Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Komplexe Zahlen
Kapitel 3

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Motivation

Für die Lösung von Differenzengleichungen höherer Ordnungen wird die Erweiterung der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$, auf die komplexen, $\mathbb{C}$, notwendig.

Die komplexen Zahlen helfen uns alle Nullstellen (Wurzeln) von Polynomen (hier mit reellen Koeffizienten) anzugeben.

Wir benötigen das Berechnen und Interpretieren des Betrags einer komplexen Zahl, und, dass
lineare Differenzengleichungen mit reellen Koeffizienten und reellen Anfangswerten nur reelle Lösungen besitzen.

Für die Charakterisierung der dynamischen Stabilität einer LDG 1.Ordnung benötigen wir $|b|$. Dazu werden die Beträge der komplexen Lösungen für eine LDG höherer Ordnung berechnet.

Lernziele

- Berechnen und Interpretieren des Betrags einer komplexen Zahl
- Polynome mit reellen Koeffizienten besitzen konjugiert komplexe Nullstellen
- Kennenlernen der verschiedenen Darstellungen der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene
- Rechnen mit komplexen Zahlen in 3 Darstellungen: Koordinaten-, Polarkoordinaten- und Exponential-Darstellung

Die komplexe Ebene und komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen werden in einer Ebene (**komplexe** auch **Gaußsche Zahlenebene**) mit der x-Achse als der reellen Achse und der y-Achse als der **imaginären** Achse als Punkte dargestellt.

Formal schreiben wir sie aber statt in Form eines Koordinaten-Paares, (a, b), als Zahl, eben **komplexe Zahl**.

$$z = a + i\,b$$

i ist definiert als die (positive) Wurzel aus Minus eins

$$i = \sqrt{-1}$$

i, i^2, i^3, usw.

i erhalten wir, wenn wir die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0$$

lösen. Die beiden Wurzeln sind hier $z_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Eigenschaften von i sind ua

$$i^0 = 1, \qquad i = \sqrt{-1}, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1$$

i^n hat eine Periode der Länge 4: $i^5 = i$, $i^6 = -1$, usw.

Beispiel:

$$i^{27} = i^{24+3} = i^{6\cdot 4+3} = 1 \cdot i^3 = -i$$

Konjugiert komplexe Zahl

Zwei Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ heißen **konjugiert komplex**, wenn gilt

$$z_1 = a + i\,b \quad \text{und} \quad z_2 = a - i\,b$$

Man schreibt

$$z_2 = \overline{z}_1$$

$\overline{z}$ erhält man durch *Spiegelung* von z um die x-Achse.

Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten besitzt genau n Nullstellen (mit ihrer Vielfachheit gerechnet) in den komplexen Zahlen.

Tritt eine komplexe Nullstelle auf, so auch ihre konjugiert komplexe.

Beispiel:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{mit} \quad x_{1,2} = 1 \pm i$$

Es treten 2 (konjugiert komplexe) Wurzeln auf. Es gilt:

$$\overline{x}_1 = x_2$$

Rechnen in der Koordinatendarstellung

Addition und Multiplikation

Gegeben sind 2 komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + i\,b_1, \qquad z_2 = a_2 + i\,b_2$$

Addition und Subtraktion
Die Addition/Subtraktion erfolgt komponentenweise.

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i\,(b_1 \pm b_2)$$

Multiplikation
Wir multiplizieren so, als wären alle Elemente reelle Zahlen.

$$z_1\,z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)$$

($i^2 = -1$)

Konjugiert komplexe Zahlen

$$z = a + i\,b \quad \text{und} \quad \overline{z} = a - i\,b$$

Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

$$z + \overline{z} = 2\,a$$

Das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

$$z\,.\,\overline{z} = a^2 + b^2 = r^2$$

$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = r$ ist der **Betrag** von z.

Beispiel

Beispiel 1: $z = 3 + i\,4$ und $\overline{z} = 3 - i\,4$

$$z \cdot \overline{z} = [3 \cdot 3 - 4 \cdot (-4)] - i\,[3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3] = 25$$

$r = |z| = \sqrt{25} = 5$

oder

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Beispiel 2:

$$z + \overline{z} = (3 + i\,4) + (3 - i\,4) = 6$$

Division

Division

Hier wenden wir einen Trick an: Wir erweitern den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + i\,b_2} = \frac{(a_1 + i\,b_1)(a_2 - i\,b_2)}{(a_2 + i\,b_2)(a_2 - i\,b_2)} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}(c + i\,d)$$

$$c = a_1\,a_2 + b_1\,b_2 \quad \text{und} \quad d = -a_1\,b_2 + a_2\,b_1$$

Beispiel: $z_1 = 3 + i\,4$ und $z_2 = 2 - i\,5$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i\,4}{2 - i\,5} = \frac{(3 + i\,4)(2 + i\,5)}{(2 - i\,5)(2 + i\,5)} = \frac{1}{29}(-14 + i\,23)$$

Winkelfunktionen: $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$

Grad, Bogenmaß

Wir stellen uns einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$, O, und Radius 1 vor. Darin zeichen wir einen Winkel mit Scheitel im Mittelpunkt und einem Schenkel auf der x-Achse ein. Den Winkel messen wir entweder in **Grad** oder im **Bogenmaß**.

Das Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens vom Punkt $(1, 0)$ zum Schnittpunkt, S, des zweiten Schenkels mit dem Kreis entgegen den Uhrzeiger gemessen. Die Beziehung zwischen Grad und Bogenmaß ist umkehrbar **eindeutig**, da wir den Radius des Kreises ($= 1$) festhalten.

$\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$

Der **Cosinus** eines Winkels ist die orthogonale Projektion des Vektors $\overrightarrow{OS}$ auf die x-Achse, der x-Wert von S.

Der **Sinus** eines Winkels ist die orthogonale Projektion des Vektors $\overrightarrow{OS}$ auf die y-Achse, der y-Wert von S.

Der **Tangens** eines Winkels ist die Länge der Strecke auf der Tangente im Punkt $(1, 0)$ an den Kreis zwischen dem Punkt $(1, 0)$ und dem Schnittpunkt, den man erhält, wenn der zweite Schenkel des Winkels über S, oder $(0, 0)$, hinaus verlängert wird.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Wertetabelle

x ... Bogenmaß des Winkels, $x \in [0, 2\,\pi)$
α ... Winkel in Grad, $\alpha \in [0°, 360°)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\,\pi}{2}$	$2\,\pi$
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

Wir werden stets im Bogenmaß rechnen.

Ableitungen und Taylorreihen

Die ersten Ableitungen für $\cos(x)$, $\sin(x)$ und $e^x = \exp(x)$ sind:

$$\cos(x)' = -\sin(x), \quad \sin(x)' = \cos(x), \quad \exp(x)' = \exp(x)$$

Die Taylorreihen an der Entwicklungsstelle 0 sind:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Taylorreihe Wiederholung

Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ lautet die Taylorreihe an der Entwicklungsstelle x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Polarkoordinatendarstellung

Polarkoordinaten-Darstellung

Für viele Berechnungen ist die **Polarkoordinaten-Darstellung** hilfreich. Hier beschreiben wir den Punkt (a, b) durch den Vektor der vom Ursprung, $(0, 0)$, ausgeht und in (a, b) endet.

Den Vektor können wir durch seine Länge, r, und seinen Winkel, θ, zur x-Achse, der reellen Achse, eindeutig beschreiben: (r, θ).

Als Zahl geschrieben

$$z = a + i\,b = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

mit

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tan\theta = b/a$$

Dh: $a = r\,\cos\theta \quad b = r\,\sin\theta$

Polarkoordinaten-Darstellung, Einheitskreis

Ist r eins, erhalten wir einen Vektor der Länge 1. Die Länge von z ist r: $|z| = r$.

$$z_{normiert} = z/|z| = z/r = \cos\theta + i\,\sin\theta$$

Lassen wir alle Werte aus $[0, 2\,\pi)$ für θ zu, so beschreibt $z_{normiert}$ den **Einheitskreis**. Das ist der Kreis in der komplexen Zahlenebene im Ursprung und Radius 1.

Die Projektion des zu z gehörigen Vektors auf die x-Achse ist der Cosinus des Winkels, und die Projektion auf die y-Achse der Sinus. Also

$$\cos\theta = a/r \quad \text{und} \quad \sin\theta = b/r$$

Exponentialnotation

Taylorentwicklung von $e^{i\,\theta}$

Sie kennen die Taylorentwicklung von $e^{a\,\theta}$ an der Stelle $\theta = 0$

$$e^{a\,\theta} = \exp(a\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\,\theta)^n}{n!}$$

Setzen wir für $a = i$:

$$e^{i\,\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\,\theta^n}{n!} = 1 + i\,\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\,\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + - - + + \ldots$$

$$= (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - + - \ldots) + i\,(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - + - \ldots)$$

Der erste Ausdruck in der Klammer ist die Entwicklung für den Cosinus und die zweite die Entwicklung für den Sinus. Also

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$$

Der Einheitskreis

$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$ ist also der Einheitskreis in der Exponentialnotation bzw Polarkoordinatendarstellung. Es gilt

$$|e^{i\,\theta}| = |\cos\theta + i\,\sin\theta| = 1$$

Rechnen in Polar- und Exponentialnotation

Hier ist die Multiplikation und Divison von Interesse.

Multiplikation

$$[r_1\, e^{i\,\theta_1}]\,[r_2\, e^{i\,\theta_2}] = (r_1\, r_2)\, \exp[i\,(\theta_1+\theta_2)]$$

daher

$$[r_1\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)]\,[r_2\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)] =$$

$$= r_1\, r_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

- Die Länge der neuen Zahl ist das Produkt der Längen der einzelnen.
- Der Winkel der neuen Zahl ist die Summe der beiden einzelnen.

Rechnen in Polar- und Exponentialnotation

Die Lösung für den Spezialfall z^n, $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gibt
De Moivre's Formel:

$$z^n = (r\, e^{i\,\theta})^n = r^n\, e^{i\,n\,\theta} = r^n\,[\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)]$$

θ ist der Winkel zum Bogenmaß θ.

Division

$$\frac{r_1\, e^{i\,\theta_1}}{r_2\, e^{i\,\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, \exp[i\,(\theta_1-\theta_2)]$$

Hier werden die Längen dividiert und die Winkel subtrahiert.

$$\frac{r_1\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)}{r_2\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

Wurzeln einer komplexen Zahl z

Die n-te Wurzeln (n ganzzahlig) von z, $z^{1/n}$, sind die Zahlen w, die

$$w^n = z$$

erfüllen.
Wir setzen $w = R\, e^{i\,\Theta}$ und $z = r\, e^{i\,\theta}$, sodass

$$w^n = R^n\, e^{i\,n\,\Theta} = r\, e^{i\,\theta}$$

bzw

$$R^n = r \qquad n\,\Theta = \theta + 2\pi\, N$$

gilt. $2\pi\, N$ ist notwendig, da die Winkel nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt sind.

Wurzeln einer komplexen Zahl(Fs)

Somit sind

$$R = r^{1/n}, \qquad \Theta = \frac{\theta}{n} + 2\pi\,\frac{N}{n}, \;\; N = 0, 1, \ldots, n-1$$

Beispiel: $z = (1+i) = \sqrt{2}\,e^{i\,\pi/4}$.
Gesucht sind die 3 Lösungen von $w^3 = z$ bzw $z^{1/3}$:
$w_j = R\,e^{i\,\Theta_j}$, $j = 1, 2, 3$.
$R = (\sqrt{2})^{1/3} = 2^{1/6}$,
$\Theta_1 = \frac{\pi/4}{3}$, $\Theta_2 = \frac{\pi/4}{3} + 2\pi\,\frac{1}{3}$, $\Theta_3 = \frac{\pi/4}{3} + 2\pi\,\frac{2}{3}$.

Probe:
$[2^{1/6}\,e^{i\,[\frac{\pi/4}{3}+2\pi\,\frac{1}{3}]}]^3 = 2^{1/2}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}$

Konjugiert komplexe Zahlen (Fs)

$$z = a + i\,b = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,e^{i\,\theta}$$

$$\overline{z} = a - i\,b = r\,(\cos\theta - i\,\sin\theta) = r\,e^{-i\,\theta}$$

z wird um die reele Achse gespiegelt. $\quad z \ldots (r, \theta), \quad \overline{z} \ldots (r, -\theta)$.

Addition
Die Addition von z und $\overline{z}$ ist reell:

$$z + \overline{z} = 2\,a = r\,(2\,\cos\theta) = r\,(e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta})$$

Subtraktion
Die Subtraktion von z und $\overline{z}$ ist rein komplex:

$$z - \overline{z} = 2\,i\,b = r\,(2\,i\,\sin\theta) = r\,(e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta})$$

Konjugiert komplexe Zahlen (Fs)

Multiplikation
Die Produkt von z und $\overline{z}$ ist reell:

$$z\,\overline{z} = a^2 + b^2 = r^2$$

$$z\,\overline{z} = r^2\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$z\,\overline{z} = (r\,e^{i\,\theta})\,(r\,e^{-i\,\theta}) = r^2\,e^{i\,\theta - i\,\theta} = r^2\,e^0 = r^2$$

$e^0 = 1$

r ist der Betrag von z, $|z|$, bzw die Länge des zugehörigen Vektors.