1 Differenzengleichungen 1. Ordnung

B1/4: Geben Sie verschiedene Anschreibungen der Differenzengleichung $y_t = 0.95y_{t-1} + 1$ an.

$y_t = 0.95y_{t-1} + 1$

$y_t - 0.95y_{t-1} = 1$

$y_{t+1} - 0.95y_t = 1$

$y_{t+s} - 0.95y_{t+(s-1)} = 1$ ... $s \in \mathbb{N}$

$\triangle y_t = 1 - 0.05y_{t-1}$

B2/6: Lösen Sie iterativ:

a) $y_t = y_{t-1} + 1$

$y_t = y_{t-1} + 1$

y_0...Anfangswert

$y_1 = y_0 + 1$

$y_2 = (y_0 + 1) + 1 = y_0 + 2$

$y_3 = (y_0 + 2) + 1 = y_0 + 3$

...

$y_t = y_0 + t$

iterative Methode allgemein:

Für $y_{t+1} - by_t = c$ gilt: $y_t = b^t y_0 + c\sum_{i=0}^{t-1} b^i$

$y_t - y_{t-1} = 1$

$\Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow y_t = 1^t y_0 + 1\sum_{i=0}^{t-1} 1^i \Rightarrow y_t = y_0 + t$

b) $y_{t+1} + 0.1y_t = 2$

$y_{t+1} + 0.1y_t = 2$

$y_t = 2 - 0.1y_{t-1}$

y_0...Anfangswert

$y_1 = 2 - 0.1y_0$

$y_2 = 2 - 0.1(2 - 0.1y_0) = 2 - 0.2 + 0.01y_0 = 2 - 2 \cdot 0.1 + 0.1^2 \cdot y_0 = 2[1 + (-0.1)] + (-0.1)^2 \cdot y_0$

$y_3 = 2 - 0.1(2(1 + (-0.1)) + (-0.1)^2 \cdot y_0) = 2 - 0.2 + 0.02 - 0.001y_0 =$

$= 2 + 2(-0.1) + 2(-0.1)^2 + (-0.1)^3 \cdot y_0 = 2[1 + (-0.1) + (-0.1)^2] + (-0.1)^3 \cdot y_0$

$y_t = (-0.1)^t y_0 + 2\sum_{i=0}^{t-1}(-0.1)^i = 2[1 + (-0.1) + (-0.1)^2 + ... + (-0.1)^{t-1}] + (-0.1)^t \cdot y_0$

B3/10f: Welche Eigenschaft hat die partikuläre und die komplementäre Lösung einer LDG?

Die Lösung einer LDG sieht allgemein so aus:

$y = y_p + y_c$

Falls y_p existiert, ist es die partikuläre Lösung. Das ist irgendeine Lösung der LDG. Zum Beispiel ist y_p das intertemporale Gleichgewicht. Erreicht ein Zeitpfad im Zeitpunkt t ein stationäres Gleichgewicht, dann bedeutet das, dass die folgenden y (also y_{t+1}, y_{t+2}, ...) alle gleich sind, also y ändert sich nicht mehr.

Falls y_c existiert, ist es die komplementäre Lösung. y_c stellt die Abweichung des Zeitpfades von seinem langfristigen Gleichgewicht dar. Wenn die komplementäre Lösung y_c gegen 0 konvergiert, wenn t $\to \infty$, dann bedeutet das, dass der Zeitpfad gegen sein Gleichgewicht konvergiert. Bei einer LDG 1. Ordnung konvergiert die komplementäre Lösung y_c gegen 0, wenn $|b| < 1$.

B4/10f: Lösen Sie die LDGen:

a) $y_{t+1} + 0.5y_t = 3$, $y_0 = -1$

allgemeine Form: $y_{t+1} + ay_t = c$

partikuläre Lösung: Wir suchen das intertemporale Gleichgewicht:

$y_{t+1} = y_t = k = y_p$

$a = 0.5$ $(a \neq -1)$

$k + 0.5k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{1.5} = 2 = y_p$

komplementäre Lösung: allgemeiner Ansatz: $y_t = Ab^t$

$Ab^{t+1} + 0.5Ab^t = 0$

$\Rightarrow b + 0.5 = 0 \Rightarrow b = -0.5$

$\Rightarrow y_c = A(-0.5)^t$

$y = y_c + y_p \Rightarrow y_t = A(-0.5)^t + 2$

für t = 0 gilt:

$y_0 = A(-0.5)^0 + 2 = A + 2 = -1$

$\Rightarrow A = -3$

$\Rightarrow y_t = -3(-0.5)^t + 2$

b) $y_{t+1} - y_t = 3$, $y_0 = 0$

partikuläre Lösung:

$a = -1 \Rightarrow y_{t+1} = y_t = k = y_p$ ist nicht definiert.

alternativer Ansatz: $y_p = kt$

$k(t+1) - kt = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{t+1-t} = 3 = c \Rightarrow y_p = 3t$

komplementäre Lösung:

Ansatz: $y_t = Ab^t$

$Ab^{t+1} - Ab^t = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y_c = A$

$y = y_p + y_c \Rightarrow y_t = A + 3t$

$y_0 = A + 3 \cdot 0 = A = 0 \Rightarrow y_t = 3t$

B5/20f: Welche Stabilitätseigenschaften haben die LDGen:

a)1) $y_{t+1} + 0.5y_t = 3$

komplementäre Lösung:

$Ab^{t+1} + 0.5Ab^t = 0 \Rightarrow b + 0.5 = 0 \Rightarrow b = -0.5$

$\Rightarrow$ die komplementäre Lösung $y_c = Ab^t$ hat ein alternierendes Vorzeichen und konvergiert gegen 0. Folglich nähert sich der Zeitpfad y_p an, wobei das Vorzeichen ständig wechselt.

a)2) $y_{t+1} - 10y_t = 2$

komplementäre Lösung:

$$Ab^{t+1} - 10Ab^t = 0 \Rightarrow b - 10 = 0 \Rightarrow b = 10$$

$\Rightarrow$ die komplementäre Lösung $y_c = Ab^t$ konvergiert nicht, sie geht gegen ∞. Folglich konvergiert der Zeitpfad auch nicht gegen y_p, sondern divergiert.

b) $y_t = y_{t-1} + 1$, $y_0 = 0$

komplementäre Lösung:

$$Ab^{t+1} - Ab^t = 0 \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = -1$$

$\Rightarrow y_c = A$ und $y_t = A + ct$. y_c explodiert nicht und konvergiert nicht. y_t geht linear gegen unendlich. Der Zeitpfad hängt langfristig vom Anfangswert $y_0 = A$ ab.

B6/26: Geben Sie den dynamischen Multiplikator ($\partial y_{t+10}/\partial c_t$) zu

a) $y_t = 0.95y_{t-1} + c_t$ an.

allgemeine Form: $y_{t+1} - by_t = c_{t+1}$

$$\Rightarrow b = 0.95$$

$$\frac{\partial y_{t+10}}{\partial c_t} = b^{10} = 0.95^{10} = 0.60$$

Dieses Ergebnis zeigt, wie sich eine Änderung von c_t auf das y 10 Perioden später, also auf y_{t+10}, auswirkt (dynamischer Multiplikator).

b) $y_{t+1} + 0.1y_t = c_{t+1}$ an.

$$\frac{\partial y_{t+10}}{\partial c_t} = b^{10} = (-0.1)^{10} = \text{dynamischer Multiplikator.}$$

2 Taylorreihen

B1/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term 1. Ordnung und 2. Ordnung für $f(x) = 2 + 3x$, Entwicklungsstelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 2 und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

Taylor - Formel:

$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$f'(x) = 3$

$f''(x) = 0$

Taylorreihe 1. Ordnung:

$f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = 5 + 3(x - 1) = 3x + 2$

Taylorreihe 2. Ordnung:

$f(x) \approx p_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 3x + 2 + 0 = 3x + 2$

$f(2) = 8$

$p_1(2) = p_2(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

B2/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term 1. Ordnung und 2. Ordnung für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, Entwicklungsstelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 2 und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Taylorreihe 1. Ordnung:

$f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x$

Taylorreihe 2. Ordnung:

$f(x) \approx p_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 2 - x + (x - 1)^2 = x^2 - 3x + 3$

$f(2) = \frac{1}{2}$

$p_1(2) = 0$

$p_2(2) = 4 - 6 + 3 = 1$

B3/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term 1. Ordnung und 2. Ordnung für die Funktion $f(x) = \log(x)$, Entwicklungsstelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 2 und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Taylorreihe 1. Ordnung:

$f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = (x - 1)$

Taylorreihe 2. Ordnung:

$f(x) \approx p_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

$f(2) = 0.69$

$p_1(2) = 1$

$p_2(2) = 0.5$

B4/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term 1. Ordnung und 2. Ordnung für die Funktion $f(x) = \exp(x)$, Entwicklungsstelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 1 und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 1.

$f'(x) = \exp(x)$

$f''(x) = \exp(x)$

Taylorreihe 1. Ordnung:

$f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = e + e(x - 1)$

Taylorreihe 2. Ordnung:

$f(x) \approx p_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2$

$f(1) = e$

$p_1(1) = e$

$p_2(1) = e$

B5/15ff: $f(x) = 7\exp(1.5x)$. **Geben Sie eine lineare Approximation für die Veränderung der Funktion** $\triangle f$ **an: a) allgemein, b) an der Stelle 2, c) an der Stelle 2 und für** $\triangle x = 1$.

Allgemein: $\triangle f(x_0) \approx \frac{f'(x_0)}{1!}\triangle x + \frac{f''(x_0)}{2!}\triangle x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\triangle x^n$

wobei gilt:

$$\triangle f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \text{ und } \triangle x = x - x_0$$

Taylorreihe 1. Ordnung (lineare Approximation):

$$f'(x) = 7 \cdot 1.5\exp(1.5x) = 10.50 \cdot e^{1.5x}$$

$$\triangle f(x_0) \approx \frac{f'(x_0)}{1!}\triangle x = 10.50 \cdot (4.48)^{x_0} \cdot \triangle x$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow \triangle f(x_0) \approx 10.50 \cdot (4.48)^{x_0} \cdot \triangle x = 10.50 \cdot (4.48)^2 \cdot \triangle x = 210.90 \cdot \triangle x$$

$$x_0 = 2 \text{ und } \triangle x = 1 \Rightarrow \triangle f(x_0) \approx 210.90$$

B6/20: $Y = f(X) = 7\exp(1.5X)$. $X \sim N(2, 3)$. **Geben Sie die Approximationen 1. Ordnung und 2. Ordnung für den Erwartungswert von Y nach der Delta Methode an.**

$$f'(x) = 7 \cdot 1.5\exp(1.5x) = 10.50 \cdot e^{1.5x}$$

$$f''(x) = 7 \cdot 1.5 \cdot 1.5\exp(1.5x) = 15.75 \cdot e^{1.5x}$$

Taylorreihe 1. Ordnung, Entwicklungsstelle $x_0 = \mu = 2$

$$f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = 140.60 + 210.90(x - 2)$$

$$E(f(x)) \approx E(p_1(x)) = 140.60 + 210.90 \cdot (2 - 2) = 140.60$$

Taylorreihe 2. Ordnung, Entwicklungsstelle $x_0 = \mu = 2$

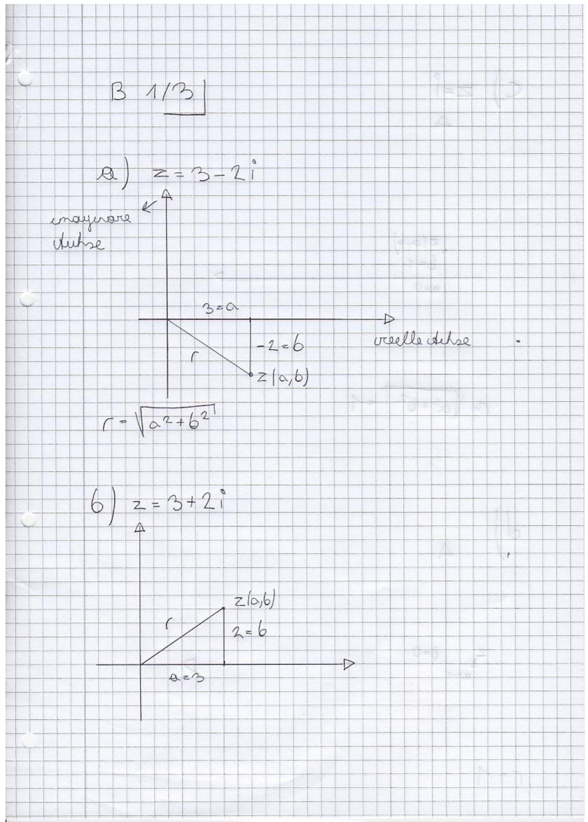
$$f(x) \approx p_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

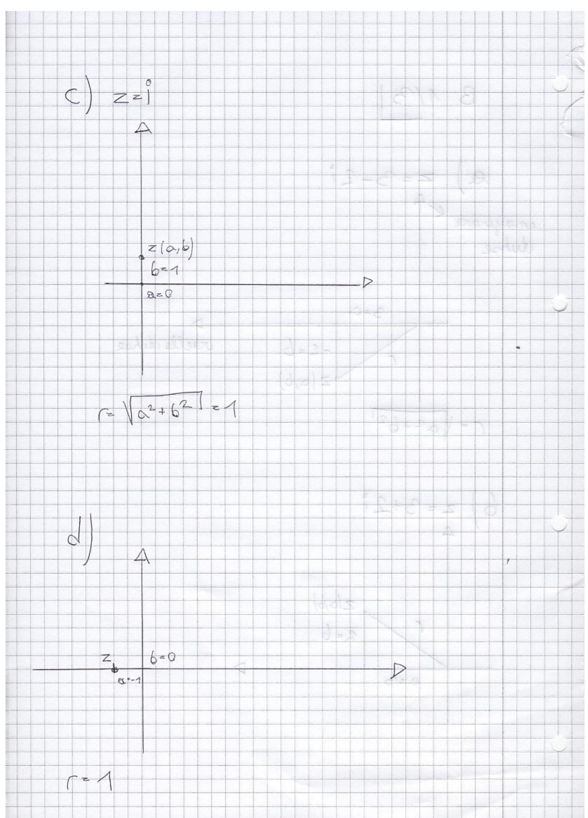
$$E(f(x)) \approx E(p_2(x)) = f(\mu) + \frac{f''(\mu)}{2!}\sigma^2$$

$$\sigma^2 = 3 \Rightarrow E(f(x)) \approx E(p_2(x)) = 140.60 + \frac{15.75 \cdot (4.48)^2}{2}3 = 615.12$$

3 Komplexe Zahlen

Beispiel: B1/3, a) $r = \sqrt{13}$





B2/4: Berechnen Sie i^2, i^4, i^{41}.

$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^{41} = i^{10\cdot 4+1} = 1 \cdot i^1 \Rightarrow i^{41} = i$

B3/6: Berechnen Sie die Nullstellen von:

a) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

b) $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{2} \cdot i$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

B4/8ff: Gegeben sind $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 1 - i$. Berechnen Sie:

a) $z_1 + z_2 = 3 + 2i$

b) $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

c) $z_1 z_2 = (2 - (-3)) + i(-2 + 3) = 5 + i$

d) $z_1/z_2 = \frac{1}{1^2+(-1)^2}((2 + (-3)) + i(2 + 3)) = \frac{1}{2}(-1 + 5i)$

e) $|\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{13}$

B5: Berechnen Sie den Betrag, $|x|$, von $x = 2$, $x = -3$, $x = 1 + i\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}(1 - i\sqrt{2})$

$x = 2 \Rightarrow x = 2 + 0 \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow |x| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$x = -3 \Rightarrow x = -3 \cdot 0\sqrt{-1} \Rightarrow |x| = \sqrt{3^2} = 3$

$x = 1 + \sqrt{2}i \Rightarrow |x| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}i \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

B6/19ff: Stellen Sie die komplexen Zahlen in der Polarkoordinaten- und Exponentialdarstellung dar:

a) $z = 3 - 2i$

Polarkoordinatendarstellung: $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$a = r\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \tfrac{a}{r} = \tfrac{3}{\sqrt{13}} = 0.83 \Rightarrow \cos^{-1}(0.83) = 0.59 = \theta$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{13}(\cos(0.59) - i\sin(0.59)) = 3 - 2i$$

Exponentialnotation:

$$z = \sqrt{13}(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = \sqrt{13} \cdot e^{-i\theta} = \sqrt{13} \cdot e^{-i0.59}$$

b) $z = 3 + 2i$

Polarkoordinatendarstellung:

$$r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$a = r\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \tfrac{a}{r} = \tfrac{3}{\sqrt{13}} = 0.83 \Rightarrow \cos^{-1}(0.83) = 0.59 = \theta$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{13}(\cos(0.59) + i\sin(0.59)) = 3 + 2i$$

Exponentialnotation:

$$z = \sqrt{13}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \sqrt{13} \cdot e^{i\theta} = \sqrt{13} \cdot e^{i0.59}$$

c) $z = i = 0 + 1 \cdot i$

Polarkoordinatendarstellung:

$$r = \sqrt{0+1} = 1$$

$$a = r\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \tfrac{a}{r} = \tfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \cos^{-1}(0) = \tfrac{\pi}{2} = \theta$$

$$\Rightarrow z = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}) = i$$

Exponentialnotation:

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

d) $z = -1 = -1 + 0 \cdot i$ (z ist hier keine komplexe Zahl, sondern eine reelle Zahl!)

Polarkoordinatendarstellung:

$$r = \sqrt{1+0} = 1$$

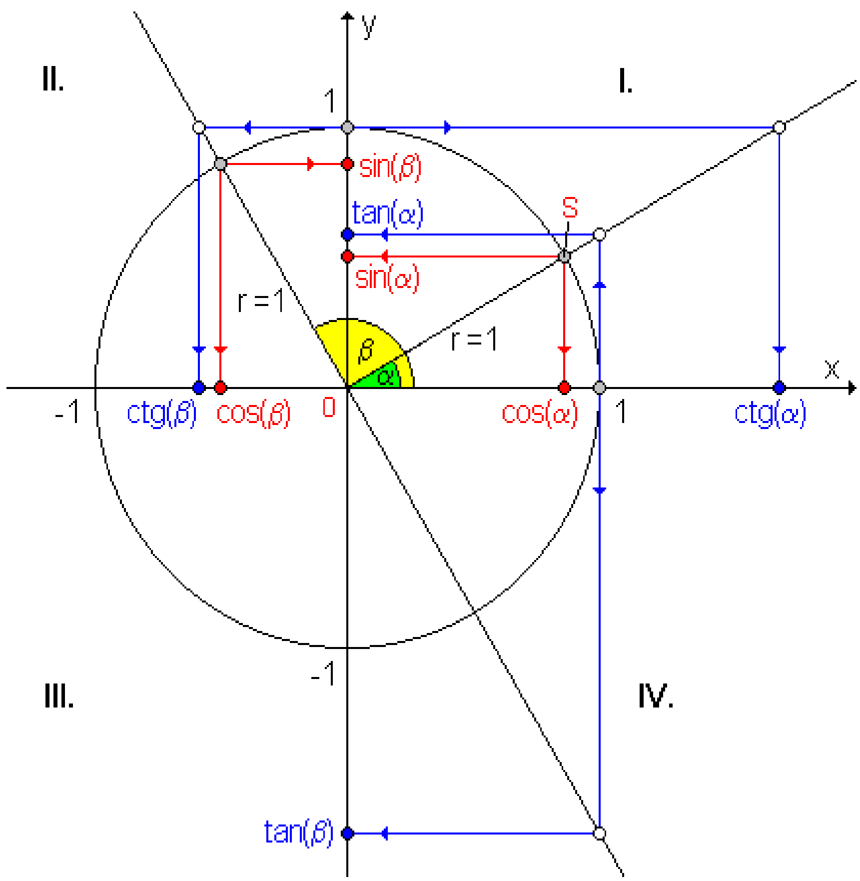
$$a = r\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{a}{r} = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow \cos^{-1}(-1) = \pi = \theta$$

$$\Rightarrow z = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Exponentialnotation:

$$z = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = e^{i\pi}$$

B7/21: Zeichnen Sie den Einheitskreis ohne Zirkel. Bezeichnen Sie die wichtigsten Orientierungspunkte.



Für den Einheitskreis gilt:

Der Cosinus des Winkels α ist die orthogonale Projektion des Vektors $\overrightarrow{0S}$ auf die x - Achse, also der x - Wert des Punktes S.

Der Sinus des Winkels α ist die orthogonale Projektion des Vektors $\overrightarrow{0S}$ auf die y - Achse, also der y - Wert des Punktes S.

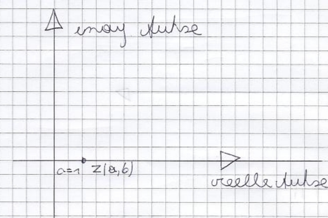
B8/21: Stellen Sie grafisch dar:

a) $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$\theta = 0$

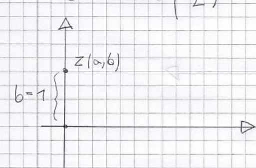
$\Rightarrow \cos(0) + i\sin(0) = 1 + 0i = 1$

$z = 1 + 0i$



b) $\theta = \frac{\pi}{2}$

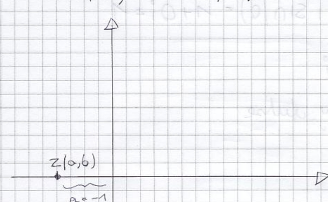
$e^{i\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$



c) $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$\theta = \pi$

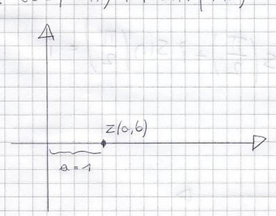
$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i\,0 = -1$



d) $\theta = 4\pi$

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$= \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = 1 + i\,0$



B9/24ff: Gegeben sind $z_1 = 2e^{i\pi}, z_2 = 3e^{i0.5}, z_3 = 3e^{-i0.5}$. **Gesucht ist:**

a) $z_1 z_2 = (2 \cdot 3) \exp(i(\pi + 0.5)) = 6 \exp(i(\pi + 0.5))$

b) $z_2 z_3 = 9 \exp(i(0.5 - 0.5)) = 9$

c) $\overline{z_3} = 3e^{i0.5}$

d) $|z_2| = r = 3$

e) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{3}{3} \exp(i(0.5 - (-0.5))) = \exp(i)$