Appendix: Geometrisches und exponentielles Wachstum

Kapitel 1

Ökonometrie I
Michael Hauser

Inhalt

- Geometrisches Wachstum
- Exponentielles Wachstum
- Taylorreihe

Geometrisches Wachstum, konstantes r (diskrete Zeit)

Unter **geometrischem Wachstum** mit *konstanter* Wachstumsrate r versteht man mit $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = K_0(1 + r)^n$$

$$K_0, \qquad K_1 = K_0(1 + r), \qquad K_2 = K_1(1 + r) = K_0(1 + r)^2, \qquad \ldots$$

Der **Wachstumsfaktor** $(1 + r)$ bzw die **Wachstumsrate** r ergeben sich als

$$\frac{K_{i+1}}{K_i} = 1 + r \qquad \text{bzw} \qquad \frac{K_{i+1} - K_i}{K_i} = r$$

Oder

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n \quad \text{bzw} \quad \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{1/n} = (1 + r)$$

Geometrisches Wachstum, variables r_t (diskrete Zeit)

Allgemeiner mit variablen Wachstumsfaktoren $(1 + r_t)$

$$K_n = K_0 \prod_{t=1}^{n} (1 + r_t)$$

Der **durchschnittliche Wachstumsfaktor** $\bar{r}$ ist (*geometr Mittel*)

$$\left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{1/n} = 1 + \bar{r}$$

Sind alle r_t gleich, $r_t = r$, so ist das durchschn Wachstum $\bar{r} = r$.

Liegen für n Perioden Wachstumsraten, $r_1, \ldots, r_n$, vor, so kann die durchschn Wachstumsrate über das *geometr Mittel* der Wachstumsfaktoren berechnet werden.

$$[(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot \ldots \cdot (1 + r_n)]^{1/n} = 1 + \bar{r}$$

Exponentielles Wachstum (stetige Zeit)

Exponentielles Wachstum liegt vor mit $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$$K(t) = K(0)\exp(\rho t)$$

ZB: $\quad t = 2.5: \quad K(2.5) = K(0)\exp(\rho\, 2.5)$

Wenn $\rho = \rho(t)$ nicht konstant ist: $\quad K(t) = K(0)\exp[\int_0^t \rho(\tau)\,d\tau]$.

Analog ergibt sich für die **durchschn Wachstumsrate** $\overline{\rho}$ im Intervall $[0, t]$

$$\overline{\rho} = \log\left[\frac{K(t)}{K(0)}\right] \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t}[\log K(t) - \log K(0)]$$

Für das (1-Perioden-) *Wachstum in der Periode* $(t-1, t]$, $t = 1, 2, \ldots$, ergibt sich

$$\rho(t) = \log\left[\frac{K(t)}{K(t-1)}\right] = \log K(t) - \log K(t-1)$$

Exponentielles Wachstum (stetige Zeit)

Liegen für n Perioden Wachstumsraten vor, $\rho_1, \ldots, \rho_n$, so kann die *durchschn stetige Wachstumsrate als (arithmetischer) Durchschnitt* berechnet werden.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\rho_t = \overline{\rho}$$

Diese einfache Aggregation über die Zeit macht die Verwendung des Modells in stetiger Zeit attraktiv.

Approximation: diskretes u stetiges Wachstum

Zur Approximation von Funktionen kann die **Taylorreihe** verwendet werden. Hier wird eine beliebige, differenzierbare Funktion durch Polynome mit einer gegebenen Ordnung approximiert.
Ein Polynom k-ter Ordnung (k-ten Grades) ist

$$p_k(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_k\,x^k$$

ZB:

$$p_2(x) = 1 + 2\,x + 3\,x^2$$

Taylorreihe, Approximation 1.Ordnung

Sei $f(x)$ eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion, so ist die Taylorreihe an der Stelle x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + Rest(k)$$

Das Restglied geht mit steigendem k gegen null.
$f^{(k)} \dots$ die k-te Ableitung von f nach x

Uns genügt die Approximation 1.Ordnung. Dh wir verwenden ein Polynom 1.Ordnung als approximierende Funkion. Das ist eine Gerade, die Tangente an die Funktion f an der Stelle x_0.

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\doteq \dots$ in 1.Näherung

Bsp: Approximation 1.Ordnung

Bsp: $f(x) = \exp(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$

Wir berechnen für die Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(0) & f'(x) &= \exp(0) \\ f(0) &= \exp(0) = 1, & f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

und setzen ein.
Daher ist

$$\exp(x) \doteq (1 + x)$$

Für kleine x ist die lineare Funktion eine gute Näherung.

Vergleich: exponentielles und geometr Wachstum

Bsp: Für $n = 5$, $r_t = r = \bar{r}$, $K_0 = K(0) = 1$.

$$K(5) = K(0)\exp(r \cdot 5) = K(0)[\exp(r)]^5, \qquad K_5 = K_0(1+r)^5$$

r	$K(5)$	K_5
0.01 = 1%	1.0513	1.0510
0.05 = 5%	1.284	1.276
0.10 = 10%	1.649	1.611
0.20 = 20%	2.718	2.488

Ist r klein, so ist die Approximation der stetigen Entwicklung durch ein diskretes Modell, und umgekehrt eine diskrete Entwicklung approximiert durch ein stetiges Modell, *gut*.
Bei *großem r* gilt dies nicht.

Vergleich: exponentielles mit geometr Wachstum

Es gilt:

$$a^{b^c} = (a^b)^c$$

Die Exponenten werden *von Außen nach Innen* aufgelöst.

$$(a^b)^c = a^{b\,c}$$

Bsp: $\exp(0.1\,x) = [\exp(0.1)]^x$

Im stetigen Modell fallen in jeder (beliebig) kleinen Periode $(t, t + \Delta t]$ Zinseszinsen an, im diskreten Modell nur am Ende einer (längeren) Periode, $t \to (t + 1)$.

Daher ist auch im stetigen Modell bei gleicher Wachstumsrate die Zunahme im Niveau größer.

Übungsbeispiele

Übungen

A1 Gegeben sind Quartalswerte des österr VPI (2005=100) für 2011. Verwenden sie den Taschenrechner.

	Dez10	März11	Juni11	Sep11	Dez11
VPI 2005	110.7	112.7	113.3	113.8	114.2

(a) Berechnen sie die 1-Perioden-Wachstumsfaktoren und Wachstumsraten in diskreter Zeit (geometr Wachstum), wie auch den durchschn Wachstumsfaktor, bzw Wachstumsrate. Wie groß war die Inflationsrate 2011?

(b) Berechnen sie in stetiger Zeit (exponentielles Wachstum) die 1-Perioden-Wachstumsraten und die durchschn Wachstumsrate für 2011.

(c) Vergleichen sie beide Inflationsraten.