

# Teil 1: Differenzgleichungen

## Erste Motivation

- Wir behandeln dynamische Systeme in diskreter Zeit. Die zugrunde liegenden Verhaltensmodelle sind teils in stetiger teils in diskreter Zeit formuliert. Die Daten werden in der Regel aber zu fixen Zeitpunkten erhoben. Daher begnügen wir uns mit diskreten Approximationen.
- Oft gehandelte Aktien an den Börsen hingegen verlangen Verfahren in stetiger Zeit, die mathematisch anspruchsvoller sind. Sie werden in dieser LV nicht behandelt.

## Erster Methodenüberblick

- Die Dynamik wird zuerst an Hand einfacher Differenzgleichungen der Form

$$x_t = 1 + 0.5 x_{t-1} + 1.2 x_{t-2}$$

diskutiert.

Der heutige Wert hängt von den Werten der beiden Vorperioden ab.

- Um Unsicherheit zu beschreiben, werden sie im Teil 3 stochastisch erweitert.

## Erster Methodenüberblick

- Beeinflussen sich mehrere Variable dynamisch gegenseitig, bilden sie ein System.
- Wir stellen solche Systeme auf und versuchen im Teil 3 die Parameter bei gegebenen Daten zu schätzen.

Parameter:  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ .

Stochastische Störungen:  $(\epsilon_t, \eta_t)' \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ ,

$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-k}) = 0$ ,  $Cov(\eta_t, \eta_{t-k}) = 0$ ,  $Cov(\epsilon_t, \eta_{t-k}) = 0$  für alle  $k \neq 0$ .

Modell: VAR in Standardform

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1} + \eta_t$$

## Beispiele zu dynamischen, intertemporalen Zusammenhängen

### 1: Entscheidungsketten

Wir illustrieren eine Entscheidungskette an Hand der Nachfrage nach einem dauerhaften Konsumgut.

- Angenommen das verfügbare Einkommen steigt.
  - Nach einer gewissen Zeit wird das höhere Einkommen als dauerhaft wahrgenommen.
  - Es werden Kaufentscheidungen getroffen.
  - Die Bestellungen werden angenommen. Die Auftragsbücher füllen sich.
  - Die Produktions- und Liefertermine werden bestimmt.
  - Die Waren werden zugestellt. Die Rechnungen nach einer Frist bezahlt.
- Die Nachfrage ist gestiegen.

## 1: Entscheidungsketten (Fs)

Es treten

- Wahrnehmungsverzögerungen,
- Entscheidungslags,
- Lieferfristen, Zeitdauer für Produktion und
- Transaktionen, die eine gewisse Zeit in Anspruch nehmen auf.

## 2: Erwartungsbildung - Adaptive Erwartungen

Wirtschaftssubjekte versuchen oft zukünftige Entwicklungen in ihre mittel- und längerfristigen Entscheidungen zu berücksichtigen. Dazu werden Erwartungen über die zukünftigen Werte gebildet.

Eine einfache Regel bieten **adaptive Erwartungen**:

$$y_t^e - y_{t-1}^e = \alpha (y_{t-1} - y_{t-1}^e), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Der Ausdruck in der Klammer ist der Fehler, der in der Vorperiode gemacht wurde. Für die Erwartung in  $t$ ,  $y_t^e$ , wird die Erwartung für die Vorperiode  $y_{t-1}^e$ , um einen Teil ( $\alpha$ ) dieses Fehlers korrigiert.

Das Modell wird auch **Fehlerkorrekturmodell** genannt.

( $y_t^e = y_{t-1}^e +$  korrigierter Fehler)

## 3: Kapitalstock

Der Kapitalstock (zB für Ausrüstungsinvestitionen) wird nach folgendem Gesetz gebildet:

$$K_t = K_{t-1} - \delta K_{t-1} + I_t$$

- $K_t$  ... Kapitalstock zu konstanten Preisen (capital stock)
- $\delta K_{t-1}$  ... volkswirtschaftliche Abschreibungen, Abnützung des Kapitalstocks
- $\delta$  ... Abschreibungsrate,  $0 < \delta < 1$
- $I_t$  ... Investitionen zu konstanten Preisen (investments)

## 4: Lagerhaltung

Der neue Lagerbestand ergibt sich aus altem Bestand plus der Differenz von Produktion und Nachfrage.

$$I_t = I_{t-1} + Q_t - D_t$$

$I_t$  ... Lagerbestand, -stock in Stück (zB) (inventories)

$Q_t$  ... Produktion in Stück (zB)

$D_t$  ... Nachfrage, Absatz in Stück (zB)

## 5: Instandhaltung und Ersatz von Maschinen

$t$  ... Alter der Maschine

$x_t$  ... Wiederverkaufswert bei Alter  $t$  ( $x_0$  ... Anschaffungswert)

$u_t$  ... Ausgaben für vorbeugende Instandhaltung

$g_t$  ... Wirksamkeit der Instandhaltung

Ein Wertverlust der Anlage entsteht durch

$\gamma_t$  ... technischen Fortschritt

Neue Geräte sind technologisch besser.

$\delta_t$  ... Verschleißrate

$$x_t - x_{t-1} = -\gamma_t - \delta_t x_t + g_t u_t$$

## 6: Werbekapital, Goodwill

Werbeausgaben können als Investition in die Zukunft angesehen werden. ZB soll Coca Cola überall auf der ganzen Welt in den nächsten Jahren mit den Olympischen Spielen assoziiert werden.

Die Werbung beeinflusst die heutigen Verkäufe, wie auch die zukünftigen.

$A_t$  ... (Werbe)Kapitalstock, advertisement, goodwill

$a_t$  ... Werbeausgaben in Periode  $t$

$\delta$  ... Vergessensrate der Kunden

$$A_t = A_{t-1} - \delta A_{t-1} + a_t$$

Die Veränderung des Goodwillstocks,  $A_t - A_{t-1}$ , hängt von den Werbeausgaben und dem Vergessen der Kunden ab.

## 7: Werbung und Absatz

$s_t$	...	Absatz, sales
$a_t$	...	Werbeausgaben
$m$	...	Marktpotenzial (fix)
$m - s_t$	...	nicht ausgenütztes Marktpotenzial
$\delta$	...	Vergessensrate

$$s_t - s_{t-1} = \alpha a_t (m - s_{t-1}) - \delta s_{t-1}$$

- Die Veränderung der Verkäufe hängt von den Werbeausgaben und dem Vergessen der Kunden ab.
- Die Wirksamkeit der Werbung ist proportional zum noch nicht ausgeschöpften Marktpotenzial.

## 8: Diffusionsmodell - Bass-Modell

**Diffusionsmodelle** beschreiben zB die Verbreitung neuer Produkte.

**Bass Modell:**

$$s_t - s_{t-1} = \left[ p + q \frac{s_{t-1}}{m} \right] (m - s_{t-1})$$

$s_t$	...	Absatz, sales
$m$	...	Marktpotenzial (fix)
$p$	...	Innovationskoeffizient
$q$	...	Imitationskoeffizient

## 8: Diffusionsmodelle (Fs)

- Ist  $s_0 = 0$ , wirkt nur der Innovationskoeffizient.
- Ist  $s_t = m$ , sind die Zuwächse Null.
- Für  $0 < s_t < m$  hängt die Veränderung vom nicht ausgeschöpften Potenzial ( $m - s_{t-1}$ ) ab.

Das einfachere **logistische Modell** lautet:

$$s_t - s_{t-1} = \tilde{q} s_{t-1} (m - s_{t-1})$$

Beide Modelle sind *nicht linear* und werden in dieser LV nicht diskutiert.