahren

Zwei Schritte:

1. Regression von ΔY_t auf Y_{t-1} . Schätzen mit OLS.

   $$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$$

   OLS-Schätzer d für δ

2. Test von H_0: $\delta = 0$ gegen H_1: $\delta < 0$

   Teststatistik (t-Test): $\tau = d/\mathrm{se}(d)$

   Kritische Werte aus der Tabelle

DF-Test: Erweiterungen

DF-Test für Modell mit Interzept:

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + u_t$$

DF-Test für Modell mit Interzept und Trend:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta\, t + \delta Y_{t-1} + u_t$$

DF-Test testet H_0: $\delta = 0$ gegen H_1: $\delta < 0$

Teststatistik: $\tau_\mu = d/\mathrm{se}(d)$ (Modell mit Interzept)

$\tau_\tau = d/\mathrm{se}(d)$ (Modell mit Interzept u Trend)

Kritische Werte aus Tabelle. Verteilungen sind unterschiedlich.

ADF-Test: Augmented DF-Test

Erweitertes Modell entsprechend einem AR(p)-Prozess

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \beta_p \Delta Y_{t-p} + u_t$$

Test von H_0: $\delta = 0$ gegen H_1: $\delta < 0$

Zwei Schritte:

1. Regression von ΔY_t auf Y_{t-1} und $\Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-p}$:
   OLS-Schätzer d für δ
2. Test von H_0: $\delta = 0$ gegen H_1: $\delta < 0$
   Teststatistik $\tau = d/\mathrm{se}(d)$
   Kritische Werte aus Tabelle

Wahl von p automatisch mit AIC oder SBC.

Erweiterungen analog zum DF-Test

Weitere Verfahren

Phillips-Perron-Test

- Alternatives Verfahren zum ADL-Test
- Teststatistik *d*/se(*d*) mit HAC-korrigiertem se(d)

Verfahren von Perron

- Mehrstufiges Verfahren für $\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \delta Y_{t-1} + u_t$
- Schränkt das Modell mehr und mehr ein
- Siehe Abschnitt 14.5.1