Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Systeme von Differenzengleichungen
Kapitel 6

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Was sind Systeme von Differenzengleichungen
- Äquivalenz zu Systemen 1.Ordnung
- Lösung von Systemen von Differenzengleichungen

Beispiele

1: Mehr-Sektoren-Modell

- Jeder Sektor gehorcht seiner eigenen Dynamik.
- Die Sektoren interagieren. Sie beeinflussen sich gegenseitig.

Bsp: Ein dynamisches Input-Output-Modell (siehe unten)

2: Einfache, dynamische Volkswirtschaft

Einfache Volkswirtschaft mit Konsum und Investitionen:
Konsumfunktion (Permanente Einkommenshypothese)

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2\, Y_t + \alpha_3\, C_{t-1}$$

Investitionsfunktion (Akzeleratorprinzip)

$$I_t = \beta_1 + \beta_2\, Y_t^e + \beta_3\, K_{t-1}$$

Adaptive Erwartung für den/das zukünftigen Output/Einkommen

$$Y_t^e - Y_{t-1}^e = \gamma\,(Y_{t-1} - Y_{t-1}^e)$$

2: (Fs)

Definition des Kapitalstocks

$$K_t = K_{t-1} + I_t - \delta\, K_{t-1}$$

Identität

$$Y_t = C_t + I_t$$

Das ergibt ein dynamisches System in: C, T, K.
Y_t wird über die Identität eliminiert.

3: Allgemeines Gleichgewichtsmodell

Allgemeines Gleichgewichtsmodell mit N Gütern und Preisanpassung

Angebot für Gut i, $q^s_{i,t}$, und Nachfrage $q^d_{i,t}$

$$q^s_{i,t} = \alpha_i \, p_{i,t}, \quad q^d_{i,t} = \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} \, p_{j,t}$$

Preisanpassung

$$p_{i,t} - p_{i,t-1} = \gamma_i \, (q^d_{i,t} - q^s_{i,t})$$

System in p_i. Für $q^d_{i,t}$ und $q^s_{i,t}$ wird substituiert.

4: Werbung und Absatz, mehrere Anbieter

$s_{i,t}$	...	Absatz, sales des Anbieters i, $i = 1, \ldots, N$
$a_{i,t}$	...	Werbeausgaben des Anbieters i
a_t	...	Werbeausgaben gesamt
m	...	Marktpotenzial (fix) $\delta = \delta(a_{j,t})$ ... Vergessensrate

$$s_{i,t} - s_{i,t-1} = \alpha \, \frac{a_{i,t}}{a_t} \, (m - s_{i,t-1}) - \delta \, s_{i,t-1}$$

$$\sum_i s_{i,t} = m$$

- Die Veränderung der Verkäufe des Anbieters i hängt nun vom Anteil an den gesamten Werbeausgaben und dem Vergessen seiner Kunden ab.
- Die Wirksamkeit der Werbung ist proportional zum noch nicht ausgeschöpften Marktpotenzial, $(m - s_{i,t-1})$.

Transformation von LDGen höherer Ordnung zu einem System 1.Ordnung

Lösungsansatz für ein System

- Es ist möglich jede *Differenzengleichung höherer Ordnung* als System von Differenzengleichungen *erster Ordnung* darzustellen.
- Ebenso kann jedes *System höherer Ordnung* in ein System *erster Ordnung* umgewandelt werden.
- Der Trick besteht darin, für jede höhere Verzögerung eine neue Variable einzuführen. Die Dimension des Systems wird durch die zusätzlichen Variablen zwar größer, die Methode zur Lösung des Systems bleibt aber die selbe.
- Wir benötigen daher nur Lösungstechniken für Systeme erster Ordnung.

Transformation einer LDG 2.Ordnung

LDG 2.Ordnung

$$y_{t+2} + a_1\, y_{t+1} + a_2\, y_t = c$$

Wir führen *eine künstliche* Variable x_t ein

$$x_t = y_{t+1} \qquad (\rightarrow\ x_{t+1} = y_{t+2})$$

und setzen ein

$$\begin{aligned} x_{t+1} + a_1\, x_t + a_2\, y_t &= c \\ y_{t+1} - x_t &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten ein 2-dimensionales System 1.Ordnung in den Variablen x_t und y_t.

Transformation in Matrixschreibweise

In Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$A\, \mathbf{x}_{t+1} + B\, \mathbf{x}_t = \mathbf{c}$$

Notation:
Matrizen werden mit Großbuchstaben bezeichnet.
Vektoren fett geschrieben, im Gegensatz zu den einzelnen Variablen.

Bsp: Transformation einer LDG 3.Ordnung

LDG 3.Ordnung

$$z_{t+3} + 4\, z_{t+2} - 3\, z_{t+1} + 2\, z_t = 7$$

Wir führen künstliche Variable y_t und x_t ein

$$\begin{aligned} y_t &= z_{t+1} && (\rightarrow \; y_{t+1} = z_{t+2}) \\ x_t &= y_{t+1} && (\rightarrow \; x_{t+1} = y_{t+2} = z_{t+3}) \end{aligned}$$

und setzen ein

$$\begin{array}{ccccccc} x_{t+1} & & & +4\, x_t & -3\, y_t & +2\, z_t & =7 \\ & y_{t+1} & & - \; x_t & & & =0 \\ & & z_{t+1} & & - \; y_t & & =0 \end{array}$$

Bsp: (Fs)

In Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$I\, \mathbf{x}_{t+1} + B\, \mathbf{x}_t = \mathbf{c}$$

Das ist ein 3-dimensionales System 1.Ordnung in den Variablen x_t, y_t und z_t.

Lösung von Systemen von Differenzengleichungen

Beispiel

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_{t+1} \qquad &+6\,x_t + 9\,y_t = 4 \\ y_{t+1} - &\;\; x_t \qquad\quad = 0 \end{aligned}$$

Wie finden wir Pfade, die beide Gleichungen erfüllen?

Gesucht sind die **partikuläre** und **komplementäre** Lösung.

Die Angabe entspricht der LDG 2.Ordnung

$$y_{t+2} + 6\,y_{t+1} + 9\,y_t = 4$$

Partikuläre Lösung: y_p

Die partikuläre Lösung beschreibt das intertemporale Gleichgewicht, $\overline{x}, \overline{y}$.

Wir versuchen eine konstante Lösung:

$$x_{t+1} = x_t = \overline{x}, \qquad y_{t+1} = y_t = \overline{y}$$

$$\left.\begin{aligned} 7\,\overline{x} + 9\,\overline{y} &= 4 \\ -\overline{x} + \overline{y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \overline{x}, \overline{y} = \tfrac{1}{4}$$

Andernfalls setzen wir

$$x_t = k_1\,t,\; y_t = k_2\,t$$

Komplementäre Lösung: y_c

Ansatz:

$$x_t = m\,b^t, \qquad y_t = n\,b^t$$

m, n sind Konstante. Hier gilt zwangsläufig $b = b_x = b_y$.

Einsetzen in das **homogene** System (vgl. die char. Gleichungen)

$$\begin{aligned} (b+6)\,m + 9\,n &= 0 \\ -m + b\,n &= 0 \end{aligned}$$

In Matrixform

$$\begin{bmatrix} b+6 & 9 \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($m = n = 0$ ist immer eine Lösung.)

y_c: (Fs)

Fall 1: Die Koeffizientenmatrix ist nicht singulär.
Die einzige Lösung des homogenen Gleichungssystems ist Null:
$x_c = y_c = 0$. Dh: x_c und y_c weichen nie von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ab.
Eine uninteressante Lösung.

Fall 2: Die Koeffizientenmatrix ist singulär.

$$\begin{vmatrix} b+6 & 9 \\ -1 & b \end{vmatrix} = 0 = b^2 + 6\,b + 9$$

Das ist die charakteristische Gleichung zur LDG 2.Ordnung. Die Determinante des obigen homogenen Systems heißt **charakteristische Gleichung** des Systems.

Die Wurzeln sind hier (doppelte reelle Nullstellen)

$$b_1 = b_2 = -3 = b$$

y_c: (Fs)

Für das homogene System können wir nun die Lösungen für m und n angeben. Da die Koeffizientenmatrix singulär ist, gibt es unendliche viele Lösungen. (Vgl Eigenvektoren).

ZB aus der 2.Gleichung folgt (wir benötigen nur eine Gleichung)

$$m_i = b_i\, n_i \qquad i = 1, 2$$

Im konkreten Fall folgt $n_1 = n_2$ und $m_1 = m_2$, da $b_1 = b_2$.

$$m = -3\, n$$

n setzen wir A_3 und m ergibt sich als $m = -3\, A_3$.
Der erste Term im Ansatz hat nun jeweils die Form

$$\text{für } x: \; -3\, A_3\, (-3)^t \qquad \text{für } y: \; A_3\, (-3)^t$$

wobei doppelte Nullstellen vorliegen.

y_c und allgemeine Lösung: $y = y_c + y_p$

Die komplementäre Funktion für mehrfache Wurzeln ist

$$\begin{aligned} x_t = x_c &= -3\, A_3\, (-3)^t - 3\, A_4\, t\, (-3)^t \\ y_t = y_c &= A_3\, (-3)^t + A_4\, t\, (-3)^t \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist $\quad x_p = y_p = 1/4$.

Wir kombinieren beide, die komplementäre und die partikuläre Lösung zur **allgemeinen Lösung** in Abhg von den Anfangswerten

$$\begin{aligned} x_t &= x_c + x_p \\ y_t &= y_c + y_p \end{aligned}$$

In Matrixnotation

In Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I\,\mathbf{u} + K\,\mathbf{v} = \mathbf{d}$$

(1) Partikuläre Lösung: Wir setzen

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

Lösung, falls $(I+K)^{-1}$ existiert

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = (I+K)^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

In Matrixnotation (Fs)

(2) Komplementäre Lösung: Wir setzen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} b^t, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} b^{t+1},$$

und lösen damit

$$I\,\mathbf{u} + K\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Das gibt

$$(b\,I + K) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} b^t = \mathbf{0}$$

In Matrixnotation (Fs)

Schließen wir triviale Lösungen aus, muss gelten

$$|b\,I + K| = 0$$

Die Determinante liefert die **charakteristische Gleichung**. Deren Lösungen, b_i, sind die **charakteristischen Wurzeln**.
Sie sind die Eigenwerte von $-K$.

$$|(-K) - b\,I| = 0$$

Lösung für m_i, k_i, n_i

Wenn die Wurzeln verschieden sind, ist die komplementäre Lösung

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i \, b_i^t \\ \sum n_i \, b_i^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum k_i \, A_i \, b_i^t \\ \sum A_i \, b_i^t \end{pmatrix}$$

k_i und A_i ergeben sich unter Zuhilfenahme der linearen Abhängigkeit der Zeilen der Matrix $[b_i \, I + K]$.

Wenn mehrfache Wurzeln auftreten, dann verwendet man

$$A_3 \, b^t, \quad A_4 \, t \, b^t, \quad A_5 \, t^2 \, b^t, \text{ etc}$$

Für (konjugiert) komplexe Wurzeln, zB

$$y_t = A_j \, r^t (\cos \theta_j \, t + i \, \sin \theta_j \, t) + \ldots = \alpha_j^{(1)} \, r^t \, [2 \cos(\theta_j \, t + \alpha_j^{(2)})] + \ldots$$

Allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

- Für Systeme höherer Ordnung kann das Auffinden der Lösung mühsam werden.
- Alle Variablen besitzen (für $K \neq I$) *das selbe Konvergenzverhalten*, und daher die selben b's.

Beispiele

1: Dynamisches Input-Output Modell

x_i	...	Output in USD der i-ten Industrie, $i = 1, 2$
a_{ij}	...	Wert des i-ten Gutes, das in die Produktion des j-ten Gutes vom Wert eines USD eingeht
d_i	...	Endnachfrage (Bestellungen)

ZB Industrie 1

$$x_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + d_1$$

Nun führen wir eine Produktionsverzögerung von einer Periode ein:

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= a_{11}\,x_{1,t} + a_{12}\,x_{2,t} + d_{1,t} \\ x_{2,t+1} &= a_{21}\,x_{1,t} + a_{22}\,x_{2,t} + d_{2,t} \end{aligned}$$

1: In Matrixform, y_p

In Matrixform

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\,\mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t \ \text{ bzw } \ I\mathbf{x}_{t+1} - A\,\mathbf{x}_t = \mathbf{d}_t$$

Wir halten $\mathbf{d}$ fest: $\mathbf{d}_t = \mathbf{d} = (d_1, d_2)'$.
(Bzw wir lösen das System für jedes $\mathbf{d}_t$ neu.)

Partikuläre Lösung: y_p

Ansatz: $x_{i,t} = \bar{x}_i$

$$[I - A]\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = [I - A]^{-1}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

sofern $[I - A]^{-1}$ existiert.

1: y_c

Komplementäre Lösung: y_c

Ansatz:	$x_{i,t} = \beta_i\, b^t$
Homogenes System:	$\mathbf{x}_{t+1} - A\,\mathbf{x}_t = \mathbf{0}$
Charakteristische Gleichung:	$\lvert b\,I - A\rvert = 0 \quad \rightarrow \quad b_{1,2}$

Falls $b_1 \neq b_2$:

$$\begin{aligned} x_{1,c} &= A_1\, b_1^t + A_2\, b_2^t, \\ x_{2,c} &= A_3\, b_1^t + A_4\, b_2^t. \end{aligned}$$

Die Zusammenhänge von A_1 und A_3 bzw A_2 und A_4 ergeben sich aus der linearen Abhängigkeit der Zeilen in

$$(b\,I - A)\,(x_{1,c}, x_{2,c})' = \mathbf{0}$$

2: Rechenbeispiel

Gegeben ist das 2-dimensionale System

$$\begin{aligned} x_{t+1} \quad\quad + x_t + 2\,y_t &= 24 \\ y_{t+1} + 2\,x_t - 2\,y_t &= 9 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x_0 = 10$, $y_0 = 9$.

Partikuläre Lösung: $x_t = \bar{x} = 7$, $y_t = \bar{y} = 5$

$$\begin{aligned} \bar{x} \quad + \bar{x} + 2\,\bar{y} &= 24 \\ \bar{y} + 2\,\bar{x} - 2\,\bar{y} &= 9 \end{aligned} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2: (Fs)

Komplementäre Lösung:

(1) Ansatz: $x_t = m\,b^t$, $y_t = n\,b^t$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[I\,b + K]\,(m, n)' = (0, 0)'$$

(2) **Charakteristische Gleichung**. Nichttriviale Lösungen von

$$|I\,b + K| = 0 = b^2 - b - 6 \qquad b_{1,2} = 3, -2$$

Es ergeben sich verschiedene reelle Lösungen: $b_1 \neq b_2$.

2: (Fs)

Die Lösung hat nun die Form

$$\begin{aligned} x_c &= m_1\,b_1^t + m_2\,b_2^t \\ y_c &= n_1\,b_1^t + n_2\,b_2^t \end{aligned}$$

Bem: Im Fall $b_1 = b_2 = b$ würde das System lauten

$$\begin{aligned} x_c &= m_1\,b^t + m_2\,t\,b^t \\ y_c &= n_1\,b^t + n_2\,t\,b^t \end{aligned}$$

2: (Fs)

(3) Es gibt unendlich viele Lösungen für m und n.
Aus der 1.Gleichung von $[I\,b + K]\,(m,n)' = (0,0)'$ folgt

$$b\,m + m + 2\,n = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = [-2/(1+b)]\,n$$

Für $i = 1$, $b_1 = 3$: Wir setzen $n_1 = A_1 \rightarrow m_1 = (-2/4)\,A_1$,
für $i = 2$, $b_2 = -2$: Wir setzen $n_2 = A_2 \rightarrow m_2 = (2)\,A_2$.

Lösung: $y = y_c + y_p$

$$x_t = (-1/2)\,A_1\,3^t + 2\,A_2\,(-2)^t + 7$$

$$y_t = A_1\,3^t + A_2\,(-2)^t + 5$$

2: (Fs)

(4) **Mit Anfangswerten** $x_0 = 10$, $y_0 = 9$ bei $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,A_1 + 2\,A_2 + 7 \\ A_1 + A_2 + 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 2$$