Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Differenzengleichungen höherer Ordnung
Kapitel 4

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Lösen von LDGen 2.Ordnung
- Bestimmen der Art der Konvergenz der Lösung
- Verallgemeinerung auf LDGen n-ter Ordnung

Differenzengleichung n-ter Ordnung

Eine **lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten n-ter Ordnung** in den reellen Zahlen lautet

$$y_{t+n} + a_1\, y_{t+n-1} + \ldots + a_{n-1}\, y_{t+1} + a_n\, y_t = c$$

$a_1, \ldots, a_n$ und $c \in \mathbb{R}$, mit den fix gewählten **Anfangswerten**

$$y_0,\ y_{-1},\ \ldots,\ y_{-n+1} \in \mathbb{R}$$

Lösung einer LDG:
Jede Funktion y_t in t, $y_t = f(t)$, die diese Differenzengleichung zusammen mit den Anfangswertbedingungen erfüllt, ist eine Lösung.

Differenzen höherer Ordnung

Die Differenz n-ter Ordnung ist definiert als

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} y_t)$$

Für $n = 1$: $\Delta^1 y_t = y_t - y_{t-1}$

Für $n = 2$:

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta^1 y_t) = \Delta(y_t - y_{t-1}) = y_t - 2\, y_{t-1} + y_{t-2}$$

Entweder über: $\Delta(y_t - y_{t-1}) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$

Oder: $\Delta(y_t - y_{t-1}) = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$

Allgemein gilt die **Additivität des Differenzenoperators**

$$\Delta(x_t \pm y_t) = \Delta x_t \pm \Delta y_t$$

Differenzengleichung 2-ter Ordnung

Differenzengleichung 2-ter Ordnung

$$y_{t+2} + a_1\, y_{t+1} + a_2\, y_t = c$$

a_1, a_2 und $c \in \mathbb{R}$, mit 2 fix gewählten **Anfangswerten**

$$y_0,\ y_{-1} \in \mathbb{R}$$

Wir haben

- 2 konstante Koeffizienten,
- eine Konstante und
- 2 Anfangsbedingungen.

Partikuläre Lösung: y_p

Für den langfristigen Pfad versuchen wir den Ansatz:

- $y_t = y_p = k$ für $1 + a_1 + a_2 \neq 0$:

$$k + a_1\, k + a_2\, k = c \quad \rightarrow \quad k = \frac{c}{1 + a_1 + a_2}$$

- $y_t = y_p = k\, t$ für $1 + a_1 + a_2 = 0$ und $a_1 \neq -2$:

$$k\,(t+2) + a_1\, k\,(t+1) + a_2\, k\, t = c \quad \rightarrow \quad k = \frac{c}{2 + a_1}$$

- $y_t = y_p = k\, t^2$ für $1 + a_1 + a_2 = 0$ und $a_1 = -2$:

$$k\,(t+2)^2 + a_1\, k\,(t+1)^2 + a_2\, k\, t^2 = c \quad \rightarrow \quad k = \frac{c}{2}$$

Dies erüllt nur eine LDG: $y_{t+2} - 2\, y_{t+1} + y_t = c$.

Komplementäre Lösung: y_c

Wir lösen nun die reduzierte bzw homogene LDG

$$y_{t+2} + a_1\, y_{t+1} + a_2\, y_t = 0$$

mit dem Ansatz

$$y_c = A\, b^t$$

und erhalten für die **charakteristische Gleichung**
$A\, b^{t+2} + a_1\, A\, b^{t+1} + a_2\, A\, b^t = 0 \;\; | \;\; : A\, b^t$

$$b^2 + a_1\, b + a_2 = 0$$

zwei **charakteristische Wurzeln** bzw. Lösungen.

Komplementäre Lösung: y_c (Fs)

Die Wurzeln sind

$$b_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4\, a_2}}{2}$$

Je nach Art der Nullstellen unterscheiden wir **3 Fälle**:

(1) 2 verschiedene reelle Nullstellen: $a_1^2 - 4\, a_2 > 0$

(2) doppelte (reelle) Nullstellen: $a_1^2 - 4\, a_2 = 0$

(3) 2 (konjugiert) komplexe Nullstellen: $a_1^2 - 4\, a_2 < 0$

Zwei verschiedene reelle Wurzeln

y_c:

Für $a_1^2 > 4\,a_2$ gibt es 2 reelle Lösungen für b: $b_1 \neq b_2$.

Ansatz:

$$y_c = A_1\, b_1^t + A_2\, b_2^t$$

Die beiden Komponenten b_1^t und b_2^t sind linear unabhängig.

Die Lösung für die LDG ist

$$y_t = y_c + y_p$$

A_1 und A_2 hängen von den Anfangswerten ab.

Bsp: 2 verschiedene reelle Wurzeln

$$y_{t+2} + y_{t+1} - 2\,y_t = 12, \quad y_0 = 4, y_1 = 5$$

y_c: Charakteristische Gleichung

$$b^2 + b - 2 = 0 \quad \text{mit} \quad b_1 = 1,\ b_2 = -2$$

$$y_c = A_1\ 1^t + A_2\,(-2)^t$$

y_p:

$$1 + a_1 + a_2 = 0,\ a_1 \neq -2 \quad \rightarrow \quad y_p = k\,t = 4\,t$$

y_t:

$$y_t = y_c + y_p$$

Bsp: (Fs)

Anfangswerte: $y_0 = 4, y_1 = 5$

$$y_0 = A_1 + A_2 = 4 \quad \text{und}$$

$$y_1 = A_1 + A_2\,(-2)^1 + 4 \cdot 1 = 5$$

Lösung:

$$y_t = 3 + (-2)^t + 4\,t$$

Doppelte (reelle) Wurzeln

y_c:

Für $a_1^2 = 4\,a_2$ ist $b_1 = b_2 = b$ mit

$$b = -\frac{a_1}{2}$$

Ansatz:

$$y_c = A_3\,b^t + A_4\,t\,b^t$$

($b_1 = b_2 = b$ liefert nur eine linear unabhängige Komponente: $A_3\,b^t$.)

Probe:
Einsetzen des Ansatzes für y_t, y_{t+1} und y_{t+2} in die homogene LDG. Es zeigt sich, dass der Ansatz vernünftig ist.

Bsp: doppelte (reelle) Wurzeln

$$y_{t+2} + 6\, y_{t+1} + 9\, y_t = 12$$

y_c: Charakteristische Gleichung

$$b^2 + 6\, b + 9 = 0 \quad \text{mit} \quad b_1 = b_2 = b = -a_1/2 = -3$$

$$y_c = A_3\, (-3)^t + A_4\, t\, (-3)^t$$

y_p:

$$k + k\, a_1 + k\, a_2 = 12 \quad \rightarrow \quad y_p = k = 3/4$$

Bsp: doppelte (reelle) Wurzeln (Fs)

y_t:

$$y_t = y_c + y_p$$

Lösung ohne Berücksichtigung von Anfangswerten:

$$y_t = A_3\, (-3)^t + A_4\, t\, (-3)^t + 3/4$$

Zwei konjugiert komplexe Wurzeln

y_c:

Ist $a_1^2 < 4\,a_2$ erhalten wir Nullstellen der Form

$$b_{1,2} = h \pm i\,v \quad \text{mit} \quad i = \sqrt{-1}$$

$$h = -\frac{a_1}{2}, \qquad v = \frac{1}{2}\sqrt{4\,a_2 - a_1^2}$$

Die Wurzeln sind konjugiert komplex, $b_1 = \bar{b}_2$.
Ansatz:

$$y_c = A_1\,b_1^t + A_2\,b_2^t = A_1\,(h + i\,v)^t + A_2\,(h - i\,v)^t$$

In dieser Darstellung ist das Ergebnis schwierig zu interpretieren.

y_c: (Fs)

In Polardarstellung erhalten wir mit De Moivre

$$(h \pm i\,v)^t = r^t\,[\cos(\theta\,t) \pm i\,\sin(\theta\,t)]$$

$$r = |h + i\,v| = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{a_2}, \quad \cos\theta = \frac{h}{r}, \quad \sin\theta = \frac{v}{r}$$

wobei $\cos\theta = \frac{h}{r} = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}$ und $\sin\theta = \frac{v}{r} = \sqrt{1 - a_1^2/(4\,a_2)}$ sind.

$$y_c = A_1\,r^t[\cos(\theta\,t) + i\,\sin(\theta\,t)] + A_2\,r^t[\cos(\theta\,t) - i\,\sin(\theta\,t)]$$

Die Lösung muß reell sein, da die iterative Lösung reelle Werte liefert.
Die Faktoren in $[\ldots]$ sind konjugiert komplex.

y_c: (Fs) Aus $b_1 = \bar{b}_2$ folgt $A_1 = \bar{A}_2$.

Wie müssen A_1 und A_2 beschaffen sein, sodass y_c reell ist?

Es gilt: Sind A_1 **und** A_2 **konjugiert komplex**, so ist y_c reell.

Wir betrachten konjugiert komplexe A_1 und A_2, $A_1 = \bar{A}_2$:

$$A_1 = \alpha_1\,e^{i\,\alpha_2} \quad \text{und} \quad A_2 = \alpha_1\,e^{-i\,\alpha_2}$$

$$b_1^t = r^t\,e^{i\,\theta\,t} \quad \text{und} \quad b_2^t = r^t\,e^{-i\,\theta\,t}$$

$$y_c = (\alpha_1\,e^{i\,\alpha_2})\,r^t\,e^{i\,\theta\,t} + (\alpha_1\,e^{-i\,\alpha_2})\,r^t\,e^{-i\,\theta\,t} = \alpha_1\,r^t\,[e^{i\,(\theta\,t+\alpha_2)} + e^{-i\,(\theta\,t+\alpha_2)}]$$

Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist reell. Somit

$$y_c = \alpha_1\,r^t\,[2\,\cos(\theta\,t + \alpha_2)] \in \mathbb{R}$$

Bsp1: 2 (konjugiert) komplexe Wurzeln

$$y_{t+2} + (1/4)\, y_t = 5$$

$a_1 = 0,\, a_2 = 1/4$: $\; a_1^2 < 4\, a_2 \quad \rightarrow \quad h = 0,\, v = 1/2,\, r = 1/2.$
$\cos\theta = h/r = 0, \quad \sin\theta = v/r = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \pi/2.$

$$y_p = 4$$

$$y = \alpha_1\, (1/2)^t\, [2\, \cos(\frac{\pi}{2}\, t + \alpha_2)] + 4$$

Bsp2: 2 (konjugiert) komplexe Wurzeln

$$y_{t+2} - 4\, y_{t+1} + 16\, y_t = 0$$

$a_1 = -4,\, a_2 = 16$: $\; a_1^2 < 4\, a_2 \quad \rightarrow \quad h = 2,\, v = 2\,\sqrt{3},\, r = 4.$
$\cos\theta = h/r = 1/2, \quad \sin\theta = v/r = \sqrt{3}/2 \quad \rightarrow \quad \theta = \pi/3.$

$$y_p = 0$$

$$y = \alpha_1\, 4^t\, [2\, \cos(\frac{\pi}{3}\, t + \alpha_2)]$$

Charakterisierung der Konvergenz der Lösungspfade

Fall (1): $b_1 \neq b_2$, $b_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$y_c = A_1\, b_1^t + A_2\, b_2^t$$

- $|b_1|, |b_2| > 1$
  Beide Komponenten $A_1\, b_1^t$, $A_2\, b_2^t$ divergieren: y_c explodiert.
- $|b_1| > 1 > |b_2|$ oder $|b_1| < 1 < |b_2|$: Die Wurzel mit $|b_.| > 1$ dominiert für großes t. y_c explodiert.
- $|b_1|, |b_2| < 1$
  Beide Komponenten $A_1\, b_1^t$, $A_2\, b_2^t \to 0$: y_c konvergiert.

Fall (2): $b_1 = b_2 = b$, $b \in \mathbb{R}$

$$y_c = A_3\, b^t + A_4\, t\, b^t$$

- $|b| > 1$
  Beide Komponenten b^t, und $t\, b^t$ divergieren: y_c explodiert.
- $|b| < 1$
  $b^t \to 0$ und $t\, b^t \to 0$ mit $t \to \infty$.

  Begründung für $t\, b^t \to 0$:
  b^t beschreibt ein geometrisches bzw exponentielles Wachstum, t aber nur ein lineares.
  Allgemein gilt: Jede Funktion vom Typ b^t (geometrische bzw Exponentialfunktion) steigt/fällt stärker als t^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ fix (Polynom).

Konvergenz von b^t und t^n, d'Hospital

Formal lässt sich die Dominanz von b^t mit $t \to \infty$ durch Betrachtung der Ableitungen der Funktionen zeigen.

Nach n Differentiationsschritten ist die Steigung von t^n konstant.

Hingegen, nehmen wir zB $b = e$ an, steigt die n-te Ableitung von e^t noch immer mit e^t.

Für unbestimmte Grenzwerte $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ gilt die Regel von **d'Hospital**:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Grenzwert des Quotienten ist gleich dem Grenzwert des Quotienten der ersten Ableitungen, Differenzierbarkeit vorausgesetzt.

Anwendung von d'Hospital

Fall $0 < b < 1$:
$t\, b^t = t\, (\frac{1}{b})^{-t} = \frac{t}{(1/b)^t}$.
Mit $t \to \infty$ geht auch $(1/b)^t \to \infty$.

$$\frac{(..)'}{(..)'} = 1/[(\frac{1}{b})^t \log(\frac{1}{b})] = \frac{b^t}{\log(1/b)} \;\to\; 0$$

Wir verwenden dazu $(1/b)^t = \exp(t\, \log(1/b))$, $(1/b) > 1$.

Fall (3): Komplexe Wurzeln, $b_1 = \overline{b}_2 \in \mathbb{C}$

$$y_c = \alpha_1\, r^t\, [2\, \cos(\theta\, t + \alpha_2)]$$

Die Lösung zeigt ein schwingendes Muster. Durch $\cos(\ldots)$ wird eine Cosinusschwingung, $|\cos(\ldots)| \leq 1$, abgetastet.

r^t bestimmt das Konvergenzverhalten.

- $|b_1| = |b_2| = r > 1$
  Es liegt ein explosives Verhalten von y_c vor.
- $|b_1| = |b_2| = r < 1$
  y_c konvergiert.

Differenzengleichung höherer Ordnung

Lösung einer LDG n-ter Ordnung

$$y_{t+n} + a_1\, y_{t+n-1} + \ldots + a_{n-1}\, y_{t+1} + a_n\, y_t = c$$

Das Verfahren ist analog zu oben:

(1) Suche nach einem **stationären, intertemporalen Gleichgewicht**:
$y_p = k$, falls nicht $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ mit $a_0 = 1$ gilt.
$y_p = k\,t$ oder $y_p = k\,t^2$, etc

(2) Suche nach der **komplementären Lösung**:
Die **charakteristische Gleichung** ist ein Polynom n-ten Grades

$$b^n + a_1\, b^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b + a_n = 0$$

Es gibt n **charakteristische Wurzeln**: b_i, $i = 1, \ldots, n$.

Ansätze für komplementäre Funktionen

(2a) wenn alle Wurzeln verschieden sind

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} A_i\, b_i^t$$

(2b) für mehrfache Wurzeln, eg, $b_1 = b_2 = b_3$,

$$A_1\, b_1^t + A_2\, t\, b_1^t + A_3\, t^2\, b_1^t$$

(2c) für konjugiert komplexe Wurzelpaare

$$\alpha_1\, r_1^t\, [2\, \cos(\theta_1\, t + \alpha_2)]$$

(2d) für mehrfache konjugiert komplexe Wurzelpaare

$$\alpha_1\, r_1^t\, [\ldots] + \beta_1\, r_2^t\, [\ldots]$$

$y_t = y_p + y_c$

(3) Die Lösung ist die Summe aus partikulärer und komplementärer Lösung

$$y_t = y_p + y_c$$

bei gegebenen n Anfangsbedingungen.

Konvergenzbestimmung ohne Berechnung einer expliziten Lösung

Das Schur Theorem

Wir geben eine qualitative Analyse des Zeitpfades ohne quantitative Lösung. Stabilität liegt vor, wenn für alle i gilt

$$|b_i| < 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Das Schur Theorem
Das Polynom

$$a_0\, b^n + a_1\, b^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b + a_n = 0$$

besitzt Wurzeln innerhalb des Einheitskreises, $|b_i| < 1$, genau dann, wenn die unten angegebenen Determinanten Δ_i positiv sind

$$\Delta_i > 0$$

Δ_1, Δ_2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Δ_n:

$$
\Delta_n = \begin{vmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 \\
\vdots & a_0 & & \vdots & 0 & a_n & & a_2 \\
a_{n-2} & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\
a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
\vdots & a_n & & \vdots & 0 & a_0 & & a_{n-2} \\
a_2 & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0
\end{vmatrix}
$$

Determinanten

Determinante

Die **Determinante** gibt die (mit einem Vorzeichen versehene) Fläche bzw Volumen an, das Vektoren (zusammengefasst als Spalten/Zeilen einer quadratischen Matrix) einschließen.

Die Determinante einer Matrix $A_{n\times n}$ ist Null, wenn ihre n Spalten bzw Zeilen

- *keinen* Raum der Dimension n aufspannen.
- *nicht linear unabhängig* sind.

Die Determinante einer Matrix $A_{n\times n}$ ist verschieden von Null, wenn ihre n Spalten bzw Zeilen

- *einen* Raum der Dimension n aufspannen.
- *linear unabhängig* sind.

Determinante und Rang einer Matrix $A_{n\times n}$

Es gelten folgende Zusammenhänge für quadratische Matrizen:

- $\mathbf{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert $\quad \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ Spalten von A linear unabhängig
- $\mathbf{rg}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert nicht $\quad \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ Spalten von A nicht linear unabhängig

Berechnung der Determinanten, $A_{1\times 1}$

$A_{1\times 1}$:

$$\det(A) = |A| = |[a_{11}]| = a_{11}$$

Beispiele:

$\det([2]) = |[2]| = 2$

$\det([-1]) = |[-1]| = -1$

$\det([0]) = |[0]| = 0$

Berechnung der Determinanten, $A_{2\times 2}$

$A_{2\times 2}$:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente *minus* dem Produkt der Nebendiagonalelemente.

Beispiele:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0$$

Berechnung von Determinanten, $A_{3\times 3}$

Regel von Sarrus für $A_{3\times 3}$:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23}$$

$$-[a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{21}\, a_{12}\, a_{33} + a_{11}\, a_{32}\, a_{23}]$$

Die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente plus dem Produkt ihrer Parallelen *minus* dem Produkt der Nebendiagonalelemente plus dem Produkt ihrer Parallelen.

Beispiele für Determinanten, $A_{3\times 3}$

Beispiele:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

$1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - [3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 8] = 0$

Die Zeilen sind linear abhängig: $Z_3 = Z_2 + (Z_2 - Z_1)$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - [3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2] = 8$

Berechnung von Determinanten, $A_{n\times n}$

Entwicklung nach Laplace nach der i-ten Zeile:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, (-1)^{i+j}\, |A_{ij}|$$

A_{ij} ist eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus der Matrix A gebildet wird.

Entwicklung nach Laplace nach der j-ten Spalte:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, (-1)^{i+j}\, |A_{ij}|$$

Hier wird das Problem der Berechnung einer $n \times n$ Determinante auf das einer $(n-1) \times (n-1)$ zurückgeführt.
Wenn wir bei $n = 2$ angelangt sind können wir die einfache Formel von oben anwenden, oder weiter bis auf 1×1 Matrizen reduzieren.

Beispiel für eine Determinante, $A_{4\times 4}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \text{Entwicklung nach 2.Spalte}$$

$$= 0(-1)^{1+2}|A_{12}| + 0(-1)^{2+2}|A_{22}| + 9(-1)^{3+2}|A_{32}| + 0(-1)^{4+2}|A_{42}|$$

$$= 9(-1)|A_{32}| = (-9)\,8 = -72$$

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

Regeln für Rechnen mit Determinanten

Die Determinante eines Produkts von Matrizen ist das Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen.

$$\det(A\,B) = \det(A)\ \det(B)$$

Die Determinante der transponierten Matrix und der Matrix selbst sind gleich.

$$\det(A') = \det(A)$$

Die Determinante der inversen Matrix ist gleich dem Kehrwert der Determinante der Matrix selbst.

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$$