

## Kapitel 12

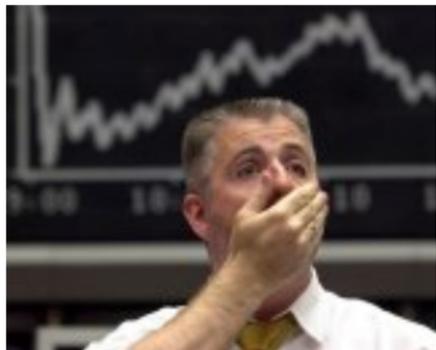
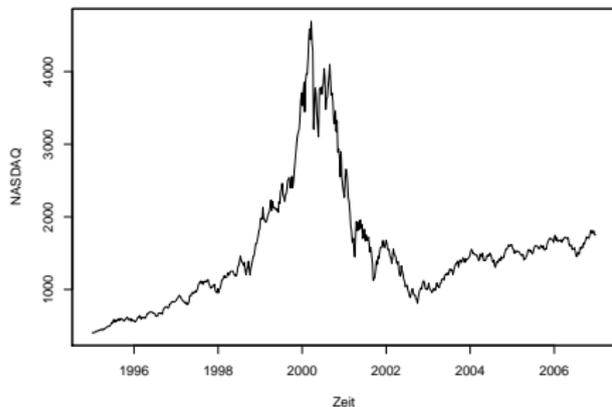
# Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle

# Inhalt

- Notation
- Zusammenhang zwischen Aktienkursen und Renditen
- Effiziente Markthypothese
- Autoregressive Modelle der Ordnung  $p$ ,  $AR(p)$
- Autokorrelationskoeffizient, Korrelogramm
- Stationäre Prozesse, white noise,  $AR(p)$
- Nicht-stationäre Prozesse, random walk
- Modellierung und Prognose nicht-stationärer Prozesse

# .com-Blase an der **NASDAQ**<sup>®</sup>

Modellierung und Prognose von Aktienrenditen



# Aktienkurse und deren Prognose

An der New Yorker NASDAQ-Börse sind die Hälfte der US-amerikanischen Aktiengesellschaften gelistet, u.a.: Adobe Systems, Amazon.com, Apple, Cisco, Dell, eBay, Google, Intel, Microsoft, Sun Microsystems, Yahoo.

Ab etwa Anfang 1998 kam es zu der sogenannten .com-Blase, die im März 2000 zu einem 75%-igen Wertverlust der zuletzt gekauften Aktien führte.

## Fragen:

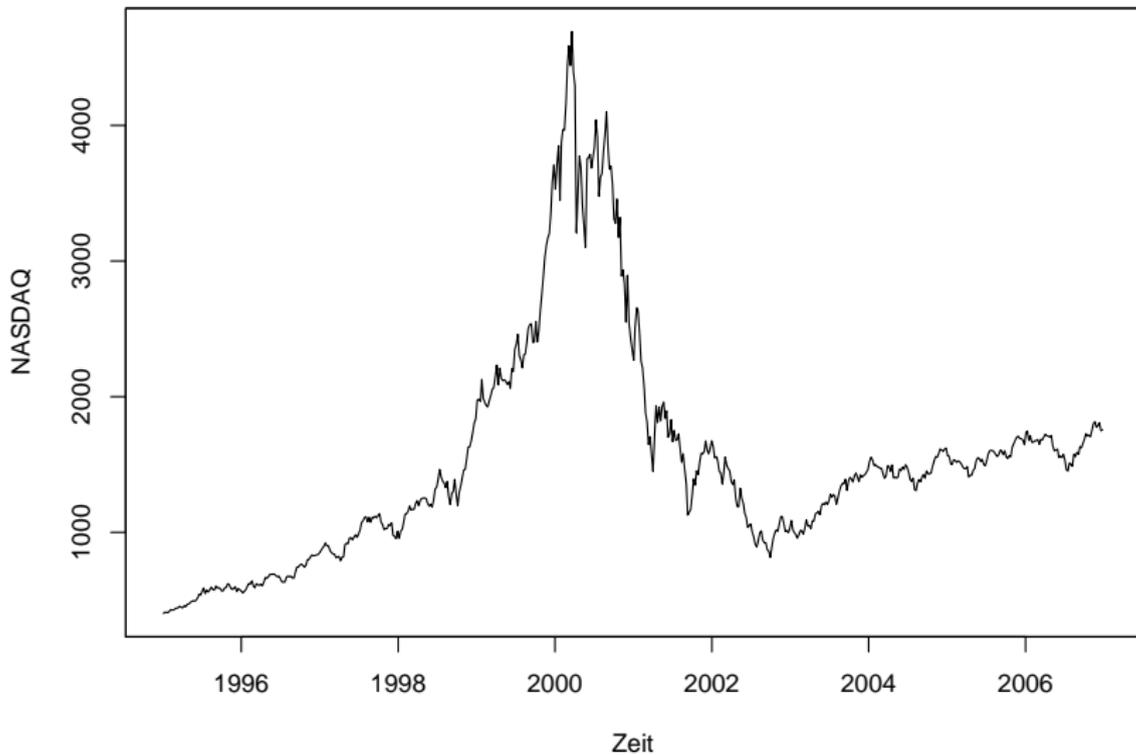
Sind Renditen von Aktien prognostizierbar?

Wie berechnet man die Prognose eines Aktienkurses?

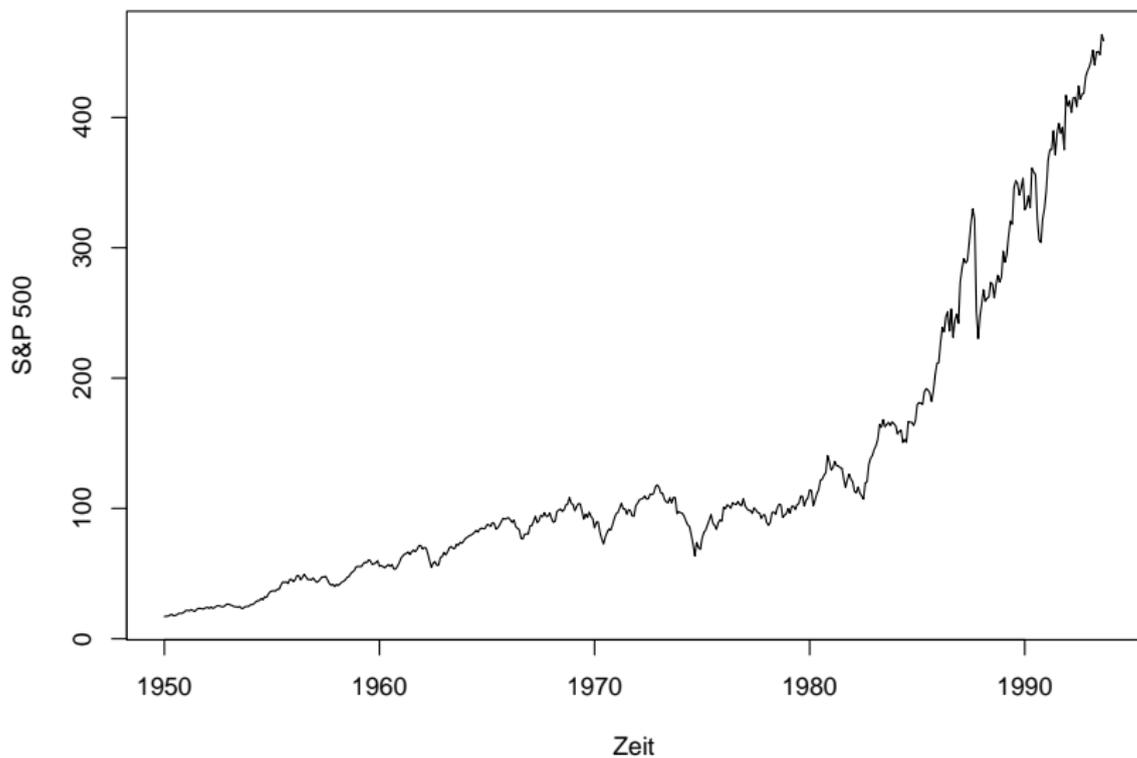
**Quelle:** Yahoo! Finance, <http://finance.yahoo.com/>

**Bezeichnung:** NASDAQ steht für das National Association of Securities Dealers Automated Quotation System.

# NASDAQ-100, 2.1.1995 - 31.12.2006, Wochendaten



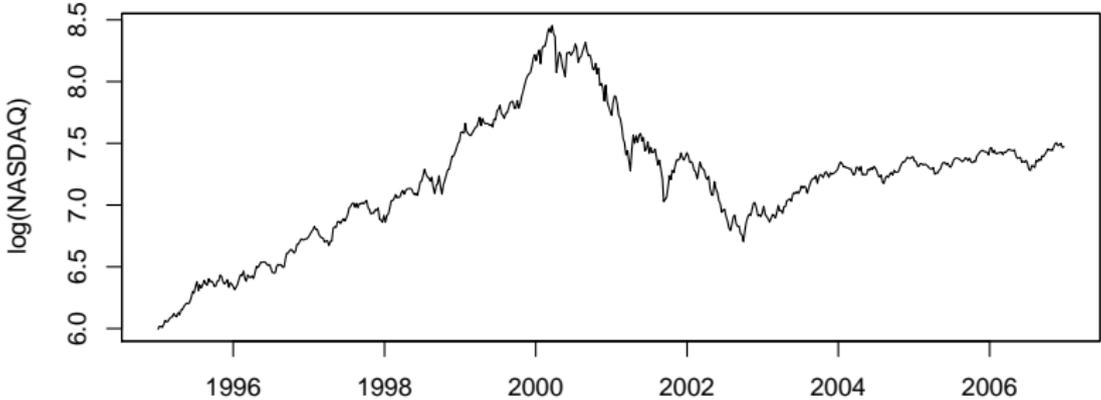
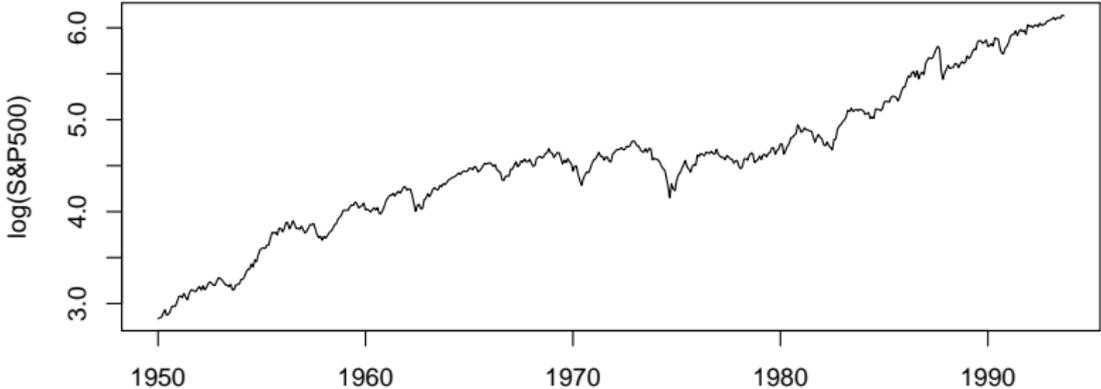
# S&P 500, Jan 1950 - Sep 1993, Monatsdaten



# S&P 500 und NASDAQ-100

- Der S&P 500 (Standard & Poor's 500) ist ein Index der 500 größten Aktiengesellschaften, die an den beiden New Yorker Börsen (New York Stock Exchange und NASDAQ) gehandelt werden. Über den gewählten Zeitraum 1950M1 bis 1993M9 zeigt die S&P 500 Reihe ein exponentielles Wachstum. Dieses basiert wie die Entwicklung eines Guthabens eines Sparbuches auf dem Zinseszinsseffekt. Mittels Logarithmus transformiert man das multiplikative Bildungsgesetz in ein additives. Der transformierte Pfad wird dadurch ungefähr linear.
- Der NASDAQ-100 zeigt einen steilen Anstieg zwischen Mitte 1998 bis März 2000, und danach einen tiefen Abfall um danach wieder in einen "normalen" Wachstumspfad zu drehen. Wir logarithmieren auch hier, da es sich um einen Ausschnitt einer langen Entwicklung handelt.

# log(S&P500) und log(NASDAQ-100)



# Aktienkurs und Rendite

Wir bezeichnen einen beobachteten Aktienkurs mit  $P_t$  und den logarithmierten mit  $p_t = \log(P_t)$ . Aus der Mathematik Vorlesung ist bekannt, dass die Rendite (in stetiger Zeit),  $r_t$ , aus dem Logarithmus des Quotienten berechnet wird,  $r_t = \log(P_t/P_{t-1})$ . Damit ist  $r_t$  die Differenz der logarithmierten Kurse aufeinander folgender Zeitpunkte:

$$r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1}$$

Umgekehrt ergibt sich für den aktuellen logarithmierten Kurs

$$p_t = p_{t-1} + r_t$$

Der aktuelle Kurs ist der Kurs der Vorperiode plus der aktuellen Rendite. Das Modell für den Kurs  $P_t$  selbst ist

$$P_t = P_{t-1} \cdot \exp(r_t)$$

# Hypothese effizienter Märkte (für logarithmierte Reihen)

Die Hypothese effizienter Märkte besagt, dass Finanzmärkte informationseffizient sind. Marktpreise von Aktien enthalten bereits die gesamte verfügbare Information über zukünftige Gewinnaussichten. Formal bedeutet das:

*"Die beste Prognose für den morgigen Aktienkurs ist der heutige Kurs plus einer durchschnittlichen Rendite."*

Damit ist die 1-Schritt Prognose,  $p_t(1)$ , gleich dem zuletzt beobachteten Wert plus einer Konstanten, der durchschnittlichen Rendite.

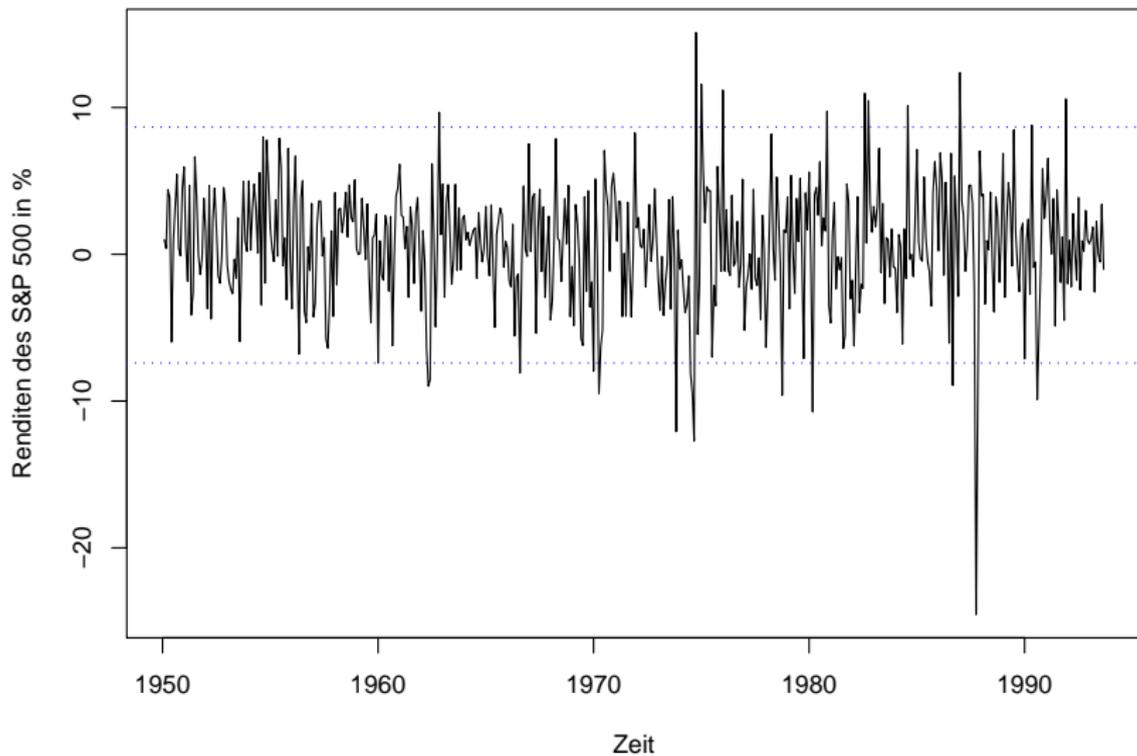
$$p_t(1) = p_t + c$$

Mit Hilfe des Prognosefehlers,  $p_{t+1} - p_t(1) = \epsilon_{t+1}$ , angeschrieben

$$p_{t+1} = p_t + c + \epsilon_{t+1} = p_t + (c + \epsilon_{t+1}) = p_t + r_{t+1}$$

Der Prognosefehler selbst und damit die Rendite darf nicht prognostizierbar sein, damit  $(p_t + c)$  die beste Prognose ist.

# Renditen des S&P 500, Monatsdaten



# Renditen des S&P 500: Beschreibung

Zusammen mit der Renditenreihe haben wir - unter der Annahme normal verteilter Renditen mit konstanter Varianz - ein 95% Intervall um das Mittel eingezeichnet.

Die Renditenreihe verläuft - soweit erkennbar - horizontal. Das Mittel ist leicht positiv umgeben von einer großen Streuung.

n= 524

Mean= 0.00628

Stdev= 0.04104

Wir testen das Mittel auf null:  $H_0 : \mu_r = 0$ ,  $H_A : \mu_r \neq 0$ .

$$T = \text{Mittel} / \sqrt{\text{Varianz}/n} = 0.0063 / \sqrt{0.041^2/524} = 3.5051 > 1.96$$

und können die Nullhypothese klar verwerfen. Die durchschnittliche Monatsrendite für die Periode Jän 1950 bis Sep 1993 beträgt 0.00628 (0.628%). Das ergibt eine durchschnittliche Jahresrendite von 7.54% ( $= 0.00628 \cdot 100 \cdot 12$ ). (Siehe Kapitel 4)

# Nicht-Prognostizierbarkeit und Prognostizierbarkeit

- Renditen  $r_t$  sind nicht prognostizierbar, wenn die Vergangenheit der Reihe,  $\{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1\}$ , (oder andere dritte Variable, die wir aber außer Acht lassen) nicht zur Verbesserung der Prognose verwendet werden können.

Das einzige sinnvolle Regressionsmodell lautet

$$r_t = \alpha_0 + \epsilon_t$$

- Umgekehrt sind Renditen  $r_t$  prognostizierbar, wenn die Vergangenheit der Reihe,  $\{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1\}$ , zur Verbesserung der Prognose verwendet werden kann. Dazu betrachten wir das Regressionsmodell

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_k \cdot r_{t-k} + \epsilon_t, \quad k > 0$$

Es gibt dann ein  $k = 1, 2, 3, \dots$  mit  $\alpha_k \neq 0$ .

## $\alpha_k$ und $Corr(r_t, r_{t-k})$

Aus der Regressionsanalyse (siehe Kapitel 9) wissen wir, dass der Regressionskoeffizient  $\beta_1$  in  $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_t + \epsilon_t$  proportional zum Korrelationskoeffizienten  $Corr(x_t, y_t)$  ist. ( $\beta_1 = \rho_{xy} \cdot \sigma_y / \sigma_x$ )

In unserem Modell  $r_t = \alpha_0 + \alpha_k \cdot r_{t-k} + \epsilon_t$  gilt daher

- entweder

$$\alpha_k = 0, \quad \text{so auch} \quad Corr(r_t, r_{t-k}) = 0$$

- oder

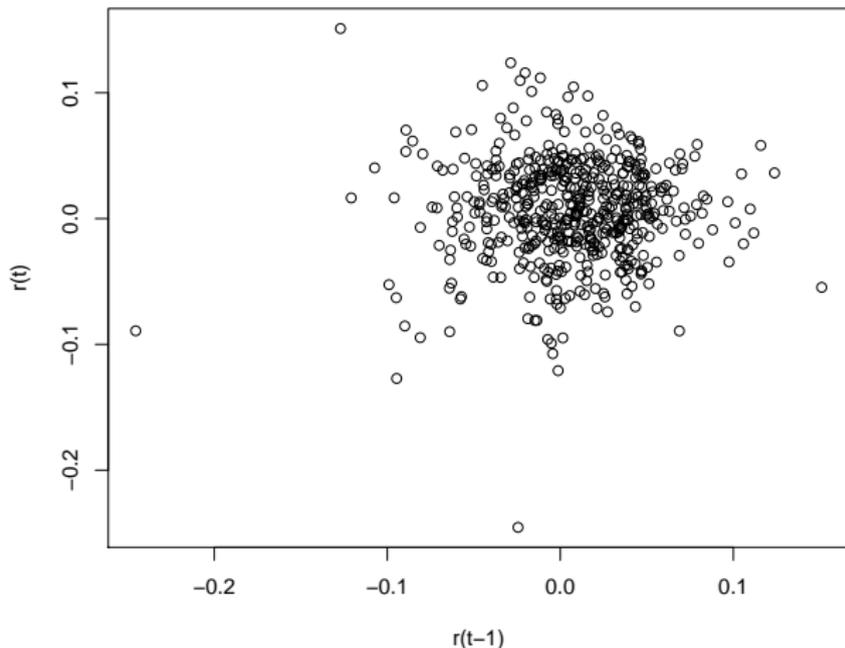
$$\alpha_k \geq 0, \quad \text{so auch} \quad Corr(r_t, r_{t-k}) \geq 0$$

Zeigt  $r_t$  ein horizontales Muster, so gilt  $V(r_t) = V(r_{t-k})$  und die Beziehung vereinfacht sich zu

$$\alpha_k = \rho_k = Corr(r_t, r_{t-k})$$

# Streudiagramm für Renditen des S&P 500, $r_t$ auf $r_{t-1}$

Der empirische Autokorrelationskoeffizient 1-ter Ordnung,  $\hat{\rho}_1$ , ist nahe bei null.



# Autokorrelationskoeffizient, Korrelogramm

Anstelle nun alle Regressionen  $r_t = \alpha_0 + \alpha_k \cdot r_{t-k} + \epsilon_t$ ,  $k = 1, 2, \dots$  zu berechnen, betrachten wir nur die Korrelationskoeffizienten

$$\rho_k = \text{Corr}(r_t, r_{t-k}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$\rho_k$  heißt **Autokorrelationskoeffizient  $k$ -ter Ordnung**. Alle empirischen  $\hat{\rho}_k$  zusammen nennen wir **Korrelogramm**.

$$\{\hat{\rho}_0 = 1, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\rho}_3, \dots\}$$

Für die Hypothese:

$$H_0: \rho_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

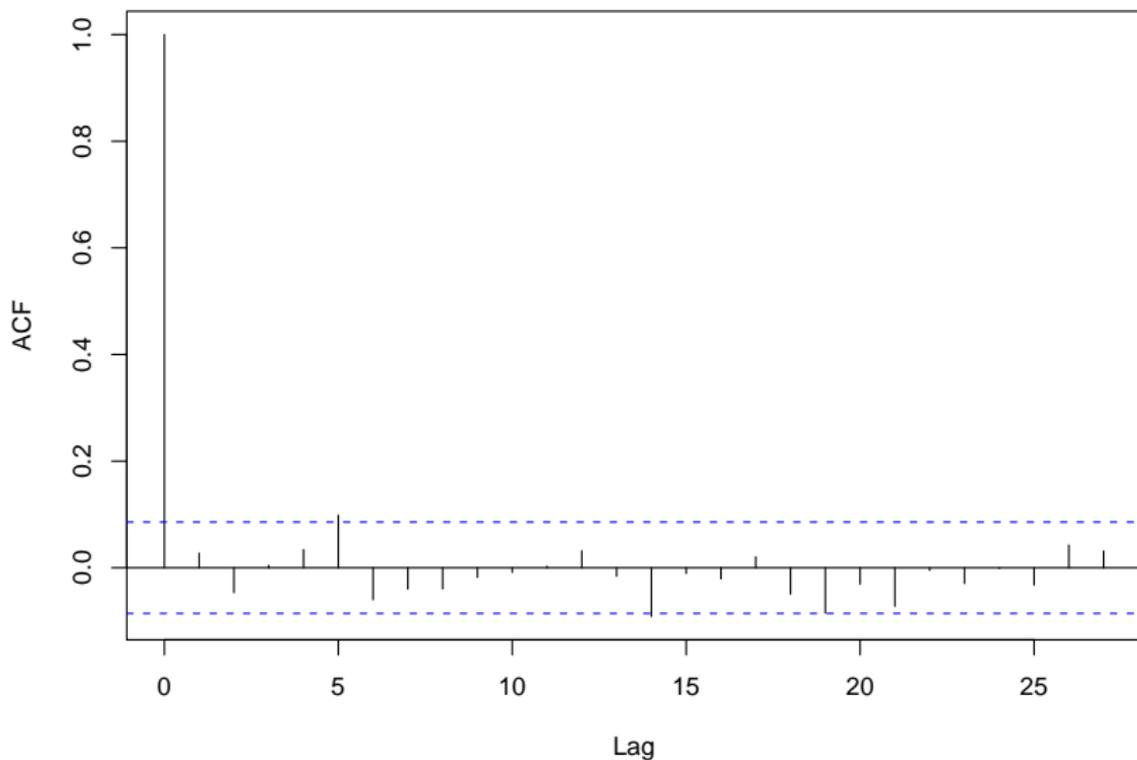
$$H_A: \rho_k \neq 0$$

gibt es einen einfachen Test mit der Statistik

$$\hat{\rho}_k \sim N(0, 1/n)$$

Dieser Test wird für jedes  $k = 1, 2, 3, \dots$  angewandt.

# Korrelogramm der Renditen des S&P 500



# Korrelogramm der Renditen des S&P 500

Das Korrelogramm zeigt die empirischen Autokorrelationskoeffizienten der Ordnung  $k = 0, 1, \dots, 27$ .

Parallel zur Abszisse befinden sich die beiden Grenzen des (95%) "*Beibehaltungsbandes*" für die Nullhypothesen  $\rho_k = 0$ . Als Irrtumswahrscheinlichkeit wird 5% gewählt. Insgesamt wird der Test 27 Mal wiederholt.

Auch wenn alle Nullhypothesen zutreffen, liegen im Durchschnitt 5 von 100, bzw. einer von 20 Werten außerhalb des Bandes.

Das Korrelogramm hat bei  $k = 0$  laut Definition den Wert eins. Die anderen Werte sind sehr klein. Bei Lag 5,  $\hat{\rho}_5$ , schaut der Balken etwas in den Ablehnungsbereich der Nullhypothese.  $\hat{\rho}_{14}$  liegt ebenfalls etwas jenseits der Grenze. Wir interpretieren letzteren als einen von 20, der außerhalb liegen darf. Insgesamt lässt das Korrelogramm nur geringfügige Abweichungen von  $\rho_k = 0$  für  $k = 1, 2, \dots$  vermuten.

# Prognostizierbarkeit: Renditen des S&P 500

Wir überprüfen, ob die Renditen des S&P 500 durch verzögerte (lagged) Renditen erklärt werden können. Unser Regressionsmodell lautet

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_5 \cdot r_{t-5} + \epsilon_t$$

```
rsp500 ~ lag(rsp500, -5)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.00565	0.00182	3.11	0.00196
lag(rsp500, -5)	0.09881	0.04363	2.26	0.02394

Der  $t$ -Test auf  $\alpha_5 = 0$  gibt an, dass der geschätzte Parameter als von null verschieden angesehen werden kann.

# Prognostizierbarkeit: Renditen des S&P 500

Zum Vergleich berechnen wir das Modell unter der Effizienzhypothese

$$r_t = \alpha_0 + \epsilon_t$$

rsp500 ~ 1

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.00627	0.00180	3.48	0.000545

und wollen das kleinere Modell mittels  $F$ -Test gegen das umfangreichere testen. Auf Grund der Einfachheit beider Modelle brauchen wir den  $F$ -Test der ANOVA nicht durchführen und können uns an Hand des  $t$ -Tests von  $\alpha_5$  für das größere Modell,  $r_t = \alpha_0 + \alpha_5 \cdot r_{t-5} + \epsilon_t$ , entscheiden.

Wir haben eine geringfügige Abweichung von der Effizienzhypothese ( $\hat{\alpha}_5$  ist klein) aufgezeigt. Ökonomisch ist diese aber zu hinterfragen, da es keinen ersichtlichen Grund gibt, warum bestimmte Informationen erst genau nach 5 Monaten in den Kursen berücksichtigt werden sollen.

[ Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle ]

# **Autoregressive Modelle**

# Autoregressive Modelle

Das Regressionsmodell, das wir verwendet haben, heißt autoregressives Modell, da die abhängige Variable auf ihre eigene Vergangenheit regressiert wird. Allgemein schreibt man

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_{t-1} + \dots + \alpha_p \cdot r_{t-p} + \epsilon_t$$

und nennt es **autoregressives Modell der Ordnung  $p$** ,  $AR(p)$ .

## Beispiele:

$$AR(1): \quad r_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_{t-1} + \epsilon_t$$

$$AR(2): \quad r_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_{t-1} + \alpha_2 \cdot r_{t-2} + \epsilon_t$$

Angenommen eine Rendite gehorcht einem  $AR(1)$  Modell mit  $|\alpha_1| < 1$ . Der Erwartungswert der Rendite,  $E(r_t) = \mu_r$ , errechnet sich dann über  $\mu_r = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mu_r$  als

$$\mu_r = \alpha_0 / (1 - \alpha_1)$$

## Prognose eines AR(1): $r_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_{t-1} + \epsilon_t$

Gegeben sind  $\{r_n, r_{n-1}, \dots\}$ . Gesucht sind die

- 1-Schritt Prognose:  $r_n(1)$

$$r_{n+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_n + \epsilon_{n+1}$$

Wir kennen das zukünftige  $\epsilon_{n+1}$  nicht. Daher ersetzen wir es durch seinen Erwartungswert,  $E(\epsilon_t) = 0$ :  $\epsilon_n(1) = 0$

$$r_n(1) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_n$$

- 2-Schritt Prognose:  $r_n(2)$

$$r_{n+2} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_{n+1} + \epsilon_{n+2}$$

$\epsilon_{n+2}$  wird ersetzt durch  $\epsilon_n(2) = 0$ .

$r_{n+1}$  wird ersetzt durch  $r_n(1)$ , wie bereits berechnet.

$$r_n(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_n(1) + 0 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot [\alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_n] = \alpha_0 \cdot [1 + \alpha_1] + \alpha_1^2 \cdot r_n$$

# Prognose eines AR(1)

- $k$ -Schritt Progose:  $r_n(k)$

Analog zu oben erhalten wir durch wiederholtes Einsetzen von  $r_n(j)$ ,  $j = 1, \dots, k - 1$ ,

$$r_n(k) = \alpha_0 \cdot [1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1^{k-1}] + \alpha_1^k \cdot r_n$$

Da hier  $-1 < \alpha_1 < 1$  gilt, (den Fall  $\alpha_1 = 1$  behandeln wir unten), verschwindet der Einfluss der letzten Beobachtung,  $r_n$ , mit steigendem  $k$ .

# Rechenbeispiel: Veränderung von Zinssätzen

Gegeben sind die Tagesdaten eines Zinssatzes für 12-Monatsgelder in Prozent. Angenommen die Veränderung des Zinssatzes,  $d_t$ , gehorcht kurzfristig dem Modell

$$d_t = -0.0007 - 0.10 \cdot d_{t-1} + \epsilon_t$$

Die Veränderung im letzten Beobachtungszeitpunkt beträgt  $d_n = 0.125$ .

Die durchschnittliche tägliche Veränderung beträgt hier

$$-0.0007/[1 - (-0.10)] = -0.00064$$

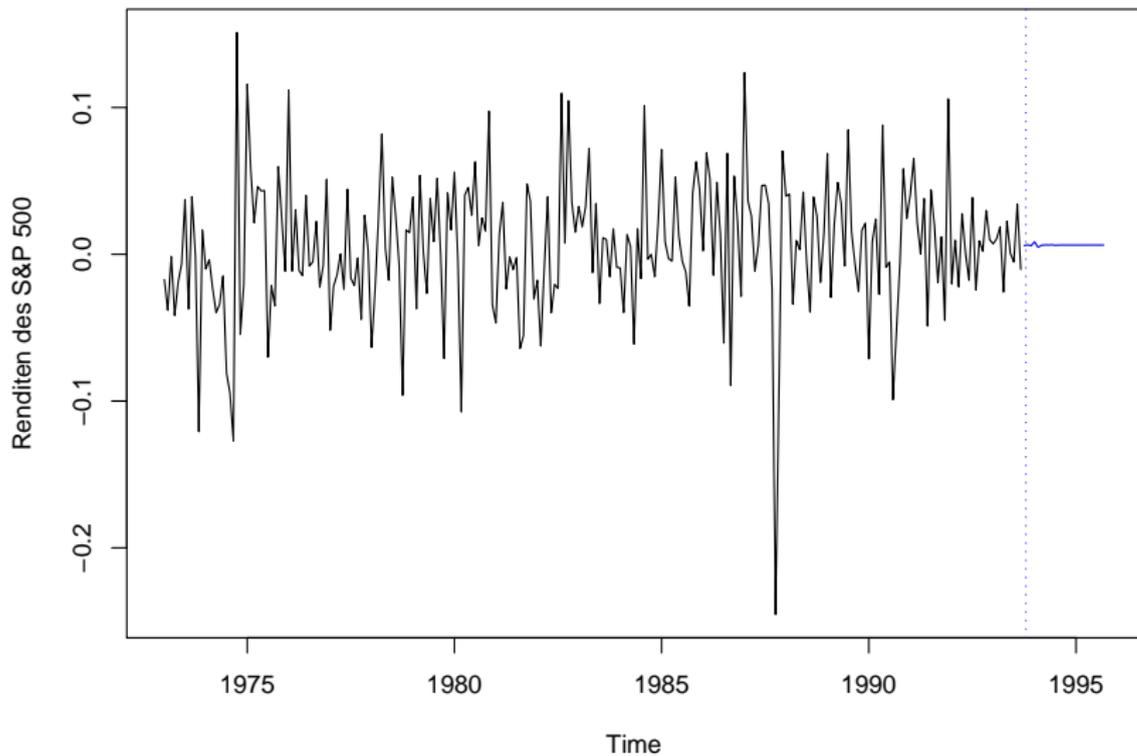
Die 1-Schritt Prognose:

$$d_n(1) = -0.0007 - 0.10 \cdot 0.125 = -0.0132$$

Die 2-Schritt Prognose:

$$d_n(2) = -0.0007 - 0.10 \cdot d_n(1) = 0.00062$$

# Prognose der Renditen des S&P 500: 24 Monate



# Prognose der Renditen des S&P 500: Kommentar

Die Prognosen für  $r_{n+j}$  aus dem Modell ohne zeit-verzögerte Werte

$$r_t = 0.00627 + \hat{\epsilon}_t$$

sind konstant,  $r_n(j) = 0.00627$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Graphisch entspricht das einer Geraden parallel zur Zeitachse.

Das größere Modell

$$r_t = 0.00565 + 0.09881 \cdot r_{t-5} + \hat{\epsilon}_t$$

liefert das gleiche Mittel:

$$\hat{\mu}_r = 0.00565 / [1 - 0.09881] = 0.00627$$

Damit haben beide Modelle langfristig das gleiche Verhalten. Kurzfristig kann das größere Modell die Prognosen geringfügig verbessern. Allerdings verschwinden die kleinen Zacken rasch.

[ Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle ]

# **Prognose der Kurse: S&P 500 und NASDAQ-100**

# Prognose des S&P 500

Das Bildungsgesetz für die logarithmierte Reihe S&P 500 ist

$$p_t = p_{t-1} + r_t, \quad t = 1, \dots, n$$

- Die 1-Schritt Prognose ausgehend vom Zeitpunkt  $n$ ,  $p_n(1)$ , ist daher

$$p_n(1) = p_n + r_n(1)$$

$r_n(1)$  ist die 1-Schritt Prognose für  $r_{n+1}$ .

- Für die Prognose von  $p_{n+2} = p_{n+1} + r_{n+2}$  ersetzen wir alle Variable durch ihre Prognosen.

$$p_n(2) = p_n(1) + r_n(2)$$

Die Prognose  $p_n(1)$  ist bereits bekannt. Eingesetzt ergibt das

$$p_n(2) = [p_n + r_n(1)] + r_n(2) = p_n + [r_n(1) + r_n(2)]$$

# Prognose des S&P 500

- Die  $k$ -Schritt Prognose ausgehend von  $n$  ergibt sich daher als

$$p_n(k) = p_n + [r_n(1) + r_n(2) + \dots + r_n(k)]$$

Die Prognose für  $p_{n+k}$  ist der letzte Wert  $p_n$  plus der Summe aller prognostizierten Renditen,  $r_{n+1}, \dots, r_{n+k}$ .

Die Prognose für  $P_{n+k}$ , dem Niveau der Reihe S&P 500 in  $(n + k)$ , ergibt sich einfach durch  $\exp[p_n(k)]$ .

$$P_n(k) = \exp[p_n(k)]$$

In prognostizierten Renditen ausgedrückt:

$$P_n(k) = \exp[p_n] \cdot \exp[r_n(1)] \cdot \dots \cdot \exp[r_n(k)] = P_n \cdot \prod_{j=1}^k \exp[r_n(j)]$$

# Rechenbeispiel

Angenommen der Kurs einer Aktie ist heute 123.00 € und wir haben an die zugehörigen historischen Renditen erfolgreich ein AR(2) Modell angepasst. Die prognostizierten Renditen für die nächsten 3 Tage sind 0.005, 0.003 und  $-0.002$ .

Wie lauten die Kursprognosen für diese 3 Tage?

Gesucht sind  $P_n(1)$ ,  $P_n(2)$  und  $P_n(3)$ . Laut obiger Formel ergeben sich

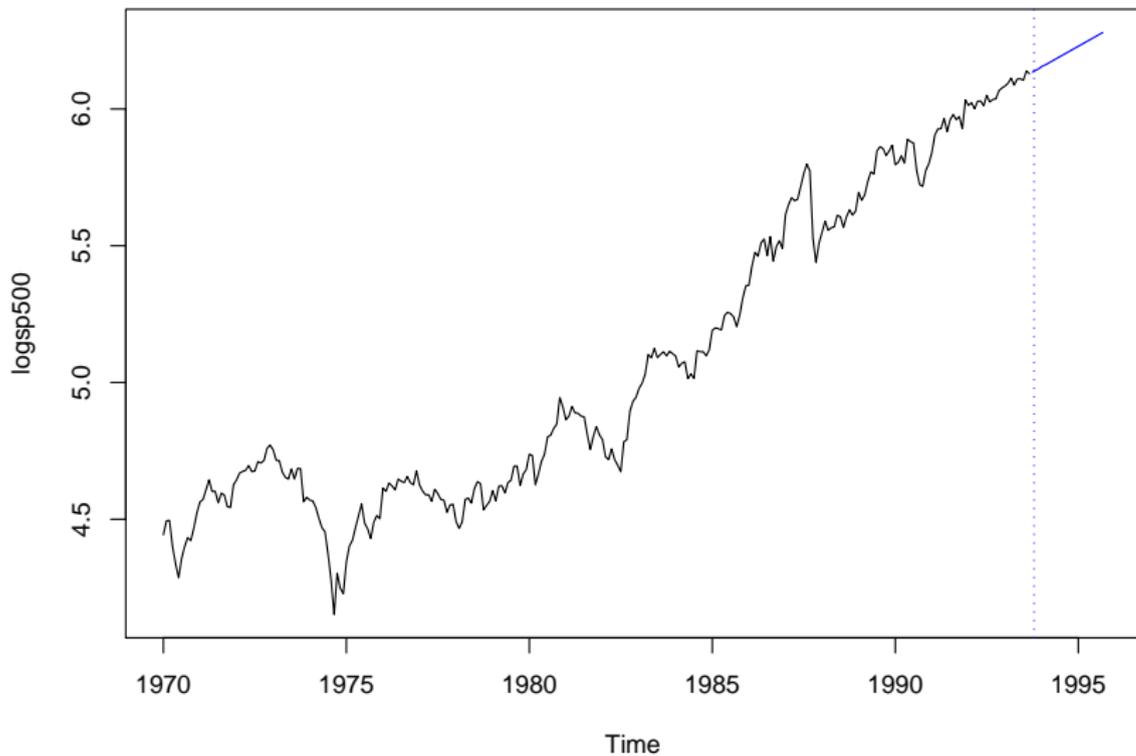
$$P_n(1) = P_n \cdot \exp[r_n(1)] = 123.00 \cdot \exp(0.005) = 123.617$$

$$\begin{aligned} P_n(2) &= P_n \cdot \exp[r_n(1)] \cdot \exp[r_n(2)] = 123.00 \cdot \exp(0.005) \cdot \exp(0.003) \\ &= P_n(1) \cdot \exp(0.003) = 123.988 \end{aligned}$$

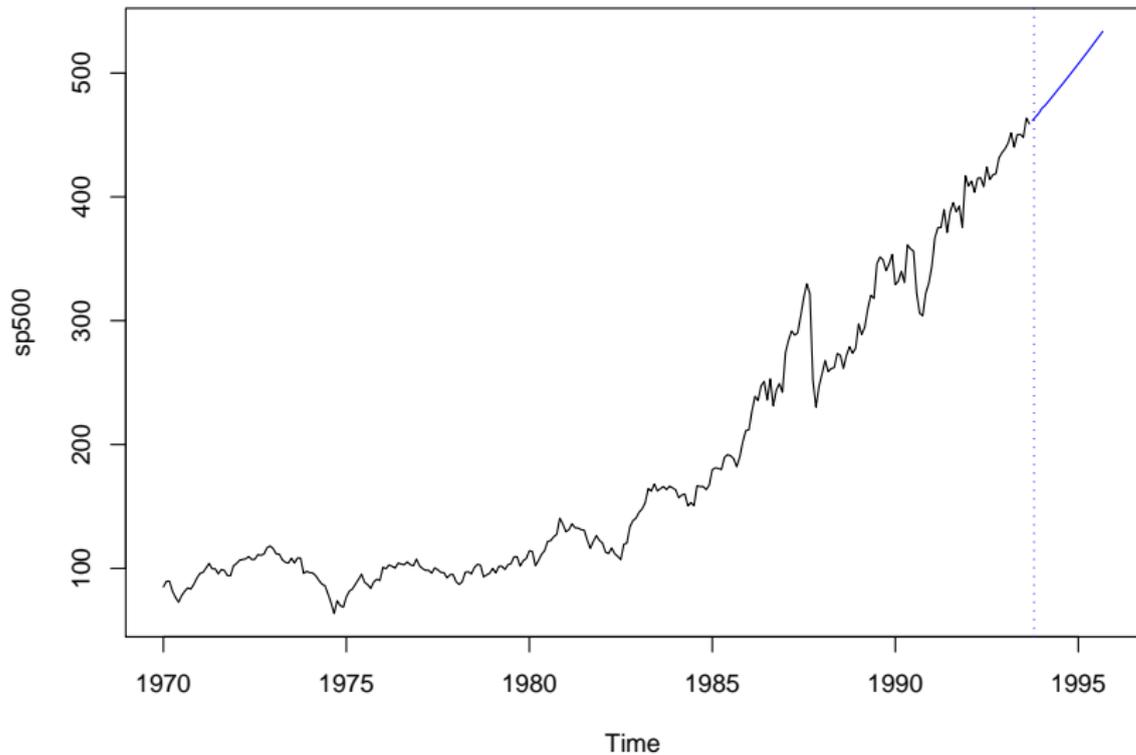
und für

$$P_n(3) = P_n \cdot \prod_{j=1}^3 \exp[r_n(j)] = P_n(2) \cdot \exp(-0.002) = 123.740$$

# Prognose des log(S&P500): 24 Monate



# Prognose des S&P 500: 24 Monate



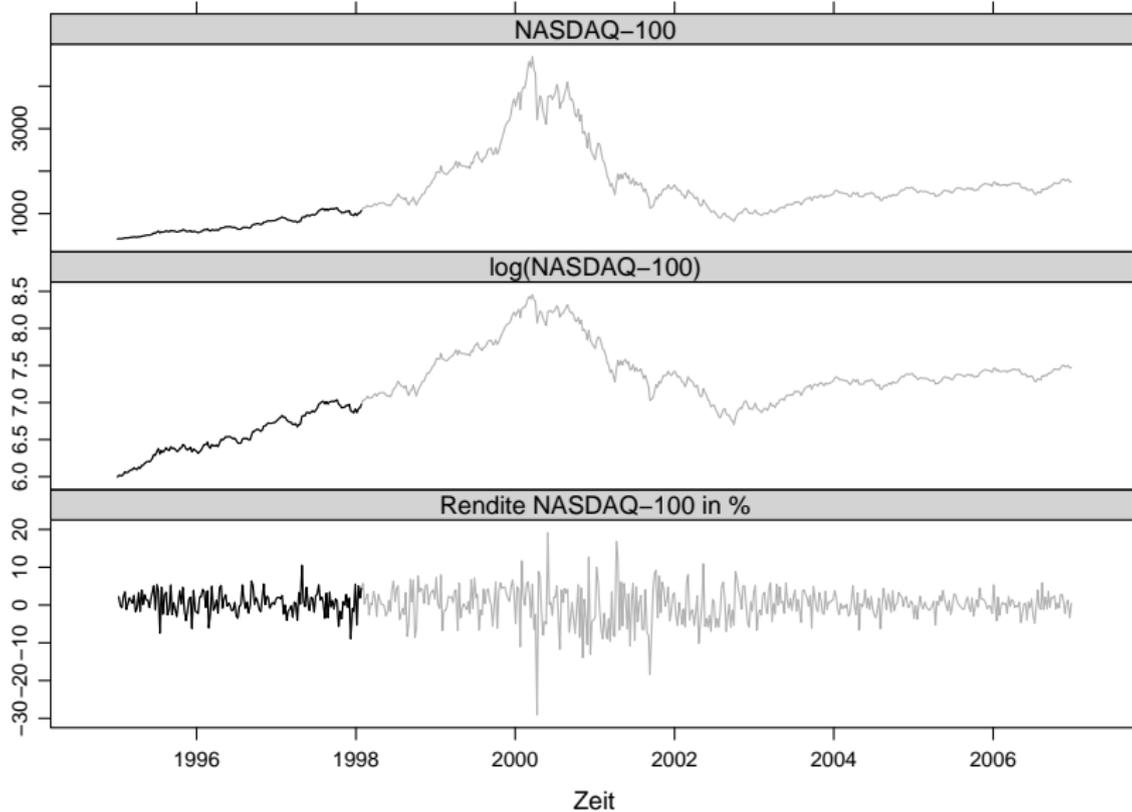
# NASDAQ-100: Prognose

Angenommen wir befinden uns im Jän 1998 und fragen uns, wie die weitere Entwicklung des NASDAQ-100 verlaufen wird.

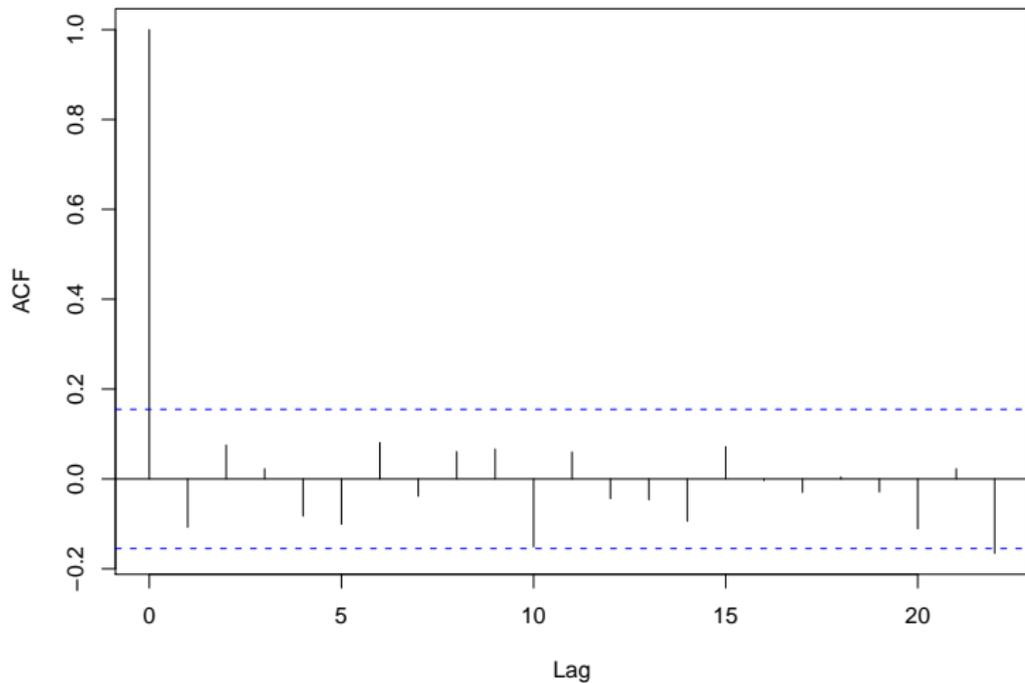
Dazu gehen wir wie oben vor:

- Wir modellieren die Renditereihe für die Periode Jän 1995 bis Jän 1998:
  - Wir plotten die ursprüngliche Reihe, die logarithmierte Reihe und die Renditen.
  - Wir berechnen das Korrelogramm und versuchen die Ordnung des AR Modells zu bestimmen.
  - Dann schätzen wir verschiedene Modellspezifikationen und ermitteln durch Testen die geeignetste.
- Wir prognostizieren den Index mit dem gewählten Modell für die Zeit Feb 1998 bis Dez 2001.

# NASDAQ-100, Jän 95 bis Jän 98



# Korrelogramm für $r(\text{NASDAQ-100})$ bis Jän 1998



# Modell für die Renditen des NASDAQ-100

Das Korrelogramm zeigt nur bei Verzögerung (Lag) 22,  $\hat{\rho}_{22}$ , einen signifikant von null verschiedenen Wert, wenn wir die Autokorrelationskoeffizienten einzeln testen. Da aber Lag 22 der einzige unter 22 Werten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ist, wenden wir die Regel "einer von 20 darf außerhalb liegen" an. Wir gehen daher vom einfachen Modell

$$r_t = \alpha_0 + \epsilon_t$$

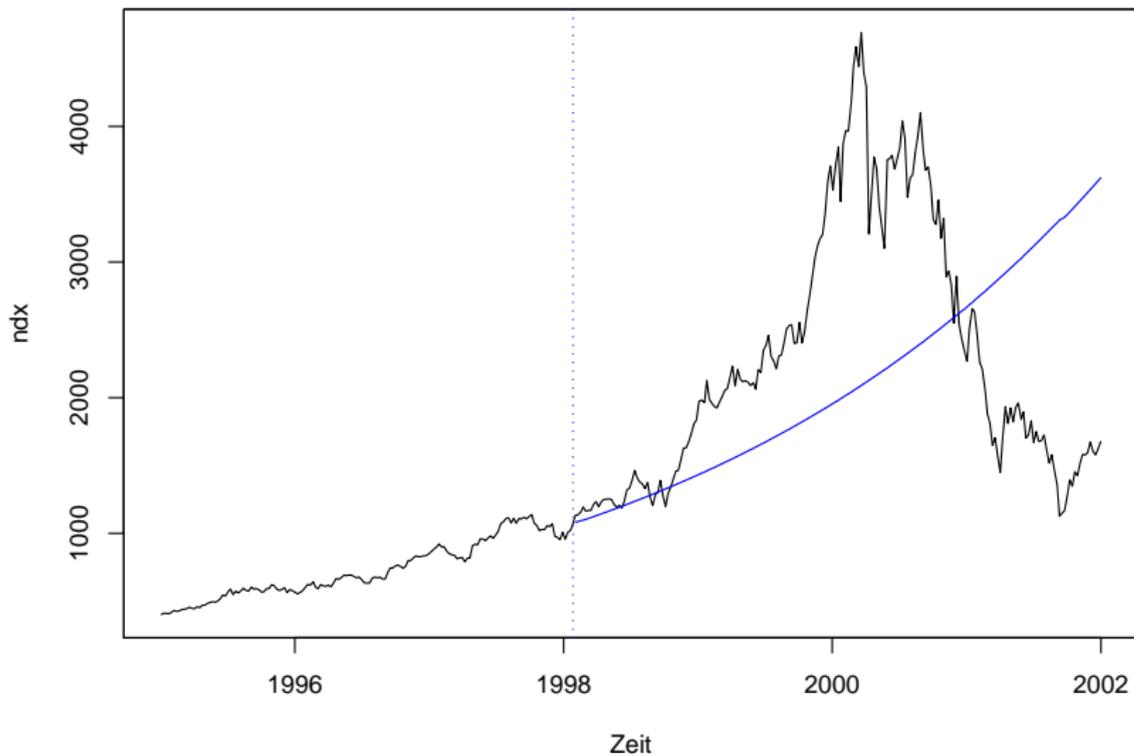
aus.

`rndx ~ 1`

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.00613	0.00229	2.68	0.00825

Die durchschnittliche Jahresrendite ist verschieden von null und beträgt für diese Periode  $0.00613 \cdot 100 \cdot 52 = 31.88\%$  pro Jahr.

# Prognose für NASDAQ-100: Feb 1998 bis Dez 2001



# Prognose für NASDAQ-100: Feb 1998 bis Dez 2001

Wir sehen, dass der steile Anstieg der dot-com Blase, wie auch der anschließende Verfall nicht nachgebildet wird. Ebenso zeigt die Prognose die Rückkehr zu "normalen" Renditen ab 2002 von um die 7% pro Jahr nicht an, sondern schreibt die 33% pro Jahr aus der Beobachtungsperiode fort.

[ Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle ]

# Stationäre Prozesse

# Stationäre Prozesse

Reihen mit einem horizontalen Muster betrachten wir als Realisationen **stationärer Prozesse**. Diese sind charakterisiert durch

- konstantes Mittel
- konstante Varianz
- Autokorrelationen, die nur von der zeitlichen Distanz der Beobachtungen abhängen.

Ein spezieller stationärer Prozess ist der **white noise**, WN,  $\epsilon_t$ . Er besitzt

- ein Mittel von null:  $E(\epsilon_t) = 0$
- eine konstante Varianz:  $V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$
- Autokorrelationskoeffizienten, die für  $k > 0$  null sind:  
 $\rho_k = 0$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$

# Eigenschaften stationärer Prozesse

- Ein white noise ist nicht prognostizierbar. Er besitzt keine dynamische Struktur.
- AR(1) Prozesse sind für  $|\alpha_1| < 1$  stationär.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \epsilon_t$$

Die zugehörigen Korrelogramme klingen geometrisch wie  $\alpha_1^j$  ab.

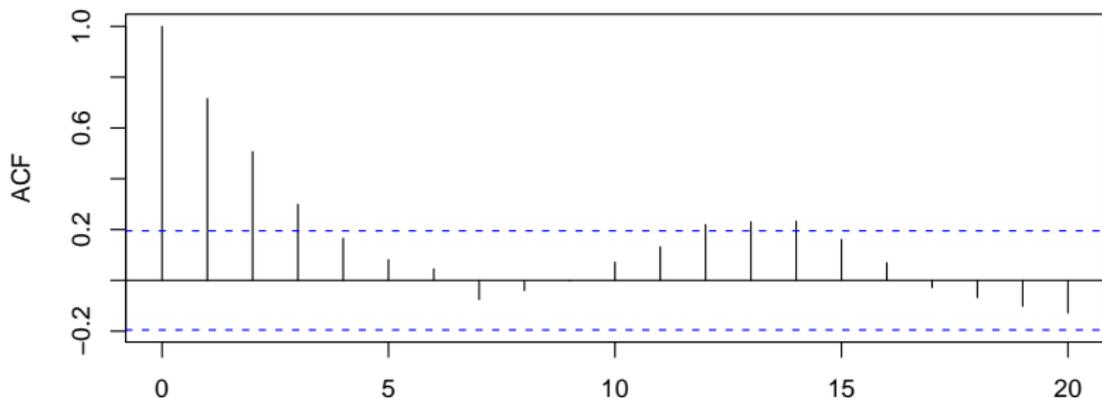
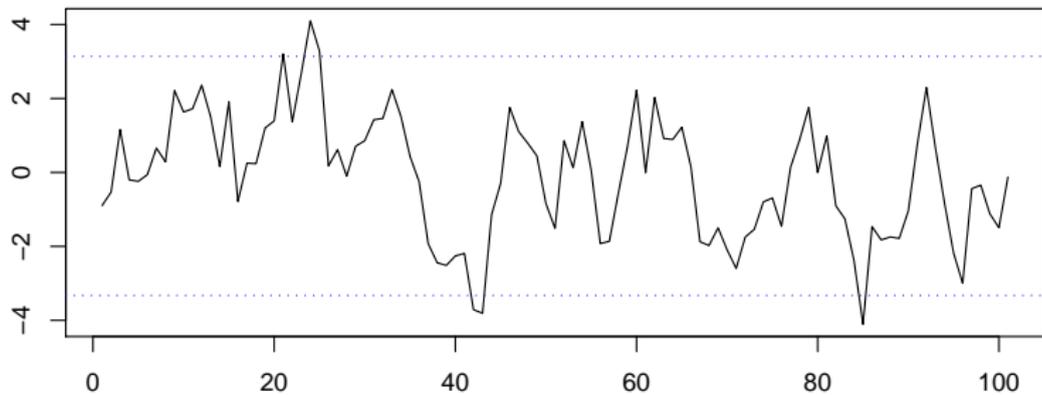
- Ist  $\alpha_1$  positiv, sind alle Autokorrelationskoeffizienten positiv.
- Ist  $\alpha_1$  negativ, so haben die Autokorrelationskoeffizienten alternierende Vorzeichen.

## Beispiele:

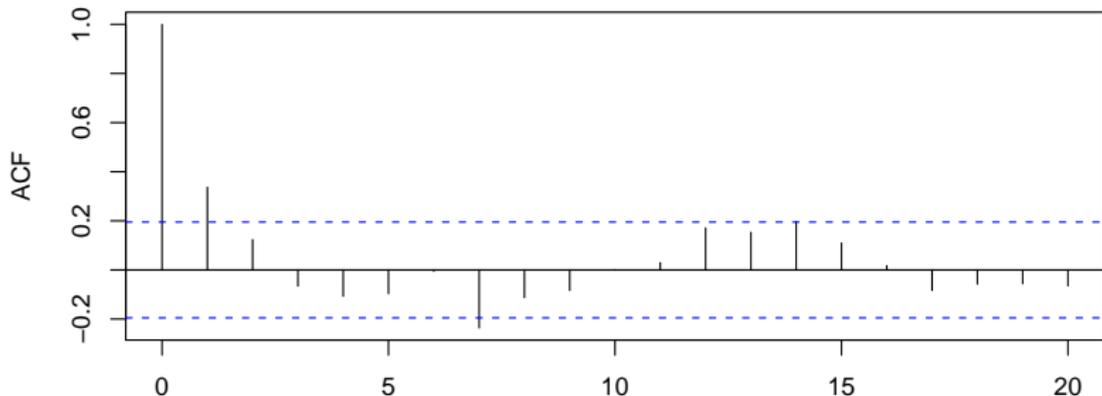
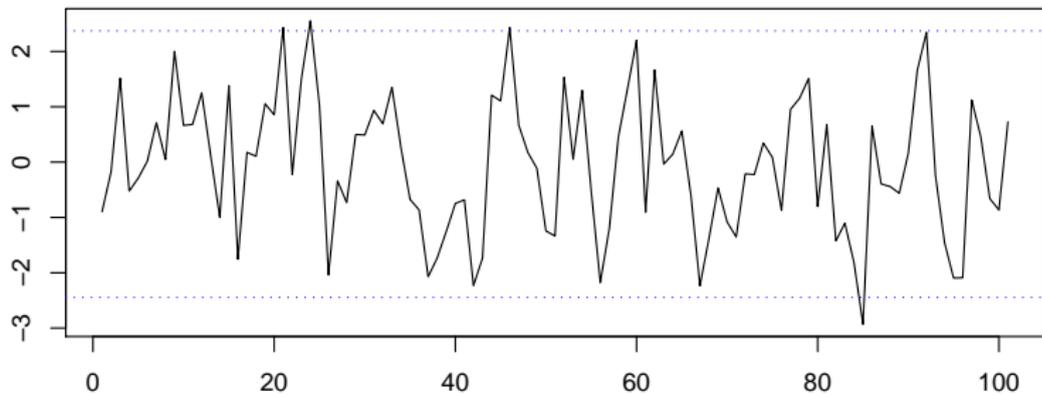
Es folgen zu den AR(1) Prozessen mit  $\alpha_1 = 0.8, 0.4, 0.0(=WN), -0.4,$  und  $-0.8$  je eine Realisation eines Pfades mit zugehörigem Korrelogramm.

Je größer  $\alpha_1$  und die Anzahl der Beobachtungen  $n$ , desto klarer ist der geom. Abfall erkennbar.

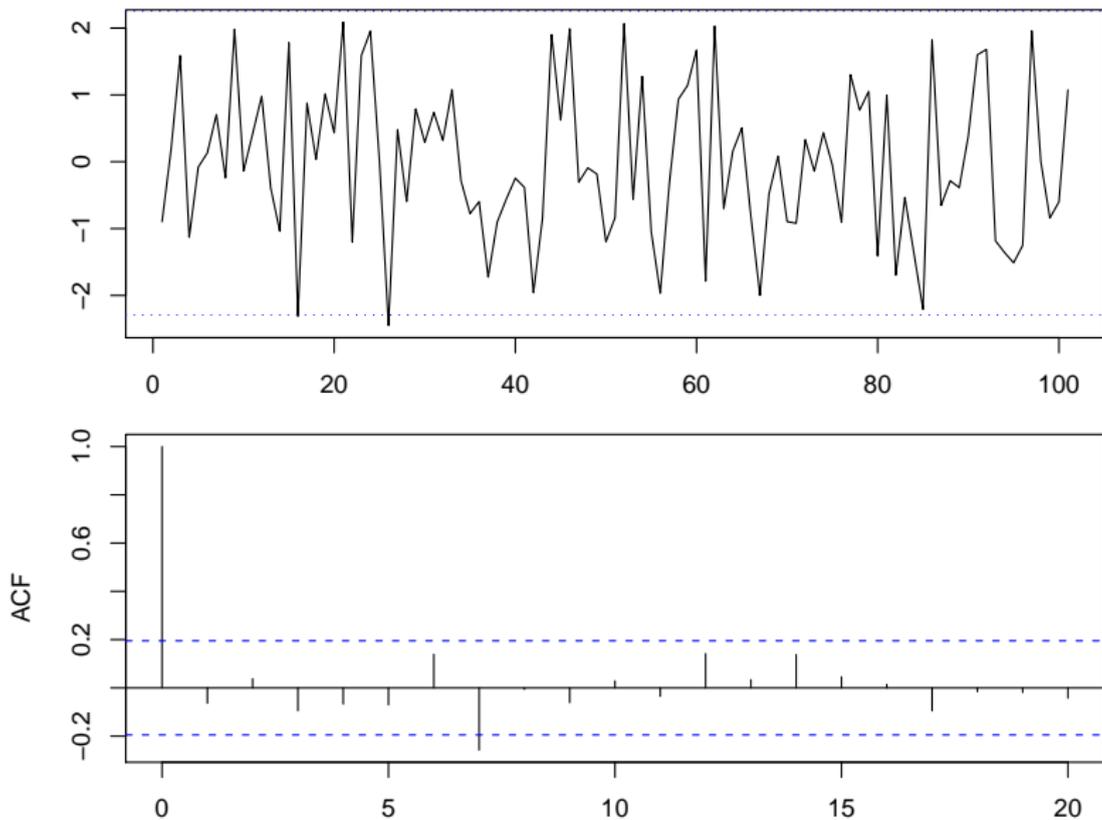
# Bsp. AR(1), $\alpha_1 = 0.8$ : Korrelogramm geom. Abfall



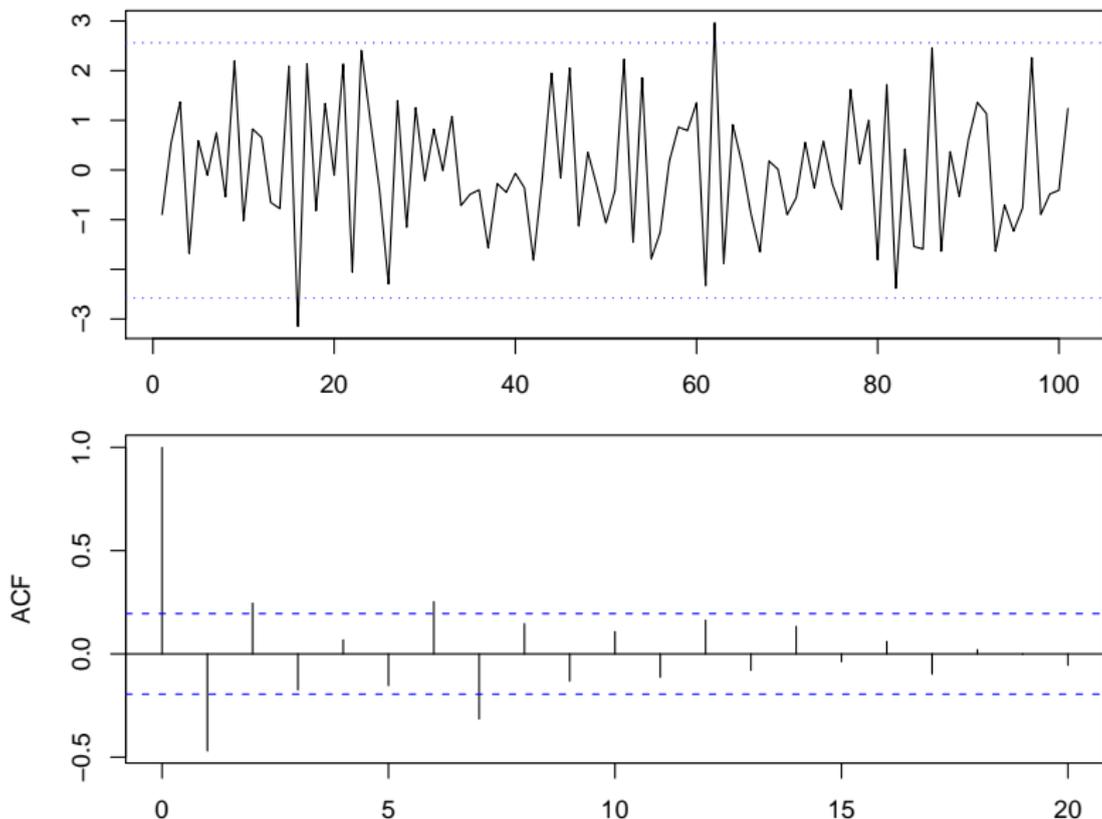
# Bsp. AR(1), $\alpha_1 = 0.4$ : Korrelogramm geom. Abfall



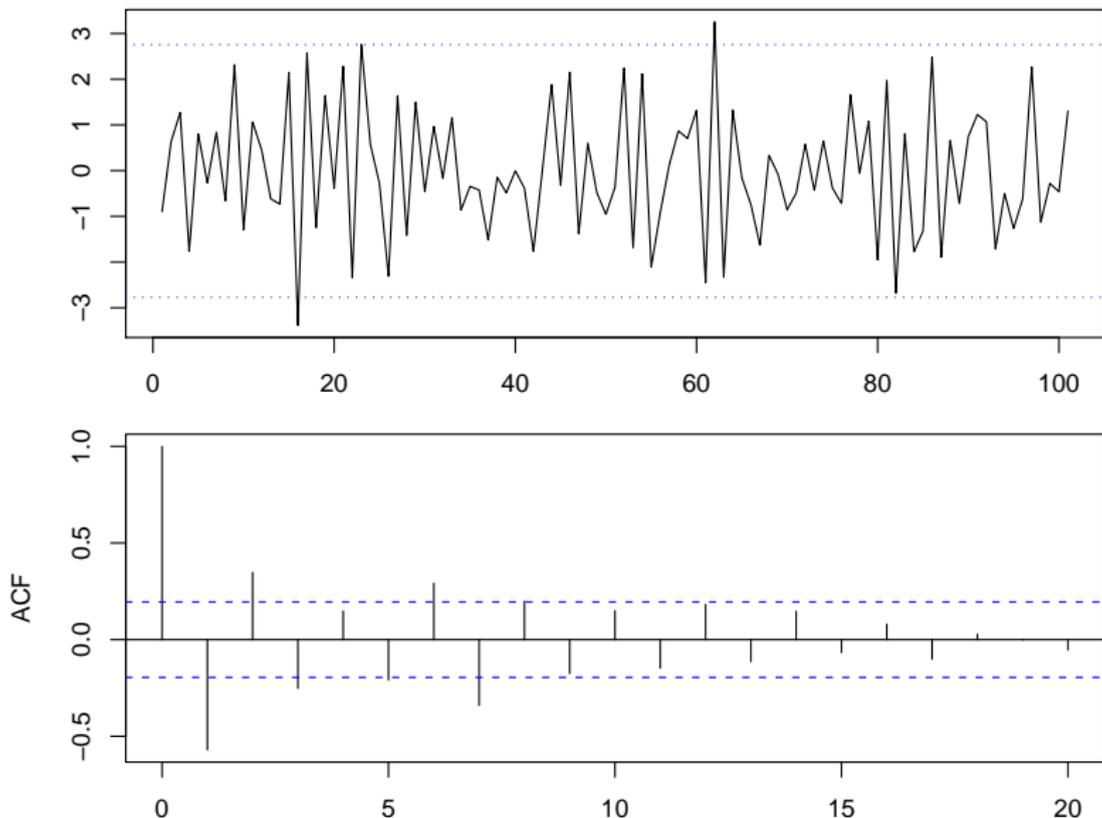
# Bsp. AR(1), $\alpha_1 = 0.0$ : white noise



# Bsp. AR(1), $\alpha_1 = -.4$ : Korrelogramm altern. Abfall



# Bsp. AR(1), $\alpha_1 = -.8$ : Korrelogramm altern. Abfall



[ Stochastische Prozesse und Zeitreihenmodelle ]

# **Nicht-stationäre Prozesse**

# Nicht-stationäre Prozesse, der random walk, RW

Setzt man in das Bildungsgesetz eines AR(1)  $\alpha_1 = 1$ , so erhält man einen **random walk mit Drift**.

$$y_t = c + y_{t-1} + \epsilon_t$$

Dieses Modell haben wir bereits für den logarithmierten Aktienkurs unter der Effizienzhypothese kennengelernt. Ein random walk mit Drift ist nicht stationär, weil

- das Mittel mit der Zeit steigt, also nicht konstant ist, und
- die Varianz mit der Zeit steigt. Das 95%-Intervall, in dem sich der Pfad bewegt, liegt ausgehend vom Startwert symmetrisch um den Drift und verbreitert sich mit  $\sqrt{t}$ .

Das Korrelogramm eines random walk geht mit steigendem  $k$  nur langsam (linear) gegen null.

# Pfade von random walk Prozessen

## Beispiele:

Es folgen Pfade und Korrelogramme

- eines RW ohne Drift (3 Pfade)

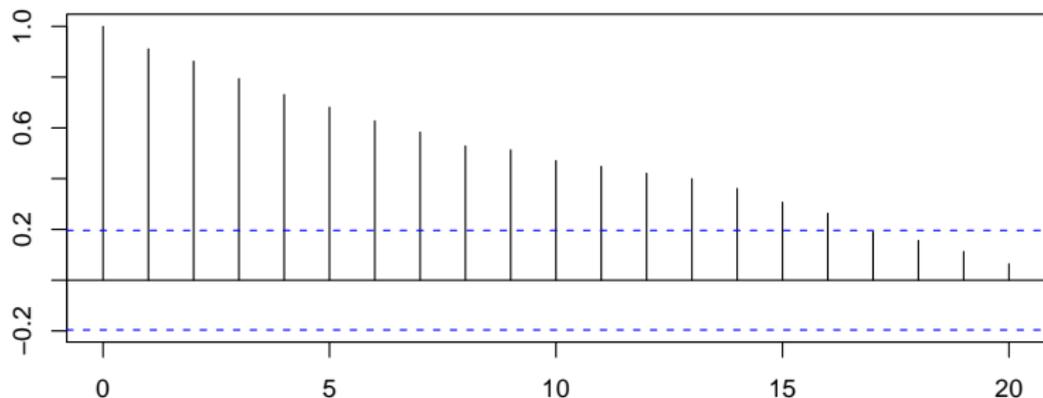
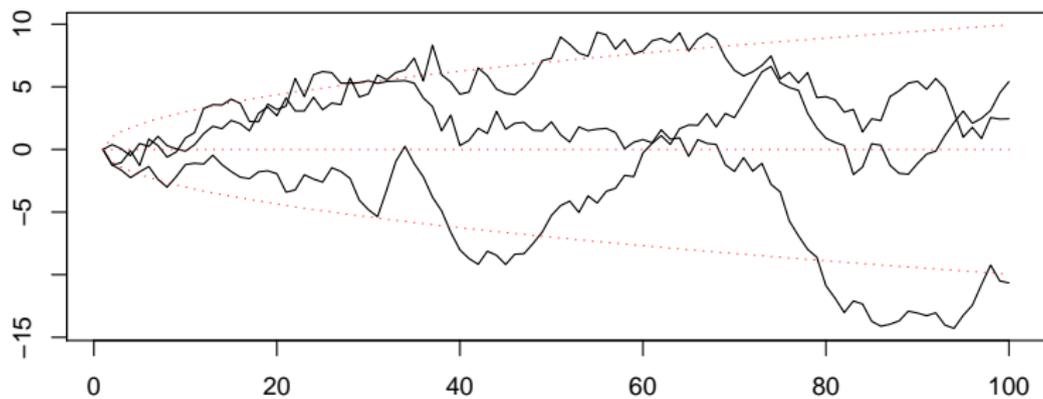
$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

mit  $\sigma_\epsilon^2 = 1$ .

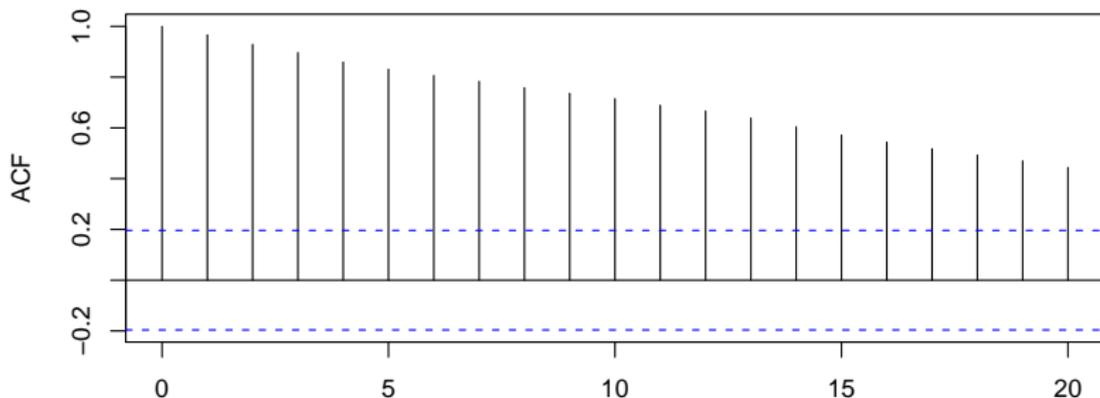
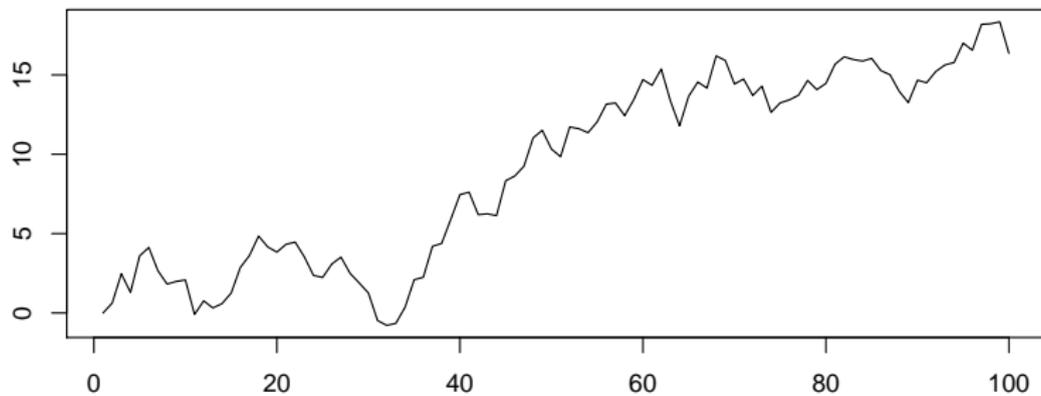
Zusätzlich wird das Intervall angegeben, in dem sich die Pfade mit 95% befinden. Es wächst mit  $\sqrt{t}$ . Dies ist ein markanter Unterschied zu einem linearen Trend, bei dem der 95% Bereich um die deterministische Funktion konstant ist.

- eines RW mit Drift,  $c = 0.1$ , und  $\sigma_\epsilon^2 = 1$ .

# RW ohne Drift: Korrelogramm linearer Abfall



# Random walk mit Drift: Korrelogramm linearer Abfall



# Inhalt

- Notation
- Zusammenhang zwischen Aktienkursen und Renditen
- Effiziente Markthypothese
- Autoregressive Modelle der Ordnung  $p$ ,  $AR(p)$
- Autokorrelationskoeffizient, Korrelogramm
- Stationäre Prozesse, white noise,  $AR(p)$
- Nicht-stationäre Prozesse, random walk
- Modellierung und Prognose nicht-stationärer Prozesse