Appendix

Kapitel 3

Ökonometrie I
Michael Hauser

Inhalt

Bedingte Erwartung

Bedingte Erwartung

Seien X und Y zwei ZVn.

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_y$$

ist der (unbedingte) Erwartungswert von Y. μ_y ist eine reelle, fixe Zahl.

$$\mathrm{E}(Y|X) = \mu_{y|x}$$

ist der Erwartungswert der ZVn $(Y|X)$, bzw der *bedingte Erwartungswert von Y gegeben X*. $\mu_{y|x}$ ist eine ZV, sie hängt von X ab.
Je nachdem welchen Wert X annimmt, hat auch $\mathrm{E}(Y|X)$ einen anderen Wert.

Bsp: Einkommen von Männern und Frauen

Bsp: Seien Y und G zwei ZVn. Y messe das Nettojahres- einkommen, G das Geschlecht.

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_y$$

steht für das durchschnittliche Einkommen (aller Personen) in der Grundgesamtheit, eine reelle, fixe Zahl.

$$\mathrm{E}(Y|G) = \mu_{y|g}$$

ist das bedingte erwartete Einkommen bei gegebenem Geschlecht, und ist daher eine Funktion des Geschlechts. Es nimmt 2 Werte an:

$$\mathrm{E}(Y|G = m) \quad \text{und} \quad \mathrm{E}(Y|G = w)$$

Bsp: Einkommen von Männern und Frauen

Das durchschnittl Eink der Männer und das durchschnittl Eink der Frauen sind für Angestellte €22500 und €14000 netto pa (Ö, 2004).
Da Geschlecht und Einkommen nicht unabhängig sind, erhalten wir 2 verschiedene bedingte Erwartungen.

Bedingte Erwartung

Gilt

$$\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$$

so sind X und Y unabhängig. Die Wahl von X hat keinen Einfluss auf Y.
Wäre im Bsp Eink und Geschlecht unabhängig sein, sind die Einkommen der Männer gleich dem Einkommen der Frauen.

Im Regressionsmodell gilt:

$$\mathrm{E}(u|1, x_1, \ldots, x_k) = 0$$

$\mathrm{E}(u) = 0$. Die x-Variablen und u sind unabhängig.

Zum Nachrechnen

X und X seinen zwei ZVn mit gemeinsamer Verteilung $f_{xy}(x, y)$. Die 1-dimensionale Randverteilung von y sei $f_y(y)$.

Zur Wiederholung: Der Erwartungswert von Y ist

$$\mathrm{E}(Y) = \int y \, f_y(y) \, dy$$

Analog der bedingte Erwartungswert

$$\mathrm{E}(Y|X) = \int y \, f_{y|x}(y|x) \, dy$$

Zum Nachrechnen

Die bedingte Verteilung ergibt sich wie die bedingte Wahrscheinlichkeit für 2 Ereignisse A und B als

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \quad \text{analog} \quad f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

Unter Unabhängigkeit gilt analog zu

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A):$$

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\,f_y(y) \quad \text{und} \quad f_{y|x}(y|x) = f_y(y)$$

$$\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$$

Zum Nachrechnen

Die bedingte Dichte reduziert sich unter Unabhängigkeit auf die Randverteilung von Y:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{f_y(y)\,f_x(x)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

In das Integral eingesetzt

$$\mathrm{E}(Y|X) = \int y\, f_y(y)\, dy = \mathrm{E}(Y)$$

Der Herleitungskette ist umkehrbar.

Unabhängigkeit und Unkorreliertheit bei N-Vtlg

Seien zwei ZVn X und Y *gemeinsam normal verteilt*. So folgt aus deren *Unabhängigkeit deren Unkorreliertheit*, und umgekehrt.

OLS Schätzer in Matrixform

Herleitung des OLS Schätzers

Das Modell ist

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u}$$

Der Fehler $\widehat{\boldsymbol{u}} = \widehat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{b})$ ist für gegebenes $\boldsymbol{b} = (b_0, \ldots, b_k)'$

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$$

Wir suchen das $\boldsymbol{b}$, das die Fehlerquadratsumme minimiert

$$\sum \widehat{u}_i^2 = \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}) \;\rightarrow\; \min$$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

Bem: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

Herleitung des OLS Schätzers

Wir leiten nach $\boldsymbol{b}$ ab und setzen null (Bedingung 1.Ordnung). Nach den Regeln der Matrixdifferentiation ergibt sich

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{b}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Nach $\boldsymbol{b}$ aufgelöst (nur $\boldsymbol{b}$ auf der linke Seite, durch 2 dividiert, mit $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ von links multipliziert)

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

Nach Regeln der Matrixdifferentiation: $\frac{\partial \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}$, $\frac{\partial \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}'$, $\frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ und $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$.

Der Term $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}$ verschwindet. $\frac{\partial \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{b}} = (\frac{\partial (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})'\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{b}})' = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$, $\quad \frac{\partial \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X})' = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$, $\frac{\partial \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{b}} = 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$

Erwartungstreue des OLS Schätzers, $\mathrm{E}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$$

$$= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}]\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta}$$

da wir annehmen die Daten $\boldsymbol{X}$ sind fix, deterministisch, gegeben und $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$, bzw $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{u}$ sind unabhängig laut Annahme MLR.4.

Varianz des OLS Schätzers, $\mathrm{V}(\boldsymbol{b}) = \sigma_u^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\boldsymbol{b}$ ist $\mathrm{E}[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta})((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta})']$.

$$[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta}][\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta}]' = [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}][(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}]' = [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}][\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]$$

$$= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}']\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta})((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\beta})'|\boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{E}[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}']\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\sigma_u^2\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

$$= \sigma_u^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \sigma_u^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

Bem: $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$ und daher auch $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ sind symmetrisch.