

liche Zeitreihe die Eigenschaft, nichtstationär zu sein. Damit kommen wir zu einem Thema, das uns in Kapitel 14 beschäftigen wird. Der Teil (b) aus Abbildung 13.1 zeigt die ersten Differenzen des Konsums. Dieser Verlauf ist tatsächlich typisch für Weißes Rauschen und die AC- und PAC-Funktionen bestätigen diesen Befund; die p -Werte des Box-Pierce-Tests sind für die ersten zwölf m alle größer als 0.5.

ZUSAMMENFASSUNG

- **Zeitreihen:** Unter einer Zeitreihe versteht man eine Folge von Beobachtungen von Merkmalen, die in meist regelmäßigen Zeitpunkten erhoben werden. Nachdem die Beobachtungen in zeitlicher Ordnung erhoben werden, muss damit gerechnet werden, dass die jeweils aktuelle Beobachtung Informationen über die Vergangenheit enthält.
- **Stochastischen Prozesse:** Zum begrifflichen Hintergrund von Zeitreihen-Modellen gehören die stochastischen Prozesse, ihre Eigenschaften wie die Stationarität und ihre Charakteristika wie die Autokorrelations- oder AC-Funktion und die Partielle Autokorrelations- oder PAC-Funktion sowie deren grafische Gegenstücke, das Korrelogramm und das Partielle Korrelogramm. Letztere eignen sich besonders zur Visualisierung der Abhängigkeitsstruktur der Variablen.
- **ARMA-Modelle:** Die ARMA-Modelle einschließlich AR- und MA-Modelle beschreiben die aktuelle Beobachtung im Wesentlichen als gewichtete Summe verzögerter Realisationen der interessierenden Variablen.
- **Identifizieren von ARMA-Modellen:** Den Zeitreihen-Modellen wie den ARMA-Modellen entsprechen bestimmte Formen der Abhängigkeitsstruktur, die durch die AC- und PAC-Funktionen charakterisiert werden. Aus der Form dieser Funktionen kann auf den Modelltyp rückgeschlossen werden, der sich zur modellmäßigen Darstellung der Zeitreihe eignet. Die empirischen AC- und PAC-Funktionen geben entsprechende Hinweise auf ARMA-Modelle, die zum Darstellen der Zeitreihe geeignet sind.

Wichtige Begriffe

- ARMA(p, q)-Modell
- ARMA(p, q)-Prozess
- AR(1)-Prozess
- Autokorrelations-Funktion
- charakteristisches Polynom
- empirische Autokorrelations-Funktion
- Invertierbarkeits-Bedingung

- Korrelogramm
- Kovarianz-stationär
- Kovarianz-Funktion
- MA(1)-Prozess
- MA-Modell
- partielle Autokorrelations-Funktion
- partielles Korrelogramm
- schwach stationär
- Stationarität
- Stationaritäts-Bedingung
- Stochastischer Prozess
- strenge Stationarität
- weißes Rauschen

AUFGABEN

13.A.1 Empirische Anwendungen

1. Die Zeitreihe GEN der AWM-Datenbasis enthält die saisonbereinigten Werte der Öffentlichen Ausgaben im Zeitraum 1970:1 bis 2002:4.
 - (a) Zeichnen Sie ein Zeitreihendiagramm und ermitteln Sie das Korrelogramm und das Partielle Korrelogramm von GEN.
 - (b) Passen Sie (i) ein AR(1)-, (ii) ein MA(1)- und (iii) ein ARMA(1,1)-Modell an die Zeitreihe GEN an und überprüfen Sie die Residuen auf Zufälligkeit; interpretieren Sie die Ergebnisse in Hinblick auf die in (a) ermittelten Korrelogramme.
2. Wiederholen Sie Aufgabe 1 für die Differenzen $\Delta \text{GEN}_t = \text{GEN}_t - \text{GEN}_{t-1}$.
3. Dieser Aufgabe liegen künstlich erzeugte Zeitreihen zugrunde.
 - (a) Generieren Sie 100 Zufallszahlen nach $u_t \sim N(0, 1)$.
 - (b) Generieren Sie die Zeitreihe $Y_t = \varphi Y_{t-1} + u_t$, ausgehend von $Y_0 = 0$, für (i) $\varphi = 0.4$, (ii) $\varphi = 0.8$ und (iii) $\varphi = 1$; bestimmen Sie jeweils das Korrelogramm und das Partielle Korrelogramm von Y .
 - (c) Wiederholen Sie den Teil (b) der Aufgabe für den MA(1)-Prozess $Y_t = \alpha + u_t + \theta u_{t-1}$ mit $\alpha = 1$, $\theta = 0.5$ und $u_0 = 0$.

13.A.2 Allgemeine Aufgaben und Probleme

1. Zeigen Sie, dass der Wert ϕ_{11} der Partiiellen Autokorrelations-Funktion des stationären stochastischen Prozesses Y_t , $t = 1, \dots, n$ gleich dem Wert ϱ_1 der Autokorrelations-Funktion der Y_t ist.



2. Für den MA(1)-Prozess gelte $Y_t = \alpha + u_t - \theta u_{t-1}$; u_t ist Weißes Rauschen. Zeigen Sie die Gültigkeit der im Beispiel 13.1 angegebenen Autokorrelations-Funktion.
3. Geben Sie zum ARMA(2,2)-Modell $X_t = X_{t-1} + 0.5X_{t-2} + u_t - 0.5u_{t-1} + 0.2u_{t-2}$ jeweils die ersten sechs Summanden (a) der AR(∞)- und (b) der MA(∞)-Darstellung an.

13.B Hinweise zu gretl und EViews

13.B.1 Zeitreihen und Zeitreihen-Modelle

Beide Software-Pakete bieten die Möglichkeiten, das Korrelogramm und das Partielle Korrelogramm anzeigen zu lassen und die für die Analyse von ARMA-Modellen verwendeten Verfahren der Box-Jenkins-Technik aufzurufen.

Zeitreihen in gretl

- Zum Schätzen des Korrelogramms und des Partiellen Korrelogramms muss die interessierende Variable im Hauptfenster markiert und nach Anklicken der Schaltfläche **Variable** der Menüpunkt **Korrelogramm** angewählt werden. Es erscheint das Eingabe-Fenster zum Festlegen der maximalen Ordnung k , für die das Korrelogramm berechnet werden soll. Das Output-Fenster enthält für alle Ordnungen bis zum Wert k die Autokorrelation, die partielle Autokorrelation, die Ljung-Box-Teststatistik Q^{LB} und den entsprechenden p -Wert. Die Autokorrelation und die partielle Autokorrelation werden auch grafisch dargestellt.
- Zur Anwendung der Box-Jenkins-Technik klickt man im Hauptfenster auf die Schaltfläche **Modell** und wählt aus den Menüpunkten von **Zeitreihen** die Möglichkeit **ARIMA**. Im Eingabe-Fenster **Modell** spezifizieren sind die Ordnungen aller Lag-Strukturen anzugeben. Im Output-Fenster werden die Schätzer der Parameter des ARMA-Modells gemeinsam mit den entsprechenden Statistiken angezeigt. Ergänzend zum Standard-Output werden die Wurzeln der charakteristischen Polynome angegeben.

Zeitreihen in EViews

- Zum Schätzen des Korrelogramms und des Partiellen Korrelogramms muss man die interessierende Variable im entsprechenden Variablen-Fenster (*series windows*) anzeigen. Dort klickt man auf die Schaltfläche **View** und wählt den Menüpunkt **Correlogram** ... Es erscheint das **Correlogram Specification**-Fenster, in dem einzugeben ist, (a) ob für die Niveauewerte, die ersten oder die zweiten Differenzen die Korrelogramme gezeigt werden sollen, und in dem (b) die maximale Ordnung k anzugeben ist, bis zu der das Korrelogramm ausgegeben werden soll. Als Output werden die Korrelogramme in grafischer Form und als Tabelle geliefert; außerdem werden die Ljung-Box-Teststatistiken Q^{LB} und die entsprechenden p -Werte angegeben.

- Zum Schätzen der Koeffizienten einer Regression mit autokorrelierten Störgrößen der Ordnung p wird im Eingabe-Fenster **Equation Estimation** neben der abhängigen Variablen angegeben, ob ein Interzept zu schätzen ist, und mit **AR(1)**, ...**AR(p)**, dass die um die entsprechenden Ordnungen verzögerten Variablen im Modell zu berücksichtigen sind. Zum Schätzen eines MA(q)-Modells werden im Eingabe-Fenster neben der abhängigen Variablen die Ausdrücke **MA(1)**, ...**MA(q)** angegeben und gegebenenfalls das Berücksichtigen des Interzepts verlangt. Die Erweiterung für ein ARMA-Modell bedeutet die Kombination der behandelten Fälle. Im Output-Fenster der Schätzung werden die Schätzer der Parameter des ARMA-Modells gemeinsam mit den entsprechenden Statistiken angezeigt. Ergänzend zum Standard-Output werden die Reziprokwerte der Wurzeln der Charakteristischen Polynome ausgegeben.