
Kapitel 12

Autokorrelation in den Residuen

Der Sachverhalt

Modell $y = X\beta + u$, Ordnung von X : $n \times k$

Annahme A6: $\text{Var}\{u\} = \sigma^2 I$

Annahme 6 impliziert serielle Unkorreliertheit der Störgrößen:

$$\text{Var}\{u_t, u_{t+i}\} = 0, \quad t = 1, \dots, n, \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots$$

In der Realität trifft diese Annahme nicht immer zu; man spricht dann von serieller Korreliertheit oder Autokorrelation der Störgrößen;

$\text{Var}\{u\} = \sigma^2 \Omega$ besitzt von null verschiedene Nicht-Diagonalelemente

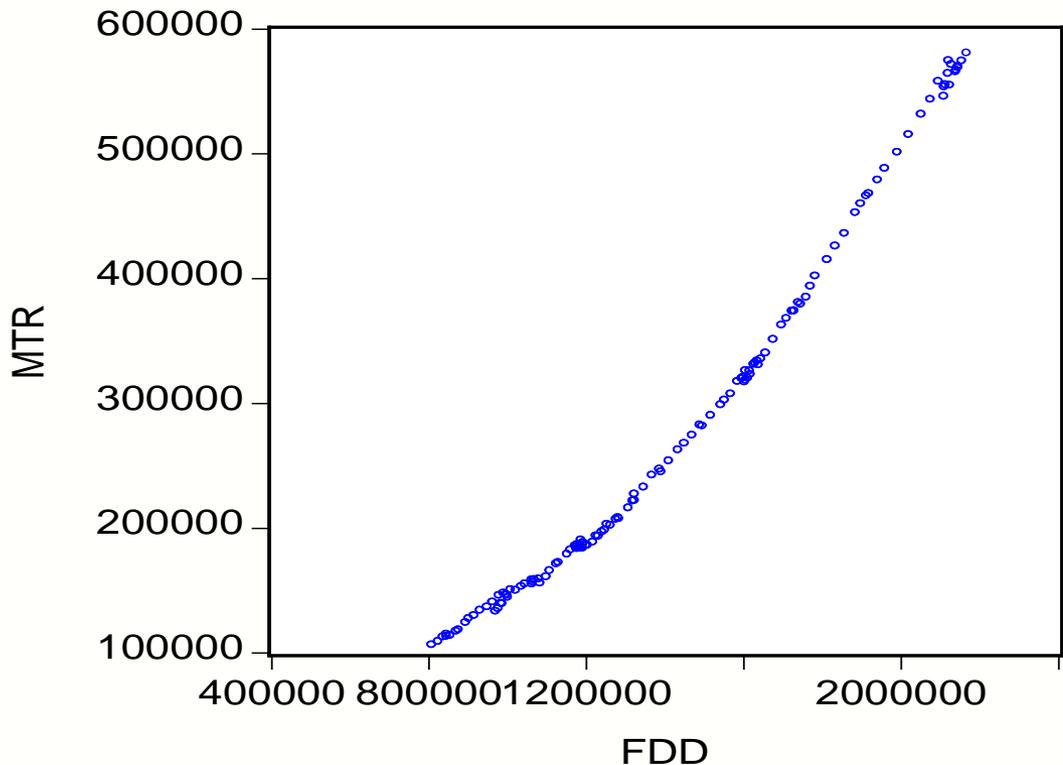
Der Sachverhalt

Fragestellungen:

- Konsequenzen von Autokorrelation
- Möglichkeiten zum Identifizieren von Autokorrelation
- Alternative Verfahren, die bei Autokorrelation verwendet werden können

Beispiel: Importfunktion

MTR: Importe
FDD: Nachfrage
(aus AWM-
Datenbasis)

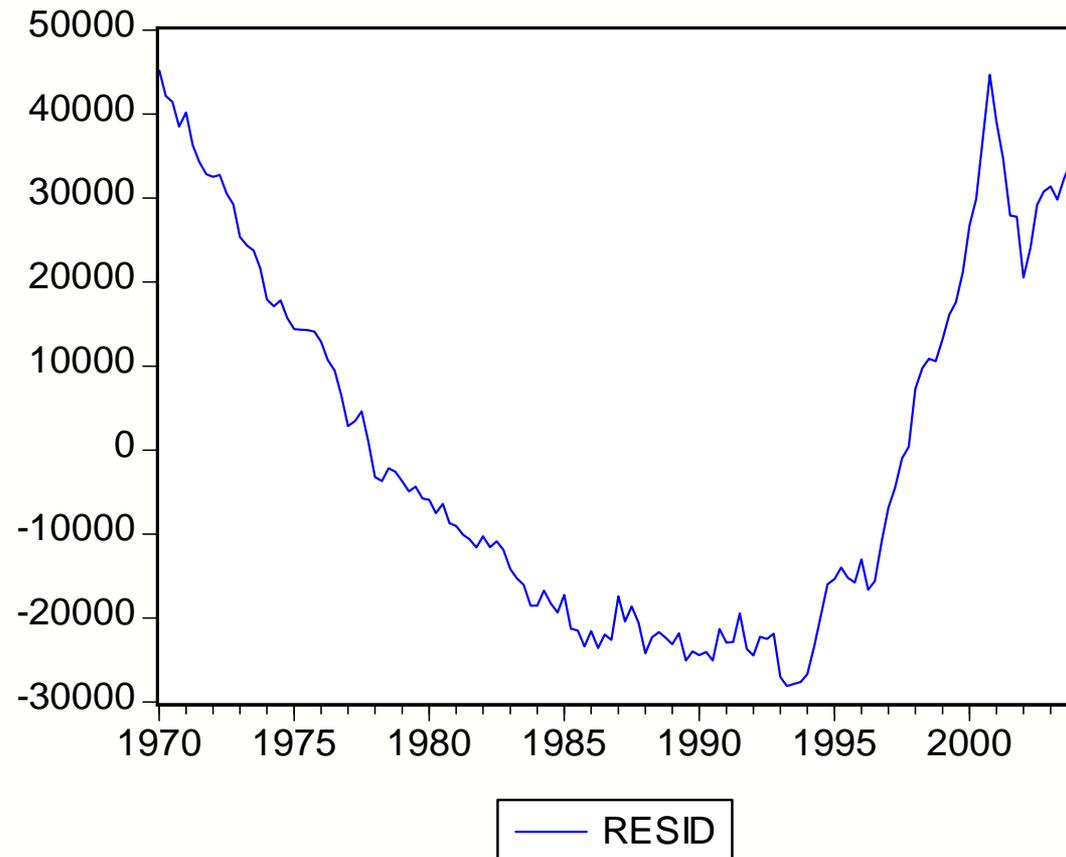


Importfunktion: $MTR = -227320 + 0.36 FDD$

$R^2 = 0.977$, $t_{FDD} = 74.8$

Bsp: Importfkt, Forts. - Residuen

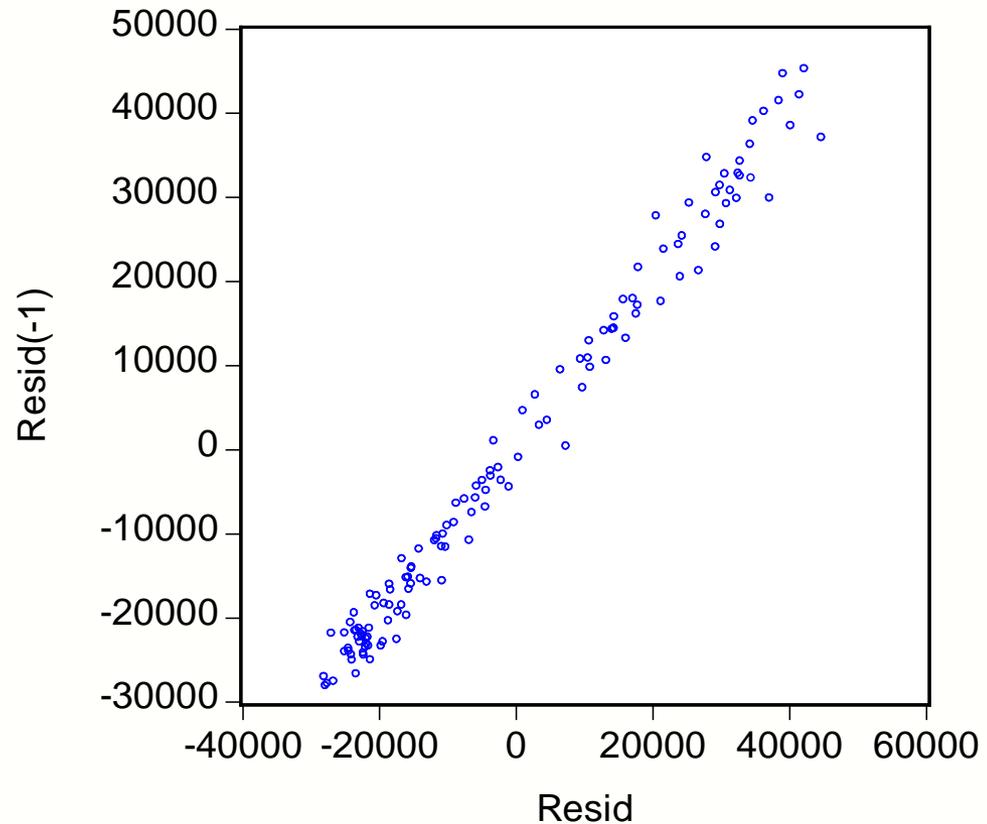
MTR: Importe
FDD: Nachfrage
(Q: AWM-
Datenbasis)



$$\text{RESID: } e_t = \text{MTR} - (-227320 + 0.36 \text{ FDD})$$

Bsp: Importfkt, Forts. – $e_t \times e_{t-1}$

Streudiagramm der
um eine Periode
verzögerten
Residuen [Resid(-1)]
über den aktuellen
Residuen [Resid]
Serielle Korrelation!



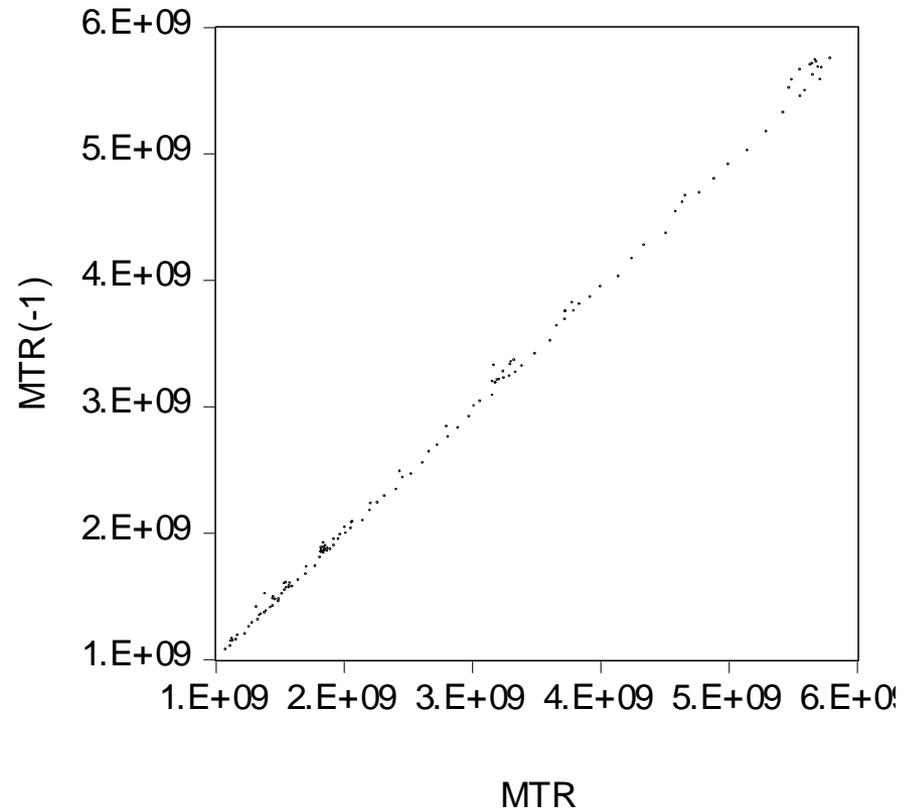
Autokorrelation in Zeitreihen

- Der aktuelle Konsum hängt vom Konsum der Vorperiode ab.
- Produktion, Investitionen, etc.: I.A. korrelieren aufeinander folgende Beobachtungen positiv.
- Je kürzer die Beobachtungsintervalle, desto ausgeprägter die Korrelation. Z.B. Konjunkturphasen, Moden im Konsumverhalten.
- Klimatische Effekte etc. wirken über längere Perioden.
- Saisonbereinigung: Durch Anwenden von Glättungs- oder Filterungsverfahren sind geglättete Daten korreliert.

Bsp: Importfkt, Forts. – $M_t \times M_{t-1}$

Streudiagramm der um eine Periode verzögerten Importe $MTR(-1)$ über den aktuellen Importen MTR

Korrelationskoeffizient zwischen MTR und $MTR(-1)$: 0.9994



Typische Situationen für Autokorrelation in den Residuen

Autokorrelation tritt typischerweise bei Missspezifikation auf:

- ein relevanter Regressor ist im Modell nicht berücksichtigt.
- die funktionale Form eines Regressors ist falsch spezifiziert.
- die abhängige Variable ist autokorreliert und wird durch den systematischen Teil des Modells nicht adäquat erklärt.
- die abhängige Variable weist einen Trend auf, der nicht ausreichend erklärt wird.

Bei ökonometrischen Analysen muss stets mit Autokorrelation der Störgrößen gerechnet werden!

Typische Situationen für Autokorrelation

Autokorrelation der Störgrößen weist generell auf Mängel in der Modellspezifikation hin.

Tests auf Autokorrelation sind die am häufigsten verwendete Art des diagnostischen Überprüfens der Modellspezifikation.

Spezifikationen der Importfkt

- Regression der Importe (MTR) auf Ges Nachfrage (FDD)

$$MTR = -2.27 \times 10^9 + 0.357 FDD, \quad t_{FDD} = 74.9, \quad R^2 = 0.977$$

Autokorrelation (der Ordnung 1) in den Residuen:

$$\text{Corr}(e_t, e_{t-1}) = 0.993$$

- Importfunktion mit Trend (T)

$$MTR = -4.45 \times 10^9 + 0.653 FDD - 0.030 \times 10^9 T$$

$$t_{FDD} = 45.8, \quad t_T = -21.0, \quad R^2 = 0.995$$

Multikollinearität? $\text{Corr}(FDD, T) = 0.987$

- Importfunktion mit verzögerten Importen als Regressor

$$MTR = -0.124 \times 10^9 + 0.020 FDD + 0.956 MTR_{-1}$$

$$t_{FDD} = 2.89, \quad t_{MTR(-1)} = 50.1, \quad R^2 = 0.999$$

Autokorrelation der Störgrößen

- Autokorrelation der Ordnung k :

$$\rho_k = \text{Corr}\{u_t, u_{t-k}\}$$

Ist sie unabhängig von t : Kovarianz-Stationarität

- Empirischer Wert r_k von ρ_k :

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n e_t e_{t-k}}{(n-k)s^2}$$

- Kovarianzmatrix $\text{Var}\{u\}$ der Störgrößen

$$\text{Var}\{u\} = \sigma^2 \Omega = \Sigma$$

mit $\Omega = (\omega_{st})$, $\Sigma = (\sigma_{st})$ mit $\sigma_{st} = \sigma^2 \omega_{st} = \sigma^2 \rho_{|t-s|}$

AR(1)-Prozess

Für alle t gilt:

$$u_t = \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

$$E\{\varepsilon_t\} = 0, \quad \text{Var}\{\varepsilon_t\} = \sigma_e^2, \quad \text{Corr}\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}\}=0$$

Die ε_t haben ein Mittel von 0, konstante Varianz und sind seriell unkorreliert.

ε_t mit diesen Eigenschaften nennt man „weißes Rauschen“ (*white noise*).

u_t folgt einer Autoregression bzw. einem autoregressiven Prozess der Ordnung eins, AR(1), wenn $|\varphi| < 1$.

AR(1)-Prozess

Auflösen der rekursiven Darstellung nach u_t als Funktion vergangener ε :

$$u_t = \varepsilon_t + \varphi \varepsilon_{t-1} + \varphi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Daraus erhält man für $|\varphi| < 1$

$$\text{Var}\{u_t\} = \sigma_e^2 + \varphi^2 \sigma_e^2 + \varphi^4 \sigma_e^2 + \dots = \sigma_e^2 / (1 - \varphi^2)$$

$$\text{Cov}\{u_t, u_{t-k}\} = \varphi^k [\sigma_e^2 / (1 - \varphi^2)]$$

Für $|\varphi| > 1$ ist die Varianz der Störgrößen nicht definiert.

AR(1)-Prozess, Forts.

Die Kovarianzmatrix $\text{Var}\{u\} = \sigma_e^2 \Omega$ der Störgrößen ergibt sich zu

$$\text{Var}\{u\} = \sigma_e^2 \Omega = \frac{\sigma_e^2}{1 - \varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & \varphi & \cdots & \varphi^{n-1} \\ \varphi & 1 & \cdots & \varphi^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{n-1} & \varphi^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Var}\{u\}$ hat Bandstruktur.

$\text{Var}\{u\}$ hängt außer von σ_e^2 nur von einem Parameter, von φ , ab.

Autokorrelationsfunktion

Autokorrelation der Ordnung k , $\rho_k = \text{Corr}\{u_t, u_{t-k}\}$, ist unabhängig von t (Kovarianz-Stationarität).

Autokorrelationsfunktion: ρ_k mit $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Für $|\varphi| < 1$ fällt ρ_k mit k geometrisch.

$$\rho_0 = 1.$$

Importe: Die Autokorrelationen fallen nicht geometrisch.

Beispiel: Importe, Forts.

Date: 05/15/05 Time: 16:57

Sample: 1970:1 2003:4

Included observations: 136

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
. *****	. *****	1	0.968	0.968	130.30	0.000
. *****	. .	2	0.936	-0.017	253.06	0.000
. *****	. .	3	0.903	-0.041	368.07	0.000
. *****	. .	4	0.869	-0.021	475.47	0.000
. *****	* .	5	0.832	-0.069	574.71	0.000
. *****	. .	6	0.799	0.044	666.95	0.000
. *****	. .	7	0.768	0.001	752.66	0.000
. *****	. .	8	0.739	0.029	832.69	0.000
. *****	* .	9	0.706	-0.080	906.37	0.000
. *****	* .	10	0.668	-0.107	972.93	0.000
. *****	* .	11	0.626	-0.092	1031.8	0.000
. ****	* .	12	0.581	-0.081	1082.9	0.000

Konsequenzen von Autokorrelation in den Residuen, $|\varphi| < 1$

- Modell: $y = X\beta + u$
- Der OLS-Schätzer b für β
 - ist erwartungstreu,
 - ist konsistent,
 - hat die Kovarianzmatrix
$$\text{Var}\{b\} = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1}$$
 - ist nicht effizient,
 - ist unter allgemein erfüllten Bedingungen asymptotisch normalverteilt.

Konsequenzen von Autokorrelation in den Residuen

- Der Schätzer $s^2 = e'e/(n-k)$ der Varianz der Störgrößen σ^2 unterschätzt σ^2
(e : Vektor der OLS-Residuen)
- Ist u ein AR(1)-Prozess mit $\varphi > 0$, werden die Standardfehler der geschätzten Koeffizienten unterschätzt.
 $\text{Var}\{b\} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ ist zu klein.
- t - und F -Tests liefern daher irreführende Ergebnisse.

Tests auf Autokorrelation

Graphische Aufbereitung der Residuen gibt oft gute Hinweise auf Vorliegen von Autokorrelation.

Tests auf Basis der Residuen:

- ❑ Durbin-Watson-Test
- ❑ Breusch-Godfrey-Test
- ❑ Box-Pierce- / Ljung-Box-Test

Durbin-Watson-Test

Das Modell enthält keine verzögerte endogene Variable.

Nullhypothese: $\rho_1 = 0$

Alternative: nicht spezifiziert

Teststatistik:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \cong 2(1 - r_1)$$

- Bei positivem ρ_1 wird auch r_1 positiv sein; d liegt im Intervall $(0,2)$.
- Bei negativem ρ_1 wird d im Intervall $(2,4)$ liegen.
- Liegt d nahe beim Wert 2, so gibt es keine wesentliche Autokorrelation der Störgrößen.
- Bei d nahe null oder 4 hohe Korrelation.

Durbin-Watson-Test, Forts.

Kritische Schranken für d :

- Die exakten kritischen Werte hängen von der Matrix X ab.
- Es gibt untere (d_L) und obere Schranken (d_U) für die kritischen Werte; siehe Tab.G1
 - $d < d_L$: H_0 wird verworfen
 - $d > d_U$: H_0 wird nicht verworfen
 - $d_L < d < d_U$: keine Entscheidung (*Unentscheidbarkeitsbereich*)

Durbin-Watson-Test, Forts.

Kritische Schranken für d bei $\alpha = 0.05$, untere (d_L) und obere Schranken (d_U): siehe auch Tab.G1

n	k=2		k=3		k=10	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.17	3.22
20	1.20	1.41	1.10	1.54	0.42	2.70
100	1.65	1.69	1.63	1.71	1.48	1.87

Importfunktionen, Forts.

- Regression der Importe (MTR) auf Nachfrage (FDD)
 $MTR = -2.27 \times 10^9 + 0.357 FDD$, $t_{FDD} = 74.9$, $R^2 = 0.977$
DW-Statistik: $d = 0.014 < 1.69 = d_L$ für $n = 136$, $k = 2$
- Importfunktion mit Trend (T)
 $MTR = -4.45 \times 10^9 + 0.653 FDD - 0.030 \times 10^9 T$
 $t_{FDD} = 45.8$, $t_T = -21.0$, $R^2 = 0.995$
DW-Statistik: $d = 0.093 < 1.68 = d_L$ für $n = 136$, $k = 3$
- Importfunktion mit verzögerten Importen als Regressor(!)
 $MTR = -0.124 \times 10^9 + 0.020 FDD + 0.956 MTR_{-1}$
 $t_{FDD} = 2.89$, $t_{MTR(-1)} = 50.1$, $R^2 = 0.999$, DW: $d = 1.079$

Durbin-Watson-Test, Forts.

- DW-Test gibt keinen Hinweis auf Ursachen für ein Verwerfen der Nullhypothese bzw. darauf, wie das Modell zu modifizieren ist.
- Der DW-Test ist ein Test auf Autokorrelation erster Ordnung. Er entdeckt nicht Autokorrelation vierter Ordnung (vgl. Quartalsdaten).
- Ursache für Verwerfen der Nullhypothese können verschiedene Arten von Missspezifikation sein.
- Beschränkte Zahl von kritischen Schranken (k , n , α) und Unentscheidbarkeitsbereich machen DW-Test unhandlich.

Breusch-Godfrey-Test

Modell: $Y_t = x_t' \beta + u_t$ mit AR(m)-Prozess für u_t :

$$u_t = \varphi_1 u_{t-1} + \dots + \varphi_m u_{t-m} + \varepsilon_t \text{ mit weißem Rauschen } \varepsilon_t$$

Der BG-Test testet $H_0: \varphi_i = 0, i = 1, \dots, m$ gegen das Nichtzutreffen von H_0 (mindestens ein φ_i ist von Null verschieden)

Teststatistik: $LM(A) = n R_e^2$

mit dem Bestimmtheitsmaß R_e^2 aus der Hilfsregression der Residuen e_t auf die k Regressoren des Modells und die verzögerten Residuen e_{t-1}, \dots, e_{t-m} .

Der BG-Test ist ein Lagrange-Multiplier-Test. $LM(A)$ folgt unter H_0 asymptotisch der Chi-Quadrat-Verteilung mit m FGen.

Box-Pierce-Test

Wie beim Breusch-Godfrey-Test werden Autokorrelationen bis zur Ordnung m einbezogen.

Teststatistik:

$$Q_m = n \sum_{i=1}^m r_i^2$$

Es wird keine Struktur der Abhängigkeit der Störgrößen als Alternative vorgegeben (m ist nicht die Ordnung des AR-Prozesses wie beim BG-Test).

Unter H_0 folgt Q_m asymptotisch der Chi-Quadrat-Verteilung mit m Freiheitsgraden.

Die Ljung-Box-Teststatistik $Q_m^{LB} = n(n+2) \sum_{i=1}^m \frac{r_i^2}{n-i}$

Bsp: Importfunktion, Forts.

Regression der Importe (MTR) auf Nachfrage (FDD)

$$\text{MTR} = -2.27 \times 10^9 + 0.357 \text{ FDD}, \quad t_{\text{FDD}} = 74.9, \quad R^2 = 0.977$$

DW-Statistik: $d = 0.014 < 1.69 = d_L$ für $n = 136, k = 2$

BG-Test: $\text{LM}(A) = 129.9$

BP-Test: $Q_{12} = 1082.9$

Alle 3 Tests verwerfen die Nullhypothese.

Inferenz bei Autokorrelation

Wenn die Ursachen der Autokorrelation (Missspezifikation) nicht beseitigt werden können:

- Verwenden der korrekten Varianzen für $\text{Var}\{b\}$:
Schätzung mit OLS und HAC-Schätzer für $\text{Var}\{b\}$
- Transformation des Modells, so dass die Störgrößen unkorreliert sind:
Cochran-Orcutt Prozedur bzw.
FGLS

HAC-Schätzer für $\text{Var}\{b\}$

$$\text{Var}\{b\} = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1}$$

Ersetzen von Ω durch einen geeigneten Schätzer.

Newey-West. Ersetzen von $S_x = \sigma^2(X'\Omega X)/n = (\sum_t \sum_s \sigma_{ts} x_t x_s')/n$

$$\hat{S}_x = \frac{1}{n} \sum_t e_t^2 x_t x_t' + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p \sum_t (1-w_j) e_t e_{t-j} (x_t x_{t-j}' + x_{t-j} x_t')$$

mit $w_j = j/(p+1)$. p , der *truncation lag*, geeignet wählen.

Der Schätzer $n (X'X)^{-1} \hat{S}_x (X'X)^{-1}$

für $\text{Var}\{b\}$ wird *heteroskedasticity and autocorrelation consistent* oder HAC-Schätzer genannt. Er berücksichtigt auch Heteroskedastizität.

Bsp: Importfunktion, Forts.

Regression der Importe (MTR) auf Nachfrage (FDD)

$$\text{MTR} = -2.27 \times 10^9 + 0.357 \text{ FDD}, \quad t_{\text{FDD}} = 74.9, \quad R^2 = 0.977$$

OLS-Schätzer und Standardfehler:

	Coeff	se(Coeff)	
		OLS	HAC
Interzept	-2.27×10^9	0.07×10^9	0.18×10^9
FDD	0.357	0.0048	0.0125

Variablen-Transformation, GLS

Annahme: Störgrößen folgen einem AR(1)-Prozess

$$\text{Var}\{u\} = \sigma_e^2 \Omega = \frac{\sigma_e^2}{1-\varphi^2} \begin{pmatrix} 1 & \varphi & \dots & \varphi^{n-1} \\ \varphi & 1 & \dots & \varphi^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{n-1} & \varphi^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen von L so, dass $L'L = \Omega^{-1}$ (Cholesky-Zerlegung):

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\varphi^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\varphi & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Variablen-Transformation, Forts.

Anwenden der Transformation (Multiplizieren mit L) liefert die Gleichungen

$$\sqrt{1-\varphi^2} y_1 = \sqrt{1-\varphi^2} x_1' \beta + \sqrt{1-\varphi^2} u_1$$

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = (x_t - \varphi x_{t-1})' \beta + \varepsilon_t, t = 2, \dots, n$$

Die transformierten Variablen $y_t^* = y_t - \varphi y_{t-1}$ nennt man auch *Quasi-Differenzen* der Regressoren. Dabei ist φ z.B. durch einen OLS-Schätzer zu ersetzen

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2}$$

der Regression $e_t = \varphi e_{t-1} + v_t$.

Cochrane-Orcutt-Schätzer

Der Cochrane-Orcutt-Schätzer läuft für das Modell
 $y = X\beta + u$ in folgenden Schritten ab:

1. Schätzen von φ . Berechnen der Quasi-Differenzen.
2. Bestimmen der OLS-Schätzer für β und σ_e^2 aus

$$Y_t^* = (x_t^*)' \beta + \varepsilon_t, t = 2, \dots, n$$

Der Prais-Winsten-Schätzer berücksichtigt zusätzlich die Beobachtung für $t=1$.

Diese Schätzer sind GLS-Schätzer, bzw. FGLS-Schätzer, wenn φ geschätzt wird, was normalerweise der Fall ist.

Regression in Differenzen

Bei hoher positiver Korrelation der Regressoren wird es eine geeignete Vorgangsweise sein, für φ den Wert eins zu verwenden.

[Faustregel: Das Setzen von $\varphi = 1$ ist dann geeignet, wenn die DW-Statistik kleiner als R^2 ist.]

Setzen von $\varphi = 1$ bedeutet, dass das Modell durch eines in Differenzen ersetzt wird.

Das Modell in Differenzen hat dann keinen Interzept!

Bsp: Importfunktion, Forts.

Regression der Importe (MTR) auf Nachfrage (FDD)

$$\text{MTR} = -2.27 \times 10^9 + 0.357 \text{ FDD}, \quad t_{\text{FDD}} = 74.9, \quad R^2 = 0.977$$

DW-Statistik: 0.014

Regression in Differenzen

$$\Delta \text{MTR} = 0.399 \Delta \text{FDD}, \quad t_{\Delta \text{FDD}} = 16.19, \quad R^2 = 0.762$$

DW-Statistik: 1.59; liegt knapp im Verwerfungsbereich

Regression in Differenzen mit Interzept

$$\Delta \text{MTR} = -1.01 \times 10^9 + 0.447 \Delta \text{FDD},$$

$$t_{\Delta \text{FDD}} = 14.47, \quad R^2 = 0.78, \quad \text{DW-Statistik: 1.79}$$

Im Niveau enthält das Modell einen Trend.

Bsp: Importfunktion, Forts.

Regression der Importe (MTR) auf Nachfrage (FDD) und Trend (T)

$$MTR = -4.45 \times 10^9 + 0.653 FDD - 0.03 \times 10^9 T$$

$$t_{FDD} = 45.81, t_T = 21.04, R^2 = 0.995, DW = 0.093$$

Regression in Quasi-Differenzen

$$MTR^* = 0.314 FDD^*, t_{FDD^*} = 28.22, R^2 = 0.714$$

DW-Statistik: 1.23; liegt im Verwerfungsbereich

Regression in Quasi-Differenzen

$$MTR^* = -4008.93 + 0.464 FDD^*,$$

$$t_{FDD^*} = 25.07, R^2 = 0.825$$

DW-Statistik: 1.96; liegt im Annahmebereich