Kapitel 1: Differenzengleichungen 1.Ordnung

B1/4: Geben Sie verschiedene Anschreibungen der Differenzengleichung $y_t = 0.95\, y_{t-1} + 1$ an.

B2/6 Lösen Sie iterativ:
(a) $y_t = y_{t-1} + 1$, (b) $y_{t+1} + 0.1\, y_t = 2$.

B3/10f: Welche Eigenschaft hat
(a) die partikuläre Lösung, welche
(b) die komplementäre einer LDG?

B4/10f: Lösen Sie die LDGen
(a) $y_{t+1} + 0.5\, y_t = 3$, $y_0 = -1$,
(b) $y_{t+1} - y_t = 3$, $y_0 = 0$.

B5/20f: Welche Stabilitätseigenschaften haben die LDGen
(a) $y_{t+1} + 0.5\, y_t = 3$, $y_{t+1} - 10\, y_{t-1} = 2$
(b) $y_t = y_{t-1} + 1$, $y_0 = 0$

B6/26: Geben Sie den dynamischen Multiplikator $(\partial y_{t+10}/\partial c_t)$ zu
(a) $y_t = 0.95\, y_{t-1} + c_t$ und
(b) $y_{t+1} + 0.1\, y_t = c_{t+1}$ an.

Kapitel 2: Taylorreihen

B1/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term
(a) 1.Ordnung, (b) 2.Ordnung für die Funktion $f(x) = 2 + 3\,x$.
Die Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

B2/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term (a) 1.Ordnung, (b) 2.Ordnung
für die Funktion $f(x) = 1/x$. Die Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

B3/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term (a) 1.Ordnung, (b) 2.Ordnung

für die Funktion $f(x) = \log(x)$. Die Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 2, und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 2.

B4/2: Berechnen Sie die Taylorreihe bis zum Term (a) 1.Ordnung, (b) 2.Ordnung
für die Funktion $f(x) = \exp(x)$. Die Entwicklungsstelle sei $x_0 = 1$.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle 1, und vergleichen Sie ihn mit dem Wert der Approximation an der Stelle 1.

B5/15ff: $f(x) = 7\,\exp(1.5\,x)$. Geben Sie eine lineare Approximation für die Veränderung der Funktion, Δf, an:
(a) allgemein,
(b) an der Stelle 2,

(c) an der Stelle 2 und für $\Delta x = 1$.

B6/20: $Y = f(X) = 7\,\exp(1.5\,X)$. X sei normalverteilt mit $X \sim \mathsf{N}(2, 3)$. Geben Sie die Approximationen 1. und 2.Ordnung für den Erwartungswert von Y nach der Delta-Methode an.

Kapitel 3: Komplexe Zahlen

B1/3: Stellen Sie die komplexen Zahlen
(a) $z = 3 - 2\,i$, (b) $z = 3 + 2\,i$,
(c) $z = i$, (d) $z = -1$
als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.

B2/4: Berechnen Sie i^2, i^4 und i^{41}.

B3/6: Berechnen Sie die Nullstellen von
(a) $z^2 - 1 = 0$, (b) $z^2 + 2 = 0$,
(c) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

B4/8ff: Gegeben sind $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$. Berechnen Sie
(a) $z_1 + z_2$, (b) $|z_1|$, (c) $z_1\, z_2$, (d) z_1/z_2, (e) $|\overline{z}_1|$.

B5: Berechnen Sie den Betrag, $|x|$, von
$x = 2,\ -3,\ 1 + \sqrt{2},\ \frac{3}{2}\,(1 - \sqrt{2})$.

B6/19ff: Stellen Sie die komplexen Zahlen
(a) $z = 3 - 2\,i$, (b) $z = 3 + 2\,i$, (c) $z = i$, (d) $z = -1$ in der Polarkoordinaten- und Exponentialdarstellung dar.

B7/21: Zeichnen Sie den Einheitskreis ohne Zirkel. Bezeichnen Sie die wichtigsten Orientierungspunkte.

B8/21: Stellen Sie $e^{i\,\theta}$ für
(a) $\theta = 0$, (b) $\theta = \pi/2$, (c) $\theta = \pi$ (d) $\theta = 4\pi$
graphisch dar.

B9/24ff: Gegeben sind $z_1 = 2\,e^{i\,\pi}$,
$z_2 = 3\,e^{i\,0.5}$, $z_3 = 3\,e^{-i\,0.5}$. Berechnen Sie
(a) $z_1\, z_2$, (b) $z_2\, z_3$, (c) $\overline{z}_3$, (d) $|z_2|$, (e) z_2/z_3.

Kapitel 4: Differenzengleichungen höherer Ordnung

B1/2: Schreiben Sie eine Differenzengleichung 3.Ordnung an.

B2/3: Berechnen Sie $\Delta^3 y_t$.

B3/2f: Schreiben sie $2\,\Delta^2 y_t - \Delta y_t = 3$ als LDG an.

B4/6: Geben Sie die partikuläre Lösung, y_p, zu
(a) $y_{t+2} + y_{t+1} + y_t = 3$,
(b) $y_{t+2} - 0.5\,y_{t+1} - 0.5\,y_t = 3$,
(c) $y_{t+2} - 2\,y_{t+1} + y_t = 3$ an.

B5/7: Berechnen Sie die charakteristischen Wurzeln zu
(a) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + y_t = 3$,
(b) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 4\,y_t = 3$,
(c) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 8\,y_t = 3$

B6/10,15: Geben Sie die komplementäre Lösung, y_c, zu
(a) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + y_t = 3$,
(b) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 4\,y_t = 3$ an.

B7/10f,15f: Gegeben ist die LDG
(a) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + y_t = 3$, $y_0 = 1$,$y_1 = -1/2$
(b) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 4\,y_t = 3$.
Geben Sie die Lösung an.

B8/19f: Gegeben ist die LDG
$y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 8\,y_t = 3$
(a) Geben Sie die partikuläre Lösung, y_p, an.
(b) Geben Sie die Lösungen des charakteristischen Polynoms in Polarkoordinaten- und Exponential-Darstellung an. Wie groß sind r und θ?
(c) Geben Sie die komplementäre Lösung, y_c,

an.
(d) Geben Sie die komplementäre Lösung, y_c, an, ohne i zu verwenden.
(e) Geben Sie die Lösung der LDG an.

B9/24ff: Geben Sie das Stabilitätsverhalten der folgenden LDGen an.
(a) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + y_t = 3$, $y_0 = 1$,
(b) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 4\,y_t = 3$, $y_0 = -1$.
(c) $y_{t+2} + 4\,y_{t+1} + 8\,y_t = 3$, $y_0 = 2$
(d) $y_{t+2} - y_{t+1} - (1/16)\,y_t = 3$, $y_0 = -2$

B10/33f: Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten von (a)-(d) aus B9 mit Hilfe des Schur Theorems.

B11:

(a) Berechnen Sie die Summe

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 5^i$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Differenzengleichung der Form $S_{n+1} - \alpha\, S_n = c$.

(b) Die Fibonacci Zahlen sind gegeben durch: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

(b.1) Schreiben Sie die ersten 9 Zahlen der Reihe an.

(b.2) Berechnen Sie a_{46}, indem Sie eine LDG lösen.

Kapitel 5: Eigenwerte und Eigenvektoren

B1: Für welche $\mu, \mu \in \mathbb{R}$, existiert die Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} a-\mu & b \\ c & d-\mu \end{bmatrix}$

Anleitung: Berechnen Sie die Determinante allgemein. Soll die Inverse existieren, darf die Determinante nicht Null sein. Daher berechnen wir alle μ, für die die Determinante Null ist, und schließen sie aus.

B2/2: Lösen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme, $A\,\mathbf{x} = 0$ bzw $B\,\mathbf{x} = 0$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

B3/3: Berechnen Sie die Determinanten zu

(a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Bsp B2.

B4/3f: Berechnen Sie die Eigenwerte zu

(a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Bsp B2 und B3.

B5/4ff: Berechnen Sie die Eigenvektoren zu beiden Eigenwerten.

$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Normieren Sie die Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal aufeinander sind.

B6/4ff: Berechnen Sie die Eigenvektoren zu beiden Eigenwerten.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Normieren Sie die Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal aufeinander stehen.

B7/11: Berechnen Sie die Eigenwerte zu

(a) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

B8/12: Welche Eigenschaften haben die Matrizen A, B, C und D oben?

B9/13: Zeigen Sie, dass für die Matrizen A, B, C und D gilt:
Die Determinante ist gleich dem Produkt der Eigenwerte.

B10/14: Vergleichen Sie Spur und Summe der Eigenwerte für die Matrizen A, B, C und D.

B11/15f: Geben Sie die Darstellung $A = T\,\Lambda\,T'$ für eine der Matrizen A, B oder C und für D an.

B12/18f: Berechnen Sie für

(a) $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 2 & 0.9 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

$\sum_{i=0}^{\infty} A^i$.

B13/19: Berechnen Sie für $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

A^0, A^1, A^2, A^3,..., A^n.

Kapitel 6: Systeme von Differenzengleichungen

B1/2f: Gegeben ist die LDG
$y_{t+2} + 2\,y_{t+1} + 3\,y_t = 4,\ y_0 = 1, y_1 = 2.$
Geben Sie dazu das 2-dimensionale System 1.Ordnung
(a) als Gleichungssystem und
(b) in Matrixschreibweise an.

B2/4f: Gegeben ist die LDG
$y_{t+3} + 5\,y_{t+2} + 2\,y_{t+1} + 3\,y_t = 4,\ y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3.$
Geben Sie dazu das 3-dimensionale System 1.Ordnung
(a) als Gleichungssystem und
(b) in Matrixschreibweise an.

B3/2ff: Gegeben ist die LDG
$y_{t+1} + 5\,y_t = 3,\ y_0 = -1.$
Geben Sie dazu das 1-dimensionale System 1.Ordnung in Matrixschreibweise an.

B4/15f: Berechnen Sie die partikuläre Lösung, x_p, y_p, zu

(a)

$$\begin{aligned} x_{t+1} \quad & +x_t+(1/4)y_t=9 \\ y_{t+1} & -x_t = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_{t+1} \quad & +x_t+9\,y_t=9 \\ y_{t+1} & +x_t+\ y_t=2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_{t+1} \quad & +\ x_t+3\,y_t=5 \\ y_{t+1} & +2\,x_t+2\,y_t=0 \end{aligned}$$

B5/17ff: Berechnen Sie die komplementäre Lösung, y_c, zu

$$\begin{aligned} x_{t+1} \quad & +x_t+(1/4)y_t=9 \\ y_{t+1} & -x_t = 0 \end{aligned}$$

B6/23f: Geben Sie zu B5

(a) die charakteristische Gleichung und die charakteristischen Wurzeln an.

(b) für $x_0 = 3$ und $x_1 = 5$ ($\rightarrow$ $y_0 = 4$, $y_1 = x_0$) die Lösung an.

B7/30ff: Berechnen Sie die komplementäre Lösung, y_c, zu

$$\begin{aligned} x_{t+1} \quad & +x_t+9\,y_t=9 \\ y_{t+1} & +x_t+\ y_t=2 \end{aligned}$$

und geben Sie für $x_0 = 3$ und $y_0 = 4$ die Lösung an.

B8/23f:

(a) Geben Sie zu B7 die charakteristische Gleichung und die charakteristischen Wurzeln an.

(b) Geben Sie zu B7 für $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ die Lösung an.

B9: Charakterisieren Sie das Stabilitätsverhalten der Systeme aus B5 und B7.

Kapitel 7: Maroffketten

B1/5ff: Geben Sie ein Beispiel eines stochastischen Prozesses
(a) in diskreter, (b) in stetiger Zeit.

B2/10ff: Eine Markoffkette besteht aus 3 Bestandteilen. Welche sind das?

B3/9: Was besagt die Markoffeigenschaft?

B4/10ff: Konstruieren Sie eine eigene Markoffkette. Geben Sie dazu die Anfangswahrscheinlichkeiten und die Matrix der Übergangsws an.
(a) Für 2 Zustände, (b) für 3 Zustände.

B5/10ff: Wie groß ist in B4 oder einem Bsp Ihrer Wahl
(a) $P(X_0 = 2)$,
(b) die Anzahl der verschiedenen Zustände s,

(c) $\sum_{i=1}^{s} P(X_0 = i)$, (d) $\sum_{j=1}^{s} p_{2j}$.

B6/15ff: Berechnen Sie in B4 oder einem Bsp Ihrer Wahl die n-Schritt Übergangsws
(a) $p_{11}(0)$, (b) $p_{11}(1)$, (c) $p_{11}(2)$,
(d) $P(X_{t+1} = 1 | X_t = 1)$.

B7/17: Berechnen Sie in B4 oder einem Bsp Ihrer Wahl die
(a) 2-Schritt Übergangswsmatrix $[p_{ij}(2)]_{s\times s}$,
(b) 3-Schritt Übergangswsmatrix $[p_{ij}(3)]_{s\times s}$.
Wie groß sind $P(X_{t+2} = 1 | X_t = 2)$, und $P(X_{t+3} = 1 | X_t = 2)$?

B8/24ff: Berechnen Sie in B4 oder einem Bsp Ihrer Wahl für
(a) $P(X_1 = 1)$, (b) $P(X_2 = 2)$,
(c) $P(X_3 = 1)$ und

(d) die gesamte Wsverteilung in $t+3$, ie $[P(X_{t+3}=1),\ldots,P(X_{t+3}=s)]' = \mathbf{q}(t+3)$ (d.1) für $t=0$, (d.2) allgemein an.

B9/28f: Welche Zustände in B4 oder einem Bsp Ihrer Wahl
(a) sind vom Zustand 1 erreichbar,
(b) kommunizieren, (c) sind transient,
(d) sind absorbierend, (e) sind rekurrent?
(f) Gibt es eine abgeschlossene Menge von Zuständen?

B10/30ff: Ist die Kette in B4 oder einem Bsp Ihrer Wahl
(a) ergodisch, (b) reduzierbar?

B11/30f:
(a) Warum ist die Kette zur Übergangsmatrix P_2 nicht reduzierbar?

(b) Sind die Ketten zu den Übergangsmatrizen P_5 und P_6 reduzierbar?

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

B12/36ff: Berechnen Sie zu B4 (sofern die Kette ergodisch ist) oder einem Bsp Ihrer Wahl die stationäre (steady-state) Verteilung. Wie groß ist $q_2(\infty) = P(X_\infty = 2)$?

B13/39: Zeigen Sie, dass ein Eigenwert der Matrix P in B4 Eins ist.

B14/36ff: Berechnen Sie zur Übergangsmatrix P_5 (Bsp B11) die steady-state Verteilung.

B15/45ff: Berechnen Sie die mittleren ersten Durchgangszeiten im Cola Bsp: m_{21} und m_{22}. Interpretieren Sie die Werte.

B15/53ff: Angenommen sie klassifizieren festverzinsliche Wertpapiere in 2 Gruppen:
gute Bonität, schlechte Bonität.
Default (Ausfall, Zahlungsunfähigkeit) ist der dritte Zustand. Die Übergangsmatrix nach JP Morgan für die Periodenlänge von 1 Jahr lautet:

$$P_{JPM} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

Sie kaufen ein Papier guter Bonität und halten es.
(a) Wie lange ist die durchschnittliche Zeit, dass es sich im Zustand guter Bonität befindet?
(b) Wie groß ist die durchschnittliche Zeit, dass sich ihr Wertpapier im Zustand schlechter Bonität befindet?
(c) Was ist die durchschnittliche Zeit, die wir das Papier sinnvollerweise halten dürfen?
(d) Wie groß ist die Ws, dass das Papier einmal default wird? Begründen Sie das Ergebnis.