Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Eigenwerte und Eigenvektoren
Kapitel 5

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Eigenwert einer Matrix
- Eigenvektor zum zugehörigen Eigenwert
- Charakterisierung einer Matrix über die Eigenwerte
- Rechenregeln für Matrizenoperationen und Eigenwerte
- Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen
- Geometrische Reihe

Lösung eines homogenen Gleichungssystems

Wir betrachten ein homogenes Gleichungssystem der Form

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Es hat immer mindestens eine Lösung, nämlich den Nullvektor, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)'$.

Ist A eine $n \times n$ Matrix und $\det(A) = 0$, so gibt es auch andere, nichttriviale Lösungen.

Ist $\mathbf{y}$ eine Lösung, so ist zB auch jedes Vielfache davon, $\lambda\mathbf{y}$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$ eine:

$A\mathbf{y} = \mathbf{0} \to \lambda A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{0} \to A(\lambda\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Das Eigenwertproblem

Sei $A_{n\times n}$. Gesucht sind alle Werte für λ ($\lambda \in \mathbb{R}$ bzw $\in \mathbb{C}$) mit

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

und $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. λ heißt dann **Eigenwert** von A.

Das Problem ist identisch mit

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bzw mit

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Das Eigenwertproblem (Fs)

Haben wir eine Lösung gefunden, zB λ_1, so ist eine nichttriviale Lösung für $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) von

$$A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$$

bzw

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0$$

ein **Eigenvektor** zum Eigenwert λ_1.

Es gibt unendlich viele Eigenvektoren, die sich nur um einen Skalar unterscheiden.

Beispiel

Gegeben ist eine Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}$$

Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Ansatz:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 34 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Bsp: Eigenwerte

$$\det\left[\begin{pmatrix} 41-\lambda & 12 \\ 12 & 34-\lambda \end{pmatrix}\right] = 1394 - 75\lambda + \lambda^2 - 144 = 0$$

$$\lambda^2 - 75\lambda + 1250 = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_1 = 50, \lambda_2 = 25$$

Es gibt 2 (reelle) Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 50, \quad \lambda_2 = 25$$

Bsp: Eigenvektor zu λ_1

Für $\lambda_1 = 50$ ist das folgende homogene Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 34 \end{pmatrix} - 50 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad \begin{array}{rcrcl} -9x & + & 12y & = & 0 \\ 12x & - & 16y & = & 0 \end{array}$$

Die Zeilen der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems sind linear abhängig, daher muß man nur eine der Gleichungen lösen.

Bsp: Eigenvektor zu λ_1 (Fs)

ZB ist $x = 4$, so ist $y = 3$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 50$ ist dann

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der **normierte** Eigenvektor ist

$$\mathbf{x}_1^N = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Er hat die Länge 1.

R gibt immer normierte Eigenvektoren aus.

Bsp: Eigenvektor zu λ_2

Für $\lambda_2 = 25$ ist das folgende homogene Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = 0$$

$$\begin{array}{rcrcl} 16x & + & 12y & = & 0 \\ 12x & + & 9y & = & 0 \end{array}$$

ZB ist $y = 4$, so ist $x = -3$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 25$ ist dann

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bsp: Eigenvektor zu λ_2 (Fs)

Der normierte Eigenvektor ist

$$\mathbf{x}_2^N = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander. (Die Matrix A ist symmetrisch.)

$$(\mathbf{x}_1^N)' \, \mathbf{x}_2^N = 0$$

Eigenschaften von Eigenwerten

- Eigenwerte sind nur für quadratische Matrizen definiert.
- Eine $n \times n$ Matrix besitzt höchstens n verschiedene Eigenwerte.
- Ist eine Matrix symmetrisch, sind ihre Eigenwerte reell.
- Die Hauptdiagonalelemente einer (oberen oder unteren) Dreiecksmatrix sind zugleich ihre Eigenwerte.

$$|A - \lambda \, I_n| = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)$$

Eigenschaften von Eigenwerten

Die **Spur** (trace) einer $(n \times n)$ Matrix ist definiert als die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente.

$$sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Im Englischen: $sp(A) = tr(A)$.

Den Zusammenhang zwischen Spur und Eigenwerte beschreibt die folgende Beziehung:

$$sp(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Die Summe der Eigenwerte ist die Spur von A.

Eigenschaften von Eigenwerten

Eine Matrix A heißt **positiv definit**, wenn alle

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

gilt.

Eine Matrix A heißt **negativ definit**, wenn alle

$$\lambda_i < 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

gilt.

Eine Matrix heißt **semipositiv** bzw **seminegativ definit**, wenn

$$\lambda \geq 0 \quad \text{bzw} \quad \lambda \leq 0$$

gilt.

Eigenschaften von Eigenwerten

- Ist $\det(A) = 0$, so ist ein Eigenwert von A Null, $\lambda = 0$. Umgekehrt: Aus $\lambda = 0$ folgt $\det(A) = 0$.
- $$\det(A) = \det(A') = \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i$$
- Ist λ Eigenwert von A und $\det(A) \neq 0$, so ist $(1/\lambda)$ Eigenwert von A^{-1}.
  A und A^{-1} besitzen dieselben Eigenvektoren.
  $(A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \rightarrow (1/\lambda)\,\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{x}.)$
- Sind k Eigenwerte einer Matrix verschieden, so sind die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig.

Diagonalisierung von A

Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix, so existiert eine reelle Matrix T mit orthogonalen und normierten Spalten,

$$T' T = I$$

und

$$A = T \Lambda T' \quad \text{bzw} \quad T' A T = \Lambda$$

Λ bezeichnet die Matrix der (reellen) Eigenwerte

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

und T ist die Matrix der normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i

$$T = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$$

Diagonalisierung von A (Motivation)

Denn

$$A T = [A \mathbf{x}_1 \ldots A \mathbf{x}_n] = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 \ldots \lambda_n \mathbf{x}_n] = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \Lambda = T \Lambda$$

Zwei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ der Länge 1 sind **orthonormal**, wenn $\mathbf{x}' \mathbf{y} = 0$ ist.

Matrix T hat die Eigenschaft

$$T' T = I \quad \text{dh} \quad T^{-1} = T'$$

da A symmetrisch ist.

$A T = T \Lambda | \cdot T^{-1}$. Also $A = T \Lambda T^{-1} = T \Lambda T'$.

Diagonalisierung von A: Eine Anwednung

Diese Eigenschaft wird in der **Faktorenanalyse** statistisch interpretiert.

Ist A eine Kovarianzmatrix, so ist sie symmetrisch und positiv (semi)definit. Angenommen es liegt eine große Anzahl von Variablen vor, die - so hofft man - durch einen niedrig dimensionalen Raum beschreiben werden können.

Die Spalten in $T \Lambda^{1/2}$ haben die Kovarianzstruktur A.
$A = (T \Lambda^{1/2})(T \Lambda^{1/2})'$

Existieren orthogonale Komponenten, die kleine Eigenwerte aufweisen, werden sie als Störungen interpretiert.

Geometrische Reihe in Matrizen

Sei der Betrag aller Eigenwerte von A kleiner 1, $|\lambda_i| < 1$, so ist

$$I + A + A^2 + A^3 + \ldots = (I - A)^{-1}$$

Herleitung:

S_k bezeichnet die endliche Summe der geometrischen Reihe

$$S_k = I + A + A^2 + \ldots + A^k$$

Multiplizieren mit $A_{n\times n}$ von links gibt

$$A\, S_k = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k+1}$$

Geometrische Reihe in Matrizen (Fs)

Die Differenz der letzten beiden Zeilen ist

$$(I - A)\, S_k = I - A^{k+1}$$

Da 1 kein Eigenwert von A lt Annahme sein darf, ist $|I - A| \neq 0$ ($|A - I| \neq 0 \Leftrightarrow |I - A| \neq 0$) und es existiert die Inverse $(I - A)^{-1}$.

$$S_k = (I - A)^{-1}\,(I - A^{k+1})$$

Es kann gezeigt werden, dass $\lim_{k\to\infty} A^{k+1} = \mathbf{0}$.

(Motivation: A^k besitze die Eigenwerte λ_i^k.

$$\det(A^k) = [\prod_{i=1}^{n} \lambda_i]^k \;\rightarrow\; 0 \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty)$$

Geometrische Reihe in Matrizen (Fs)

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (I - A)^{-1}$$