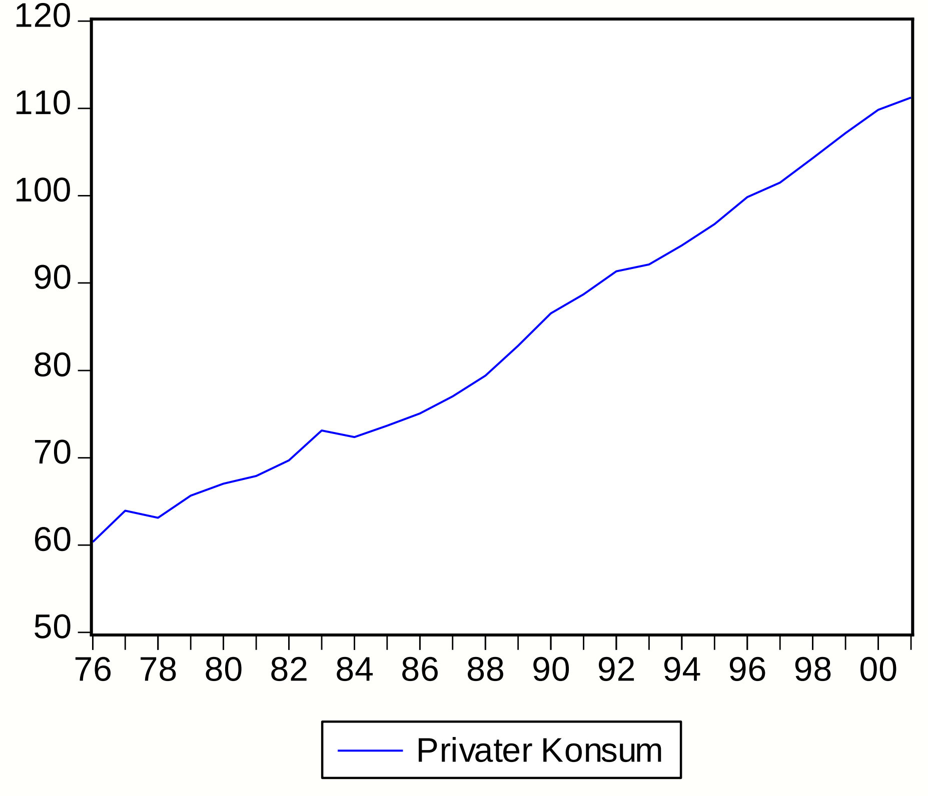
Kapitel 13

# Zeitreihen und Zeitreihen-Modelle

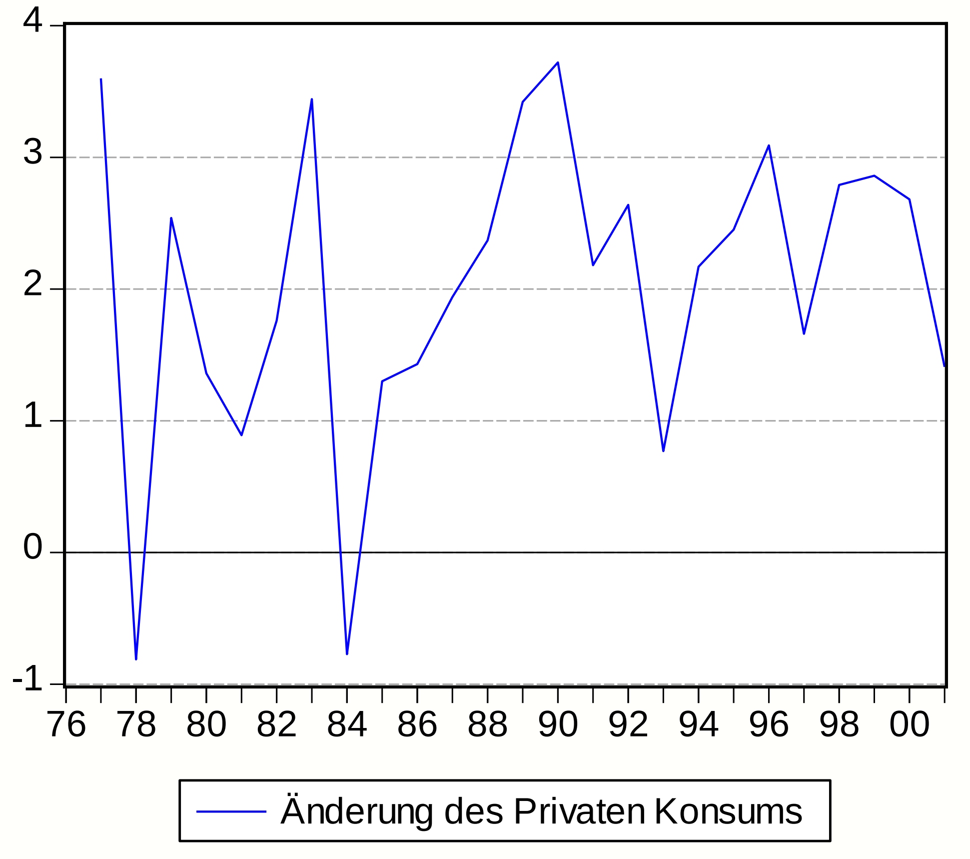
# Privater Konsum

Privater Konsum,
Ö, Mrd.EUR,
in Preisen von 1995



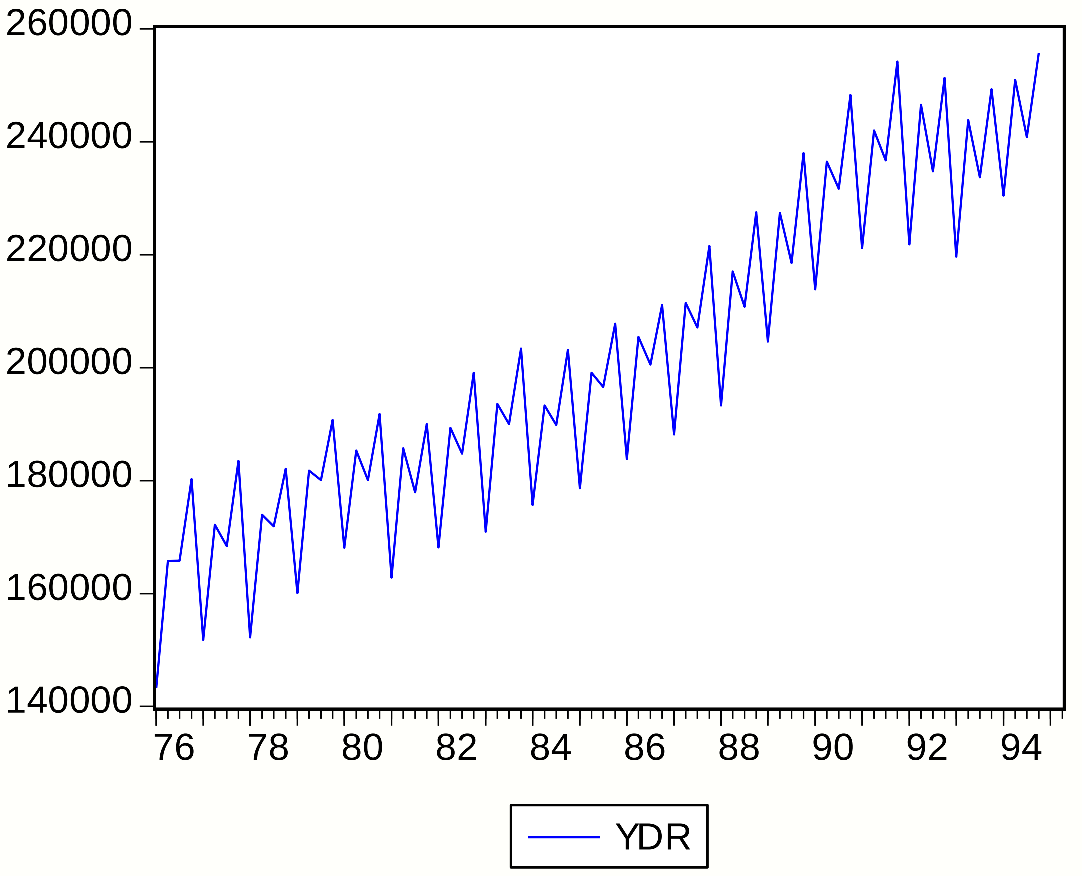
# Privater Konsum, Forts.

Änderung des Privaten Konsums, Mrd.EUR, in Preisen von 1995



# Persönlich verfügbares Einkommen

Persönlich verfügbares Einkommen, Ö, Quartalsdaten



# Zeitreihe

Ist eine zeitlich geordnete Folge von Beobachtungen einer Zufallsvariablen

Beispiele:

- Jährliche Werte des Privaten Konsums
- Änderungen der Ausgaben für Privaten Konsum
- Quartalswerte des persönlich verfügbaren Einkommens
- Monatliche Werte der Importe

Notation: Zufallsvariable $Y$

Folge von Beobachtungen: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$

Zeitreihe wird auch als Realisation eines stochastischen Prozesses aufgefasst

# Komponenten einer Zeitreihe

Komponeten oder Charakteristika einer Zeitreihe sind

- Trend
- Saisonalität
- Irreguläre Fluktuationen

Modell einer Zeitreihe soll die Charakteristika möglichst gut repräsentieren

- Darstellung der Zeitreihe
- Prognose (Extrapolation)

Beispiel: $Y_t = \beta t + \Sigma_i \gamma_i D_{it} + u_t$

mit $D_{it} = 1$ wenn $t$ das $i$-te Quartal

zum Beschreiben der Entwicklung des persönlichen Einkommens

# Stochastischer Prozess

Ist eine Folge von Zufallsvariablen $Y_t$:

$\{Y_t, t = 1, ..., n\}$

$\{Y_t, t = -\infty, ..., \infty\}$

Gemeinsame Verteilung der $Y_1, ..., Y_n$:

$p(y_1, ...., y_n)$

Für viele Fragestellungen: wesentliches Charakteristikum von $p(.)$ ist der Verlauf des Erwartungswertes $\mu_t = E\{Y_t\}$

Beispiel: Extrapolieren einer Zeitreihe zum Zweck der Prognose

# Stationarität

Stationarität eines stochastischen Prozesses: Eigenschaft der gemeinsamen Verteilung, insbesondere

- der Varianzen Var$\{Y_t\}$ und
- der Kovarianzen Cov$\{Y_t, Y_{t+k}\}$

Kovarianz-Funktion:

$$\gamma_{t,k} = \mathrm{Cov}\{Y_t, Y_{t+k}\}, k = 0, \pm 1, \ldots$$

Eigenschaften:

$$\gamma_{t,k} = \gamma_{t,-k}$$

$$\gamma_{t,0} = 1$$

Schwach stationärer Prozess:

E$\{Y_t\} = \mu$ für alle $t$

Cov$\{Y_t, Y_{t+k}\} = \gamma_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ für alle $t$ und alle $k$

auch kovarianz-stationärer Prozess

# AC- und PAC-Funktion

*Autokorrelations-Funktion* (AC-Funktion) ist von Skalierung von *Y* unabhängig; für stationären Prozess:

$$\rho_k = \gamma_k/\gamma_0, \quad k = ..., -1, 0, +1, \ldots$$

Eigenschaften: $|\rho_k| \le 1$

$\rho_k = \rho_{-k}$

$\rho_0 = 1$

*Korrelogramm:* graphische Darstellung der AC-Funktion

*Partielle Autokorrelations-Funktion* (PAC-Funktion):

- $\phi_{kk} = \mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k} | Y_{t-1},\ldots,Y_{t-k+1}), \quad k = ..., -1, 0, +1, \ldots$

$\phi_{kk}$ ergibt sich aus $Y_t = \phi_{k0} + \phi_{k1} Y_{t-1} + \ldots + \phi_{kk} Y_{t-k}$

*Partielles Korrelogramm*: graphische Darstellung der PACF

# AC- und PAC-Funktion, Forts.

Beispiel: Weißes Rauschen

$\rho_k = \phi_{kk} = 1$, wenn $k = 0$,

$\rho_k = \phi_{kk} = 0$, wenn $k \neq 0$,

Schätzen der AC- und PAC-Funktion:

Schätzer für $\rho_k$:

$$r_k = \frac{\sum_t (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_t (y_t - \bar{y})^2}$$

Schätzer für $\phi_{kk}$ ergibt sich als Koeffizient von $Y_{t-k}$ aus Regression von $Y_t$ auf $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-k}$

# AR(1)-Prozess

$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t,$ $\varepsilon_t$ Weißes Rauschen

Alternative Darstellung:

$Y_t = \Sigma_i \varphi^i \varepsilon_{t-i}$

Ist $|\varphi| < 1$ ergibt sich

$$Cov\{Y_t, Y_{t-k}\} = \varphi^k \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$

$|\varphi| < 1$ nennt man die *Stationaritäts-Bedingung.*

AC-Funktion: $\rho_k = \varphi^k$, $k = 0, 1, \ldots$

PAC-Funktion: $\phi_{11} = \varphi$, $\phi_{kk} = 0$ für $k > 1$

# AR($p$)-Prozess

$$Y_t = \alpha + \varphi_1 Y_{t-1} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t$ Weißes Rauschen

Lag-Operator L: verschiebt den Laufindex um eine Periode

$$LY_t = Y_{t-1}$$

Es gilt: $L^s Y_t = Y_{t-s}$ und im Speziellen $L^0 Y_t = Y_t$

AR(p)-Prozess:

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \ldots - \varphi_p Y_{t-p} = (1 - \varphi_1 L - \ldots - \varphi_p L^p) Y_t = \alpha + \varepsilon_t$$

oder kurz

$\Phi(L) Y_t = \alpha + \varepsilon_t$ mit dem Lag-Polynom $\Phi(L)$

# AR($p$)-Prozess

Stationaritäts-Bedingung:

Für die $p$ Wurzeln $z_i$ des Charakteristischen Polynoms

$$\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p$$

muss gelten:

$$|z_i| > 1, \quad i = 1, \ldots, p$$

*Man sagt die Wurzeln (Nullstellen) liegen außerhalb des Einheitskreises.*

# AR($p$)-Prozess, Forts.

Für stationäre AR(p) Prozesse gilt:

AC-Funktion: fällt geometrisch ab

PAC-Funktion: $\phi_{kk} = 0$ für $k > p$

Sie bricht nach der Ordnung p ab.

Die Kenntnis der Form der AC- und PAC-Funktionen hilft beim Identifizieren der Ordnung des Prozesses.

# MA(1)-Prozess

$$Y_t = \alpha + u_t - \theta u_{t-1} = \alpha + \Theta(L)u_t$$

$u_t$ Weißes Rauschen

AR(∞)-Darstellung:

$$Y_t = \alpha/(1-\theta) + u_t + \Sigma_i \theta^i Y_{t-i}$$

setzt voraus, dass $|\theta| < 1$ (Invertierbarkeits-Bedingung)

Eigenschaften des MA(1)-Prozesses:

- Der Prozess ist für alle $\alpha$ und $\theta$ stationär
  - $E\{Y_t\} = \alpha$, $Var\{Y_t\} = \sigma^2(1+\theta^2)$, $\gamma_1 = \sigma^2\theta$, $\gamma_2 = 0$
- AC-Funktion: $\rho_1 = -\theta/(1-\theta^2)$, $\rho_k = 0$ für $k > 1$
- PAC-Funktion: exponentiell abnehmend, wenn $\theta > 0$, sonst alternierend, exponentiell abnehmend

# MA($q$)-Prozess

$$Y_t = \alpha + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \ldots - \theta_q u_{t-q} = \alpha + \Theta(L) u_t$$

$u_t$ weißes Rauschen

Eigenschaften des MA($q$)-Prozesses:

- MA($q$)-Prozess ist stets stationär
- AC-Funktion: $\rho_k = 0$ für $k > q$
- PAC-Funktion:
  - exponentiell abnehmend bei reellen Wurzeln des Charakteristischen Polynoms $\Theta(z) = 0$
  - in Cosinus- oder Sinus-Schwingungen abnehmend bei komplexen Wurzeln des Charakteristischen Polynoms $\Theta(z) = 0$

# ARMA(p,q)-Prozess

$$Y_t = \alpha + \varphi_1 Y_{t-1} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \ldots - \theta_q u_{t-q} = \Theta(L)u_t$$

mit $u_t$ Weißes Rauschen; oder kurz

$$\Phi(L)Y_t = \alpha + \Theta(L)u_t$$

MA(∞)-Darstellung: $Y_t = \psi_0 + \Sigma_i \psi_i u_{t-i}$ die Koeffizienten $\psi_i$ sind Funktionen der $\varphi_i$ und $\theta_i$

AR(∞)-Darstellung analog

Stationärität des ARMA($p$,$q$)-Prozesses: wenn für alle $p$ Wurzeln $z_i$ des Charakteristischen Polynoms

$\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \ldots - \varphi_p z^p$ $\quad |z_i| > 1$ gilt.

# ARMA(p,q)-Prozess: Übersicht

| Bedingung für | **AR(*p*)** $\Phi(L)Y_t=u_t$ | **MA(*q*)** $Y_t = \Theta(L)u_t$ | **ARMA(*p*,*q*)** $\Phi(L)Y_t=\Theta(L)u_t$ |
|---|---|---|---|
| **Stationarität** | Wurzeln $z_i$ von $\Phi(z)=0$: $\lvert z_i\rvert > 1$ | stets stationär | Wurzeln $z_i$ von $\Phi(z)=0$: $\lvert z_i\rvert > 1$ |
| Invertibilität | stets invertierbar | Wurzeln $z_i$ von $\Theta(z)=0$: $\lvert z_i\rvert > 1$ | Wurzeln $z_i$ von $\Theta(z)=0$: $\lvert z_i\rvert > 1$ |
| **AC-Funktion** | gedämpft, unendlich | $\rho_k = 0$ für k>q | gedämpft, unendlich |
| **PAC-Funktion** | $\phi_{kk} = 0$ für k>p | gedämpft, unendlich | gedämpft, unendlich |

# Identifizieren von ARMA-Modellen

Vergleich der empirischen AC- und PAC-Funktion mit den theoretischen Gegenstücken

Abbruch der

- PAC-Funktion: Hinweis auf Ordnung des AR-Prozesses
- AC-Funktion: Hinweis auf Ordnung des MA-Prozesses

Empirisches Korrelogramm: $r_k$

Standardfehler aus $\mathrm{Var}\{r_k\} \approx (1+2\Sigma_i \rho_i^2)/n$ für $k>q$, wenn $\rho_i = 0$ für alle $i > q$

Analog empirische Partielles Korrelogramm

# Anwendung von ARMA Modellen

Mit (univariaten) ARMA Modellen sind kurzfristig i.A. bessere Prognosen zu erzielen, als mit Strukturmodellen.

Vorgansweise: z.B. privater, realer Konsum $C_t$

- Berechnen von $\log(C_t)$ [nicht stationär]
- Berechnen von $\Delta \log(C_t)$ … Wachstumsrate von $C_t$ [stationär]
- Modellieren von $\Delta \log(C_t)$ als ARMA($p,q$)
- Prognose für die folgenden 4 Perioden