Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Markoffketten
Kapitel 7

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Bezeichnung

Andrei Andrejewitsch Markow, geb. 14.6.1856, gest. 20.7.1922 in Petrograd (heute St. Petersburg). Je nach Transkription wird sein Name

- Markow
- Markov - in der englischen Literatur üblich - , oder
- Markoff

geschrieben.

Lernziele

- Konzept einer Markoffkette
- Markoffeigenschaft
- Charakterisierung von Markoffketten
  – ergodische Ketten
  – Ketten mit absorbierenden Zuständen
- Beispiele

Stochastischer Prozess

Wir beobachten ein System in diskreter Zeit:

$$t = 0, 1, 2, \ldots$$

Sei X_t eine Folge von Zufallsvariablen:

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

Besitzen die ZVen eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung, so spricht man von einem **stochastischen Prozess in diskreter Zeit**.

Wir werden in diesem Kapitel nur ZVen mit einer endlichen Anzahl von verschiedenen Werten - hier Zustände - betrachten.

Beispiele

1: Das Ruinproblem eines Spielers

Im Zeitpunkt 0 besitzen wir USD 2. In jedem Zeitpunkt $t = 1, 2, \ldots$ spielen wir ein Spiel, bei dem wir USD 1 setzen. Wir können einen USD dazugewinnen – die Auszahlung beträgt dann 2 USD – oder, den Einsatz verlieren. Ein Spiel wird mit Ws p gewonnen und mit $1 - p$ verloren. Das Spiel ist beendet, wenn das Kapital USD 4 oder USD 0 beträgt.

X_t ... Kapital in t, ZV für $t > 0$, Zustände: $0, 1, 2, 3, 4$
$X_0 = 2$ fix, nicht zufällig

- Ist $X_t = 2$, so kann $X_{t+1} = 1$ oder $X_{t+1} = 3$ sein.
- Ist $X_t = 0$, so sind alle $X_{t+i} = 0$ für $i \geq 0$.
- Ist $X_t = 4$, so sind ebenfalls alle $X_{t+i} = 4$ für $i \geq 0$.

2: Das Cola Beispiel

Es sind 2 Sorten von Cola am Markt: Cola 1 und Cola 2. Ein Kunde konsumiert Cola 1.

Wird er in der nächsten Periode wieder Cola 1 kaufen oder zu Cola 2 wechseln?

Die Zustände sind: 1 und 2.
(Die zugehörigen Ws legen wir erst später fest.)

3: Aktienkurse

Eine Aktie hat heute, t, den Preis X_t. Welchen Preis X_{t+1} wird sie morgen haben?

Wir erhalten ein Folge von ZVen: X_0, X_1, X_2, etc wobei die Zeit, zB bei Tagesschlusskursen, diskret ist, die möglichen Zustände von X aber nicht endlich sind. Die X_t sind iA stetige ZVen.

Prozesse dieser Art behandeln wir im Teil Zeitreihenanalyse.

Markoffkette

Markoffeigenschaft

Sei X_t ein stochastischer Prozess in diskreter Zeit mit $t = 0, 1, 2, \ldots$ und den Zuständen $i = 1, \ldots, s$.

$$P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$$

heißt **Markoffeigenschaft**.

(Der Prozess X_t muss keine endliche Anzahl von Zuständen aufweisen und nicht in diskreter Zeit gemessen werden.)

Die Markoffeigenschaft besagt, dass die Vergangenheit dieses Prozesses für den nächsten Schritt in die Zukunft insofern irrelevant ist, als dass nur der letzte Zustand von Bedeutung ist.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $(t+1)$ ausgehend vom Zustand i_t in t hängt nur von i_t ab.

Markoffkette

Sei X_t ein Prozess in diskreter Zeit und besitzen alle X_t nur dieselbe endliche Anzahl s von möglichen Zuständen, durchnummeriert mit

$$1, 2, 3 \ldots, s$$

und besitzt der Prozess die Markoffeigenschaft, so heißt er **Markoffkette**.

Wir schreiben

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = p_{ij}$$

p_{ij}, $i, j = 1, \ldots, s$, werden **Übergangswahrscheinlichkeiten** genannt. Sie geben die Ws an, mit der wir vom Zustand i zum Zustand j wechseln.

Markoffkette (Fs)

Es gilt natürlich für fixes i

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind (hier) zeitinvariant. Sie hängen nicht von t ab. Daher wird der Prozess **stationäre** Markoffkette genannt.

Anfangswahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeiten für den Zeitpunkt Null

$$P(X_0 = i) = q_i$$

heißen **Anfangswahrscheinlichkeiten**. Als Vektor geschrieben

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_s)'$$

Auch die Anfangswahrscheinlichkeiten summieren sich zu Eins.

$$\sum_{i=1}^{s} q_i = 1$$

Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden zu einer **Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix** kurz **Übergangsmatrix** $P_{S\times S}$ zusammengefasst.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

- Jede Zeile von P besitzt die Zeilensumme eins.
- Jedes Element von P ist nichtnegativ und ≤ 1, $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

Bsp: Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix P für das Ruinproblem ist

	Zustand j				
Zustand i	USD 0	USD 1	USD 2	USD 3	USD 4
USD 0	1	0	0	0	0
USD 1	$1-p$	0	p	0	0
USD 2	0	$1-p$	0	p	0
USD 3	0	0	$1-p$	0	p
USD 4	0	0	0	0	1

Alternativ kann man die Übergänge auch graphisch durch Knoten (Zustände) und gerichtete Kanten (mögliche Übergänge) darstellen.

n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir befinden uns im Zeitpunkt t und überlegen uns, wo sich der Prozess nun in $(t+n)$ befindet.

$$P(X_{t+n} = j | X_t = i) = P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}(n)$$

$p_{ij}(n)$ bezeichnet die **n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit** vom Zustand i zum Zustand j in n Perioden in der Zukunft.

Es gilt natürlich

- $p_{ij}(1) = p_{ij}$ und
- $p_{ij}(0) = 1$, wenn $i = j$ ($p_{ii}(0) = 1$) und
  $p_{ij}(0) = 0$, wenn $i \neq j$.

Beispiel: $p_{ij}(2)$

Angenommen wir befinden uns in i. Von i aus können wir mit der Ws p_{ik}, in die Zustände $k = 1, \ldots, s$ gelangen. Von dort gehen wir nach j, egal welche Zwischenstation wir gemacht haben.

$$p_{ij}(2) = \sum_{k=1}^{s} p_{ik}(1)\, p_{kj}(1)$$

Wir erhalten s mögliche disjunkte Pfade

$$(i \to 1 \to j), \ldots, (i \to k \to j), \ldots, (i \to s \to j).$$

Jeder Pfad hat die Ws $[p_{ik}(1)\, p_{kj}(1)]$, weil die einzelnen Schritte auf Grund der Markoffeigenschaft unabhängig sind.
(Wir dürfen in der Zwischenzeit in j gewesen sein.)

Beispiel: $p_{ij}(2)$ (Fs)

In kompakter Schreibweise

$$p_{ij}(2) = p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$$

Also die i-te Zeile, $p_{i\bullet}$, mal der j-ten Spalte, $p_{\bullet j}$, der Matrix P .

$p_{ij}(2)$ ist also das Element (i, j) in der Matrix $P\,P = P^2$.

$$[p_{ij}(2)]_{s\times s} = P^2$$

P^2 ist ebenfalls eine Übergangsmatrix.

$p_{ij}(n)$

Eine direkte Verallgemeinerung für die n-Schritt-Ws

$$[p_{ij}(n)]_{s\times s} = P^n$$

Angenommen wir suchen $p_{ij}(3)$. Dann ist analog zu oben

$$p_{ij}(3) = \sum_{k=1}^{s} p_{ik}(2)\, p_{kj}(1)$$

Also die Matrix P^2 wird mit P multipliziert.

$$[p_{ij}(3)]_{s\times s} = P^2\, P = P^3$$

usw

$p_{ij}(n)$ im Cola Beispiel

Angenommen es gibt nur 2 Sorten Cola. Ein Cola 1 Konsument kauft mit Ws 0.90 das nächste Mal wieder Cola 1. Ein Cola 2 Konsument kauft mit Ws 0.80 das nächste Mal wieder Cola 2.

Angenommen ein Konsument hat Cola 1 gekauft.

(1) Wie groß ist die Ws, dass er als nächstes Cola 2 kauft?

$$P(X_{t+1} = 2|X_t = 1) = p_{12} = p_{12}(1) =?$$

(2) Wie groß ist die Ws, dass er nach 3 Perioden wieder Cola 1 kauft?

$$P(X_{t+3} = 1|X_t = 1) = p_{11}(3) =?$$

(3) Wie groß ist die Ws, dass er nach 5, 10 , 20, 30, 40 Perioden wieder Cola 1 kauft?

Bsp (Fs): $p_{ij} = p_{ij}(1)$

Die Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten ist

	Zustand j	
Zustand i	Cola 1	Cola 2
Cola 1	0.90	0.10
Cola 2	0.20	0.80

Antwort zu Frage 1:

$$P(X_{t+1} = 2|X_t = 1) = 0.10$$

Bsp: $p_{11}(3)$

$p_{1k}(1)$: Von Zustand 1 in t ausgehend können wir in $(t+1)$ nach Zustand 1 oder Zustand 2 gelangen.

$p_{k2}(1)$: Wollen wir nach Zustand 2 in $(t+2)$, so können wir sowohl vom Zustand 1 als auch vom Zustand 2 in $(t+1)$ ausgehen.

$p_{k1}(3)$: Um nach Zustand 1 in $(t+3)$ zu gelangen, betrachten wir alle möglichen Zustände in $(t+2)$

$$p_{11}(3) = p_{11}(2)\, p_{11} + p_{12}(2)\, p_{21}$$

Bzw

$$[p_{ij}]_{s\times s} = P \qquad [p_{ij}(2)]_{s\times s} = P^2 \qquad [p_{ij}(3)]_{s\times s} = P^3$$

Bsp (Fs): $p_{11}(3)$ (Fs)

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix}$$

Antwort zu Frage 2:

$$P(X_{t+3} = 1 | X_t = 1) = p_{11}(3) = 0.781$$

Bsp (Fs): $p_{11}(5)$, $p_{11}(10)$, $p_{11}(20), \ldots$

Die folgenden Werte sind auf 2 Stellen gerundet.

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{bmatrix} \qquad P^{10} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.65 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$P^{20} = P^{30} = P^{40} = \ldots = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 \end{bmatrix}$$

$q_i(1)$

Die Anfangswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände haben wir mit q_i, $q_i = q_i(0)$, bezeichnet.

$$q_i = P(X_0 = i)$$

Wie groß ist die Ws ausgehend von $t = 0$ - ohne den Zustand in $t = 0$ zu kennen - nach einem Schritt ($t = 1$) in j zu sein?

$$P(X_1 = j) = q_j(1) = \sum_{k=1}^{s} q_k\, p_{kj} = q_\bullet\, p_{\bullet j}$$

Für $j = 1, \ldots, s$ berechnet, ergibt sich der Zeilenvektor

$$\mathbf{q}(1)' = (q_1(1), \ldots, q_s(1))' = \mathbf{q}'\, P$$

$q_i(n)$

Wie groß ist die Ws ausgehend von $t = 0$ (ohne den Zustand in $t = 0$ zu kennen) nach n Schritten ($t = n$) in j zu sein?

$$P(X_n = j) = q_j(n) = \sum_{k=1}^{s} q_k\, p_{kj}(n)$$

bzw

$$\mathbf{q}(n)' = (q_1(n), \ldots, q_s(n)) = \mathbf{q}'\, P^n$$

Cola Bsp: $q_1(3)$

Angenommen die Anfangsverteilung ist

$$\mathbf{q} = (0.60 \quad 0.40)'$$

$$\mathbf{q}(3)' = \mathbf{q}'\, P^3 = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.40 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6438 & 0.3562 \end{pmatrix}$$

$$P(X_3 = 1) = q_1(3) = 0.6438$$

Klassifikation von Zuständen

Pfad, erreichbar, kommunizieren

Gegeben seien 2 Zustände i und j. Ein **Pfad** ist eine Folge von Übergängen, die in i beginnt und in j endet.

Bsp: Im Cola Bsp ist $(1 \to 2 \to 1)$ ein Pfad.

Ein Zustand j ist **erreichbar** von i, wenn ein Pfad von i nach j führt.

Bsp: Im Ruinbsp ist jeder Zustand vom Zustand $i = 2$ erreichbar, Zustand $j = 4$ von $i = 0$ aus aber nicht.

Zwei Zustände i und j **kommunizieren**, wenn j von i aus und umgekehrt i von j aus erreichbar ist.

Bsp: Im Ruinbsp kommunizieren die Zustände 1,2,3 hingegen die 0 und 4 nicht.

abgeschl Menge, absorbierend, transient

Eine Menge von Zuständen S ist eine **abgeschlossene Menge**, wenn kein Zustand außerhalb von S von innerhalb von S erreichbar ist.

Bsp: Im Ruinbsp sind $\{0\}$ und $\{4\}$ zwei abgeschlossene Mengen.

Ein Zustand i ist ein **absorbierender Zustand**, wenn $p_{ii} = 1$.

Bsp: Im Ruinbsp ist 0 ein absorbierender Zustand.

Ein Zustand i heißt **transient**, wenn es einen Zustand j gibt, der von i aus erreichbar ist, aber umgekehrt i von j aus nicht.

Bsp: Im Ruinbsp sind die Zustände 1, 2 und 3 transient.

rekurrent, periodisch

Ist ein Zustand nicht transient, so heißt er **rekurrent**.

Bsp: Im Cola Bsp sind beide Zustände 1 und 2 rekurrent.

Ein Zustand i heißt **periodisch** mit Periode k, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, wenn alle Pfade, die von i nach i wieder zurückführen, ein ganzzahliges Vielfaches von k als Länge besitzen.

Bsp: Hier liegen für alle 3 Zustände Periodenlängen von 3 vor.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Klassifikation von Ketten

ergodisch

Sind alle Zustände einer Kette aperiodisch, und kommunizieren miteinander ($\rightarrow$ rekurrent), dann heißt die Kette **ergodisch**.

Bsp: P_1 ergodisch, P_2 nicht ergodisch (2 abgeschlossene Mengen, jeder Zustand ist rekurrent), P_3 ergodisch

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

reduzierbar

Eine Markoffkette heißt **reduzierbar**, wenn die Übergangsmatrix (nach Umordnung der Zustände) folgende Form hat

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

wobei C *quadratisch* ist (und $B \neq 0$).

Beginnen wir im ersten Teil der Zustände, so haben wir die Möglichkeit in den zweiten Teil zu gelangen, jedoch nicht mehr zurück. Die Zustände im Teil 1 sind transient.

Es ist möglich die Zustände quasi durchzunummerieren:
Zuerst Zustände 1, dann Zustände 2.

reduzierbar (Fs)

Beispiel 1: Reduzierbare Kette

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zustand 2 ist absorbierend.

Beispiel 2: Die Matrizen P_1, P_2 und P_3 von oben liefern keine reduzierbare Ketten.

Beispiel 3: Reduzierbare Kette

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Gleichgewichts-wahrscheinlichkeiten und mittlere Durchgangszeiten für ergodische Ketten

$\lim_{n\to\infty} P^n$

Sei P die Übergangsmatrix einer ergodischen Kette mit s Zuständen. Dann existiert ein Vektor $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s)'$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix}$$

Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$$

unabhängig von welchem Zustand i man ausgegangen ist.

Der Vektor π heißt **steady-state Verteilung** oder **Gleichgewichtsverteilung** der Markoffkette.

Bsp: P nicht ergodisch, $\lim_{n\to\infty} P^n$ exist. nicht

Gegeben sei die Übergangsmatrix mit 3 periodischen Zuständen

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^n \text{ konvergiert nicht.}$$

Es gilt: $P = P^4$. Aber

$$P \neq P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P \neq P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnung von π

Wir multiplizieren P^∞ nochmals mit P: $P^\infty P = P^\infty$.
$P^\infty = (\pi \quad \pi \quad \ldots \quad \pi)'$.

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \ldots & \pi_s \\ \ldots & & \ldots \\ \pi_1 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix} P = P^\infty P = P^\infty = \begin{bmatrix} \pi_1 & \ldots & \pi_s \\ \ldots & & \ldots \\ \pi_1 & \ldots & \pi_s \end{bmatrix}$$

Die erste Zeile links mal P ist gleich der ersten Zeile rechts.

$$\pi' P = \pi' \quad \text{und transponiert} \quad P' \pi = \pi$$

π ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1 von P': $(P' - I)\, \pi = \mathbf{0}$.

Die Summe der Ws π_i ergibt 1. π ist "normiert": $\Sigma_{i=1}^{s} \pi_i = 1$

Bsp: Ein Eigenwert von P ist 1

Im Cola Bsp ist die Matrix P

$$P = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$|P - \lambda I| = 0 = (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.1\,(0.2) = \lambda^2 - 1.7\,\lambda + 0.7$$

Wir setzen $\lambda = 1$ ein. Stimmt.

P und P' besitzen die selben Eigenwerte.

Hier haben wir ein allgemeines Ergebnis gefunden:
Jede Übergangsmatrix hat einen Eigenwert von 1.

Bsp: Eigenvektor zu $\lambda_{P'} = 1$

Wir schreiben die erste Gleichung aus $P'\,\pi = \pi$ an.

$$0.90\,\pi_1 + 0.20\,\pi_2 = \pi_1$$

Für $\pi_2 = 1$ ergibt sich $0.2 = 0.1\,\pi_1$, also $\pi_1 = 2$.

Normierung mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ergibt

$$\pi = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})' = (0.67 \quad 0.33)'$$

wie auch durch oftmalige Multiplikation oben ermittelt wurde.

Interpretation von $p_{ij}(\infty) = \pi_j$ und $\mathbf{q}(\infty)$

- Die Ws in den Zustand j in $t = \infty$ überzugehen, ist für jeden Startzustand i in $t = 0$ dieselbe.

  Daher beschreibt π auch die Gleichgewichtsverteilung der Zustände.

- $\mathbf{q}(\infty)$: $q_i(\infty) = P(X_\infty = i)$
  Wir wissen $\mathbf{q}(1)' = \mathbf{q}'\,P$. Analog für die Gleichgewichtsws

  $$\mathbf{q}(\infty)' = \mathbf{q}'\,P^\infty = \pi'$$

  Multiplikation von links gewichtet die Zeilen von P^∞ mit den einzelnen q_i. Erstere sind alle gleich, letztere summieren sich zu 1. *Die steady-state Verteilung ist unabhängig von der Anfangsverteilung.*

Beispiel zu $\mathbf{q}(\infty) = \pi$

Wir berechnen für das Cola Bsp die Gleichgewichtswahrscheinlichkeitsverteilung

$$\mathbf{q}(\infty)' = \mathbf{q}'\, P^{\infty} = (0.60 \quad 0.40) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}) = \pi'$$

Cola Beispiel

Angenommen 100 Mio Konsumenten kaufen jede Woche 1 Flasche Cola. Ein Flasche kostet der Firma USD 0.50 und wird um USD 1 verkauft. Eine Werbeagentur garantiert für USD 250 Mio pro Jahr eine Abnahme von 10% auf 5% des Anteils der Kunden, die von Cola 1 auf Cola 2 wechseln. Soll Firma 1 den Werbevertrag unterzeichnen?

Der langfristige Anteil für Cola 1 beträgt $\frac{2}{3}$. Das sind pro Jahr unter der bisherigen Verkaufsstrategie

$\frac{2}{3} \times (1 - 0.50) \times 1 \times 52 \times 100$ Mio = USD $1{,}73$ Mrd

Gewinn.

Cola Beispiel (Fs)

Unter der neuen Werbekampagne ist die Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Das Eigenvektorproblem, $P'\,\pi = \pi$ ist mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$

$$0.95\,\pi_1 + 0.20\,\pi_2 = \pi_1$$

Lösung ist $\pi_1 = 0.80$ und $\pi_2 = 0.20$. Daher ist der neue zu erwartende Geldfluss pro Jahr
$0.80 \times (1 - 0.50) \times 1 \times 52 \times 100$ Mio - 250 Mio = USD $1{,}83$ Mrd.

Der Gewinn mit Werbekampagne ist um 5.8% größer.

Mittlere erste Durchgangszeit, m_{ij}

Gehen wir wieder von einer ergodischen Kette aus. m_{ij} bezeichnet die erwartete Anzahl der Übergänge - ausgehend vom Zustand i - bevor wir zum ersten Mal den Zustand j erreichen. m_{ij} wird als **mittlere erste Durchgangszeit** bezeichnet.

Beispiel:
Im Cola Bsp könnte gefragt werden, wie oft ein heutiger Konsument von Cola 1 durchschnittlich Cola 1 trinkt bevor er zu Cola 2 wechselt. $m_{12} = ?$

Mittlere erste Durchgangszeit (Fs)

Angenommen wir kommen in i an und wollen nach j. Mit Ws p_{ij} gehen wir von i nach j. Die anderen Möglichkeiten von i aus sind, $k \neq j$, mit $p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} = 1$. Der durchschnittliche Übergang m_{ij} ist

$$m_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + m_{kj})\, p_{ik}$$

Wir teilen die Summe in 2 Summen auf und fassen zusammen.

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} m_{kj}\, p_{ik}$$

Dies entspricht bei fixem j einem Gleichungssystem in den Variablen m_{ij}, $i = 1, \ldots, s$. (s Gleichungen mit s Variablen)

Mittlere erste Durchgangszeit (Fs)

Allgemein kann gezeigt werde, dass

$$m_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

Bsp: Mittlere erste Durchgangszeit

In unserem Cola Bsp interessieren wir uns für m_{12}. Also $j = 2$ fix.
Die Gleichungen lauten für $i = 1, 2$

$$m_{12} = 1 + m_{12}\, p_{11}$$
$$m_{22} = 1 + m_{12}\, p_{21}$$

Da das Bsp so einfach ist, benötigen wir die zweite Gleichung nicht.

$m_{12} = 1 + 0.9\, m_{12}$

$$m_{12} = 10$$

Nach durchschnittlich 10 Cola 1 Käufen wechselt der Konsument die Marke.

$$m_{11}: \qquad m_{11} = 1/(2/3) = 1.5$$

Nach durchschnittlich 1.5 Käufen von Cola 2 kehrt ein Cola 1 Konsument wieder zu Cola 1 zurück.

Absorbierende Ketten

Absorbierende Kette

Eine Kette, die einen oder mehrere absorbierende Zustände enthält und deren anderen Zustände transient sind, heißt **absorbierende Kette**.

Beispiel: Zahlungsmoral

In der Buchhaltung einer Firma gibt es 6 Kontotypen:

1. Neues Konto
2. Bezahlung 1 Monat überfällig
3. Bezahlung 2 Monate überfällig
4. Bezahlung 3 Monate überfällig
5. Bezahlt
6. Uneinbringliche Schuld.

Zustand 5 und 6 sind absorbierend, die anderen transient.

Frage:
Wie groß ist die Ws, dass eine neu einlangende Rechnung beglichen wird?

Beispiel: Credit Metrics

JP Morgan klassifiziert festverzinsliche Wertpapiere in 8 Gruppen Aaa, Aa, A, Baa, Ba, ..., C. Für jede Gruppe werden Ws angegeben mit denen ein Wertpapier in seinem Zustand bleibt, bzw in einen Zustand höherer oder geringerer Bonität wechselt. Ferner beschreibt “default” den Ausfall eines Papiers. Letzteres ist ein absorbierender Zustand, die anderen sind transient.

Frage:
Angenommen sie stellen heute ein Portfolio aus Papieren mit unterschiedlicher Bonität zusammen und wollen es mehrere Perioden halten.
Wie sieht die Risikostruktur ihres Portfolios am Ende der Halteperiode aus? Bzw was wirklich interessiert: Wieviele und welche Papiere befinden sich im default?

Übergangsmatrix

Wir ordnen die Zustände in der Übergangsmatrix um, sodass zuerst die transienten und anschließenden die absorbierenden stehen. Nach der Umordnung benennen wir sie der Reihenfolge nach mit $t_1, \ldots, t_{s-m}$ für die transienten Zustände und $a_1, \ldots, a_m$ für die absorbierenden.

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Q_{(s-m)\times(s-m)} & R_{(s-m)\times m} \\ \hline 0_{m\times(s-m)} & I_{m\times m} \end{array}\right]$$

$(s-m)$	...	Anzahl der transienten Zustände
m	...	Anzahl der absorbierenden Zustände

Die Einheitsmatrix zeigt an, dass diese Zustände nie verlassen werden, die Null-Matrix, dass aus den ersten Zuständen in den zweiten Teil Pfade laufen, aber nicht zurück.

Frage 1

Frage 1:
Angenommen wir beginnen in einem transienten Zustand, t_i.

Was ist die erwartete Anzahl von transienten Zuständen, die wir durchlaufen, bevor wir einen absorbierenden erreichen?

Wieviele Perioden erwarten wir, in denen wir uns in einem transienten Zustand befinden?

(Teil-)Antwort:
Angenommen wir starten in t_i, dann ist die erwartete Anzahl der Perioden, die wir in t_j verbringen, das

Element ij der Matrix $(I - Q)^{-1}$

Frage 2

Frage 2:
Angenommen wir beginnen in einem transienten Zustand t_i.

Wie groß ist die Ws im absorbierenden Zustand a_j zu enden?

Antwort:
Angenommen wir starten in t_i, dann ist die Ws einer Absorption im Zustand a_j

Element ij der Matrix $(I - Q)^{-1} R$

Fundamentalmatrix

Die Matrix

$$(I - Q)^{-1}$$

heißt **Fundamentalmatrix der Markoffkette**.

Beispiel: Personalplan

Die Rechtsanwaltskanzlei Chen & Kan beschäftigt 3 Arten von Anwälten: Junior Anwälte (J), Senior Anwälte (S) und Partner (P). Darüberhinaus gibt es 2 Ausscheidungskategorien: Ausscheiden als Nicht-Partner (ANP), Ausscheiden als Partner (AP).

Die Übergangsmatrix mit 2 absorbierenden Zuständen lautet

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & \text{J} & \text{S} & \text{P} & \text{ANP} & \text{AP} \\ \hline \text{J} & 0.80 & 0.15 & 0 & 0.05 & 0 \\ \text{S} & 0 & 0.70 & 0.20 & 0.10 & 0 \\ \text{P} & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0.05 \\ \hline \text{ANP} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{AP} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Bsp: Personalplan - $(I-Q)^{-1}$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 0.20 & -.15 & 0 \\ 0 & 0.30 & -.20 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2.5 & 10 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (I-Q)^{-1} R = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.50 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bsp: Personalplan - Antworten

1. Einstieg in die Kanzlei als Junior (t_1):
   Die erwartete Zeit als Junior (t_1) = $[(I-Q)^{-1}]_{11} = 5$
   Die erwartete Zeit als Senior (t_2) = $[(I-Q)^{-1}]_{12} = 2.5$
   Die erwartete Zeit als Partner (t_3) = $[(I-Q)^{-1}]_{13} = 10$

   Die erwartete Gesamtzeit, die ein als Junior aufgenommener Anwalt (t_1) in der Kanzlei verbringt, ist

   $$5 + 2.5 + 10 = 17.5$$

2. Die Ws, dass ein Junior Anwalt (t_1) als Partner ausscheidet (a_2), ist das

   Element 12 von $(I-Q)^{-1} R = 0.50$

Bsp: Personalplan - Antworten

3. Wie groß ist die erwartete Kanzleizugehörigkeit, wenn man als Partner (t_3) eintritt? Das ist die durchschnittliche Zeit, die man als Partner (t_3) verbringt, nachdem man Partner (t_3) geworden ist.

$$\text{Element } 33 \text{ in } (I - Q)^{-1} = 20$$