Dynamische Systeme und Zeitreihenanaylse

Taylorreihen
Kapitel 2

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Definition Taylorreihe, Beispiele
- Alternative Anschreibungen
- Interpretation
- Approximation der Veränderung einer Funktion
- Delta-Methode: Approximation von E$[f(X)]$

Taylorreihen Entwicklung

Wenn eine Funktion $f(x)$ genügend oft differenzierbar ist, kann sie durch ein Polynom n-ter Ordnung approximiert werden.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Man sagt, die Funktion $f(x)$ wird

- an der Stelle x_0 in eine *Taylorreihe* bis zur Ordnung n entwickelt.
- durch ein Polynom n-ter Ordnung approximiert.

Bezeichnungen und Kommentar

Bezeichnung:

- $f^{(k)}(x)$ bezeichnet die k-te Ableitung von f nach x.
- $f^{(k)}(x_0)$ ist der Wert der k-ten Ableitung von f an der Stelle x_0.
- $k!$ heißt k-Faktorielle:
  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.
  $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Je weiter x von der Entwicklungstelle x_0 entfernt ist, desto schlechter ist im Allgemeinen die Approximation.

Taylorreihe: $n = 1$

Für $n = 1$ ergibt sich ein Polynom erster Ordnung, bzw. eine Gerade.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Man schreibt auch

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$\doteq$ bedeutet “in erster Näherung”.

Wenn wir die Näherung verwenden, rechnen wir mit der Tangente der Funktion an der Stelle x_0 anstatt mit f.

Beispiel: $\exp(x)$

Beispiel:
$f(x) = \exp(x)$. Die Entwicklungsstelle sei $x_0 = 0$.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x$$

$$\exp(x) \approx 1 + 1\,x = 1 + x$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \exp(x) & f(0) = \exp(0) = 1 \\ f'(x) = \exp(x) & f'(0) = \exp(0) = 1 \end{array}$$

Die Tangente an $\exp(x)$ in $x_0 = 0$ ist

$$t(x) = 1 + x$$

Beispiel: $\log(1+x)$

Beispiel:
$f(x) = \log(1+x)$. Die Entwicklungsstelle sei ebenfalls $x_0 = 0$.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x$$

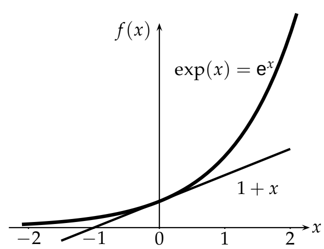
$$\log(1+x) \approx 1\,.\,x = x$$

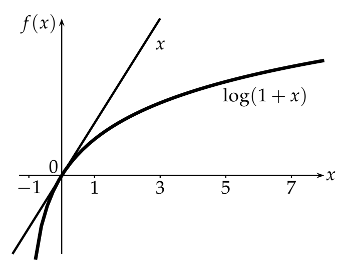
$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = \log(1+0) = \log(1) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

Die Tangente an $\log(1+x)$ in $x_0 = 0$ ist

$$t(x) = x$$

Grafik: $\exp(x)$ und $\log(1+x)$





Wir approximieren $\exp(x)$ an der Stelle 0 durch eine Gerade.

$$\exp(x) \doteq 1 + x$$

Wir approximieren $\log(1+x)$ an der Stelle 0 durch eine Gerade.

$$\log(1+x) \doteq x$$

Anwendung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x = \exp(x)$$

Eine Motivation für diese Beziehung erhalten wir über

$$(1 + \frac{x}{n})^n = e^{n\,.\,\log(1+x/n)} \doteq e^{n\,.\,(x/n)} = e^x$$

Die Näherung $\log(1+x) \doteq x$ ist gut, wenn x betragsmäßig klein ist.

Taylorreihe: $n = 2$

Für $n = 2$ ergibt sich ein Polynom zweiter Ordnung, bzw. eine Parabel.

$$f(x) \;\approx\; f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2$$

Die Approximation zweiter Ordnung ist in der Regel eine bessere lokale Approximation als die erster Ordnung.

Taylorreihe: $n = 2$ Beispiel

Beispiel:
$f(x) = \exp(x)$. Die Entwicklungsstelle ist $x_0 = 0$.

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2$$

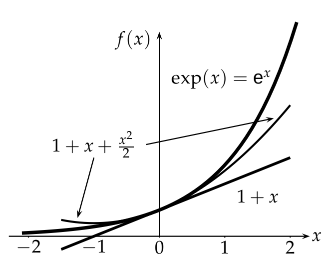
$$\exp(x) \approx 1 + \frac{1}{1}\,x + \frac{1}{2}\,x^2$$

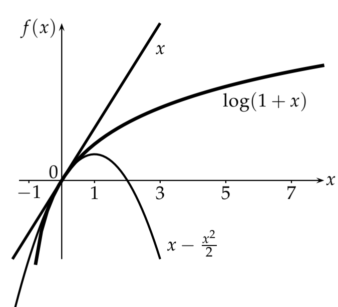
$f(x) = \exp(x)$ $\quad f(0) = \exp(0) = 1$
$f'(x) = \exp(x)$ $\quad f'(0) = \exp(0) = 1$
$f''(x) = \exp(x)$ $\quad f''(0) = \exp(0) = 1$

Allgemein gilt:

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Grafik





$$\exp(x) \doteq 1 + x \qquad \log(1 + x) \doteq x$$

$$\exp(x) \approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} \qquad \log(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

Notation: $h = (x - x_0)$

Wir heben nun die Veränderung $(x - x_0)$ hervor, indem wir $h = (x - x_0)$ bezeichnen. Die Entwicklungsstelle bezeichnen wir als x.

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \frac{f''(x)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,h^n$$

- x_0 wird durch x ersetzt,
- $(x - x_0)$ durch h, und
- x durch $(x + h)$.

Notation: $\Delta x = h = (x - x_0)$

Wir schreiben die Formel der Taylorreihe nochmals an, aber indem wir h durch Δx ersetzen.

- Δx heißt die *Veränderung von* x.

$$f(x+\Delta x) \;\approx\; f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\,\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,\Delta x^n$$

Approximation für $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Nun gehen wir einen Schritt weiter und bringen $f(x)$ auf die linke Seite. Somit haben wir eine Entwicklung für die Veränderung der Funktion erhalten.

- $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ heißt die *Veränderung von* $f(x)$ (wenn sich x um Δx ändert).

Wir vergleichen den Funktionswert an der Stelle x mit dem bei $(x + \Delta x)$.

$$\Delta f(x) \;\approx\; \frac{f'(x)}{1!}\,\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\,\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,\Delta x^n$$

Approximation für Δf in 1.Näherung

In erster Näherung gibt sich mit $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\Delta f(x) \doteq f'(x)\,\Delta x$$

Die Veränderung des Funktionswertes wird gut durch die Ableitung an der Stelle x mal der Schrittweite, Δx, beschrieben.
(Steigung der Tangente mal Schrittweite)

Diese “diskrete” Approximation einer stetigen Funktion werden wir im Folgenden oft verwenden.

Beispiel: $\log(1 + x)$

Beispiel:
$f(x) = \log(1 + x)$:
In erster Näherung gibt sich für $\Delta f(x)$

$$\Delta f(x) \doteq \frac{1}{1 + x}\,\Delta x$$

Untersuchen wir die Approximation der Veränderung von f an der Stelle $x = 2$.

$$\Delta f(2) = [f(2 + \Delta x) - f(2)] \doteq \frac{1}{1 + 2}\,\Delta x = \frac{1}{3}\,\Delta x$$

Beispiel: $\log(1 + x)$

Untersuchen wir die Approximation der Veränderung von f an der Stelle $x = 2$, wenn wir von der Stelle 2 zur Stelle 2.5 gehen. D.h..:
$\Delta x = 2.5 - 2 = 0.5$

$$\Delta f(2) = [f(2 + 0.5) - f(2)] = [f(2.5) - f(2)] \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{1 + 2}\,0.5 = \frac{1}{3}\,0.5 = \frac{1}{6}$$

Die Veränderung der Funktion zwischen 2 und 2.5 beträgt ungefähr 1/6.

Delta-Methode: Approximation von $\mathsf{E}[f(X)]$

Delta-Methode

Sei X eine ZV mit $\mathsf{E}(X) = \mu$ und $\mathsf{V}(X) = \sigma^2$. $f(X)$ sei eine nicht-lineare Funktion in X.

Die **Delta-Methode** approximiert den Erwartungswert der nicht-linearen Funktion, $\mathsf{E}[f(X)]$, in dem die Funktion in eine Taylorreihe bis zu einer (niedrigen) Potenz entwickelt, und anschließend von dieser die Erwartung genommen wird.

Approximation 1.Ordnung

Approximation 1.Ordnung
Wir entwickeln f an der Stelle μ. Also $x_0 = \mu$.

$$f(X) \doteq f(\mu) + f'(\mu)\,(X - \mu)$$

Damit ist

$$\mathsf{E}[f(X)] \approx f(\mu) \quad \text{und} \quad \mathsf{V}[f(X)] \approx f'(\mu)^2\,\sigma^2$$

Wir verwenden die Approximation 1.Ordnung der Taylorreihe und nehmen links und rechts die Erwartung bzw. Varianz:

$$\mathsf{E}[f(X)] \doteq \mathsf{E}[f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu)] = \mathsf{E}[f(\mu)] + f'(\mu)\,\mathsf{E}[(X-\mu)] = \\ = \mathsf{E}[f(\mu)]$$

$$\mathsf{V}[f(X)] \doteq \mathsf{V}[f(\mu) + f'(\mu)\,(X-\mu)] = f'(\mu)^2\,\sigma^2$$

Approximation 2.Ordnung

Approximation 2.Ordnung
Wir entwickeln f an der Stelle μ. Also $x_0 = \mu$.

$$f(X) \approx f(\mu) + \frac{f'(\mu)}{1!}(X-\mu) + \frac{f''(\mu)}{2!}(X-\mu)^2$$

Damit ist *unter der Annahme*, dass X normal verteilt ist,
$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx f(\mu) + \frac{1}{2} f''(\mu)\, \sigma^2$$

und

$$\mathrm{V}[f(X)] \approx f'(\mu)^2\, \sigma^2 + \frac{1}{2} f''(\mu)^2\, \sigma^4$$

Approximation 2.Ordnung

Die Herleitung des Erwartungswertes ist einfach.

Für die Varianz benötigen wir das 3. und 4.Moment der Normalverteilung, $\mathrm{E}[(X-\mu)^3]$ und $\mathrm{E}[(X-\mu)^4]$. Diese sind

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^3] = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{E}[(X-\mu)^4] = 3\,\sigma^4$$

Das 3.Moment ist Null, da die Normalverteilung symmetrisch ist.

Alle ungeraden zentrale Momente sind null.

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^n] = 1.3.5.\ldots.(2k-1)\,\sigma^n$$

wenn n gerade ist, $n = 2k$.

Beispiel: $f(X) = \exp(X)$

$f(X) = \exp(X)$ und $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$:
Approximation 1.Ordnung: Wir setzen ein

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx \exp(\mu) \quad \text{und} \quad \mathrm{V}[f(X)] \approx \exp(\mu)^2\, \sigma^2$$

Approximation 2.Ordnung: Wir setzen ein

$$\mathrm{E}[f(X)] \approx \exp(\mu) + \frac{1}{2}\exp(\mu)\,\sigma^2 = \exp(\mu)\,[1 + \sigma^2/2]$$

$$\mathrm{V}[f(X)] \approx \exp(\mu)^2\,\sigma^2 + \frac{1}{2}\exp(\mu)^2\,\sigma^4 = \exp(2\,\mu)\,\sigma^2\,[1 + \sigma^2/2]$$

Bemerkung:
Die ZV $Y = \exp X$ ist lognormal verteilt.