Appendix

Kapitel 3

Ökonometrie I
Michael Hauser

Inhalt

- Bedingte Erwartung
- Unabhängigkeit und Unkorreliertheit

Bedingte Erwartung

Bedingte Erwartung

Seien X und Y zwei ZVn.

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_y$$

ist der (unbedingte) Erwartungswert von Y. μ_y ist eine reelle, fixe Zahl.

$$\mathrm{E}(Y|X) = \mu_{y|x}$$

ist der Erwartungswert der ZVn $(Y|X)$, bzw der *bedingte Erwartungswert von Y gegeben X*. $\mu_{y|x}$ ist eine ZV, sie hängt von X ab.
Je nachdem welchen Wert X annimmt, hat auch $\mathrm{E}(Y|X)$ einen anderen Wert.

Bsp: Einkommen von Männern und Frauen

Bsp: Seien Y und G zwei ZVn. Y messe das Nettojahres- einkommen, G das Geschlecht.

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_y$$

steht für das durchschnittliche Einkommen (aller Personen) in der Grundgesamtheit, eine reelle, fixe Zahl.

$$\mathrm{E}(Y|G) = \mu_{y|g}$$

ist das bedingte erwartete Einkommen bei gegebenem Geschlecht, und ist daher eine Funktion des Geschlechts. Es nimmt 2 Werte an:

$$\mathrm{E}(Y|G = m) \quad \text{und} \quad \mathrm{E}(Y|G = w)$$

Bsp: Einkommen von Männern und Frauen

Das durchschnittl Eink der Männer und das durchschnittl Eink der Frauen sind für Angestellte €22500 und €14000 netto pa (Ö, 2004).
Da Geschlecht und Einkommen nicht unabhängig sind, erhalten wir 2 verschiedene bedingte Erwartungen.

Bedingte Erwartung

Gilt

$$E(Y|X) = E(Y)$$

so sind X und Y unabhängig. Die Wahl von X hat keinen Einfluss auf Y.
Wäre im Bsp Eink und Geschlecht unabhängig sein, sind die Einkommen der Männer gleich dem Einkommen der Frauen.

Im Regressionsmodell gilt:

$$E(u|1, x_1, \ldots, x_k) = 0$$

$E(u) = 0$. Die x-Variablen und u sind unabhängig.

Zum Nachrechnen

X und X seinen zwei ZVn mit gemeinsamer Verteilung $f_{xy}(x, y)$. Die 1-dimensionale Randverteilung von y sei $f_y(y)$.

Zur Wiederholung: Der Erwartungswert von Y ist

$$\mathrm{E}(Y) = \int y\, f_y(y)\, dy$$

Analog der bedingte Erwartungswert

$$\mathrm{E}(Y|X) = \int y\, f_{y|x}(y|x)\, dy$$

Zum Nachrechnen

Die bedingte Verteilung ergibt sich wie die bedingte Wahrscheinlichkeit für 2 Ereignisse A und B als

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \quad \text{analog} \quad f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

Unter Unabhängigkeit gilt analog zu

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A):$$

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\,f_y(y) \quad \text{und} \quad f_{y|x}(y|x) = f_y(y)$$

$$\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$$

Zum Nachrechnen

Die bedingte Dichte reduziert sich unter Unabhängigkeit auf die Randverteilung von Y:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{f_y(y)\, f_x(x)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

In das Integral eingesetzt

$$\mathrm{E}(Y|X) = \int y\, f_y(y)\, dy = \mathrm{E}(Y)$$

Der Herleitungskette ist umkehrbar.

Unabhängigkeit und Unkorreliertheit bei N-Vtlg

Seien zwei ZVn X und Y *gemeinsam normal verteilt*. So folgt aus deren *Unabhängigkeit deren Unkorreliertheit*, und umgekehrt.