Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Zustandsraummodelle und Kalman Filter Kapitel 15

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Repräsentation eines Zustandsraums:
  Beobachtungs- und Zustandsgleichung
- Ein Strukturmodell
- Darstellung eines ARIMA Modells als Zustandsraummodell
- Die Kalman Rekursion
- Schätzen von Zustandsraummodellen

Warum Zustandsraummodelle ?

- Zustandsraummodelle, state space models, SSM, stellen eine Verallgemeinerung von ARIMA Modellen dar.
- Das strukturelle Zeitreihenmodell von Harvey(1990) kann ebenfalls eingebettet werden.
  Es ist eine stochastische Version der klassischen Zerlegung von Zeitreihen in Trend, Saison und irregulärer Komponente.
- Die Kalman Rekursionen erlauben eine einheitliche Behandlung von Schätzung, Prognose und Glättung basierend auf der Markoff Eigenschaft von Zustandsraummodellen.
- SSM erlauben eine einfache Berücksichtigung von fehlenden Beobachtungen.

Notation

Im Folgenden bezeichnet

- $\mathbf{W}_t$ einen n-dimensionalen Vektor von ZVen für $t = 1, 2, \ldots$.
- $$\mathbf{W}_t \ \sim \ WN(\mathbf{0}\,,\, R_t)$$
  bezeichnet einen n-dimensionalen white noise,
  der das Mittel Null und
  Kovarianzmatrizen der Form
  $$E(\mathbf{W}_s\,\mathbf{W}_t') = \begin{cases} R_t & \text{für } \ s = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  besitzt.

Zustandsraummodell

Die Beobachtungsgleichung

Ein Zustandsraummodell für eine Zeitreihe $\{\mathbf{Y}_t, t = 1, 2, \ldots\}$ besteht aus 2 Gleichungen.

- Die **Beobachtungsgleichung**:
  $$\mathbf{Y}_t = G\,\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t$$
  Sie besagt, dass die n-dimensionale Beobachtung $\mathbf{Y}_t$ eine lineare Funktion einer r-dimensionalen Zustandsvariablen $\mathbf{X}_t$ plus einer n-dimensionalen Störung ist. Wobei
  - die Störung $\mathbf{W}_t \ \sim \ WN(\mathbf{0}\,,\, R)$ und
  - die Koeffizientenmatrix G die Dimension $n \times r$ hat.

Die Zustandsgleichung, Anfangswert

- Die **Zustandsgleichung**:

$$\mathbf{X}_{t+1} = F\,\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$$

  - Die Koeffizientenmatrix F hat die Dimension $r \times r$,
  - die Störung $V_t \sim WN(\mathbf{0}\,,\,Q)$, und
  - beide Störungen V_t und W_t sind unkorreliert (ie $E(\mathbf{W}_t\,\mathbf{V}'_s) = 0$ für alle s und t).

- Der **Anfangswertvektor** $\mathbf{X}_1$ ist unkorreliert mit allen $\mathbf{V}_t$ und $\mathbf{W}_t$.

Verallgemeinerungen

- Zeitabhängige Koeffizienten
  Die Matrizen G und F können zeitabhängig als G_t und F_t, $t = 1, 2, \ldots$, gewählt werden.
- Zeitabhängige Kovarianzmatrizen der Fehler
  Die Matrizen R und Q können zeitabhängig als R_t und Q_t, $t = 1, 2, \ldots$, gewählt werden.
- Kontrollvariable
  Zum Steuern des Systems kann in die Zustandsgleichung ein Kontrollterm der Form $(H_t\,\mathbf{u}_t)$ mit der Kontrollvariablen $\mathbf{u}_t$ eingeführt werden.
- Konstante und exogene Variable, $\mathbf{Z}_t$
  $\mathbf{Y}_t = \mathbf{a}_t + G_t\,\mathbf{X}_t + E_t\,\mathbf{Z}_t + \mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{b}_t + F\,\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$

Die rekursive Darstellung

Wir lösen die Zustandsgleichung rekursiv:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_t &= F\,\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{V}_{t-1} \\
&= F\,(F\,\mathbf{X}_{t-2} + \mathbf{V}_{t-2}) + \mathbf{V}_{t-1} \\
\ldots \\
&= F^{t-1}\,\mathbf{X}_1 + F^{t-2}\,\mathbf{V}_1 + \ldots + \mathbf{V}_{t-1} \\
&= f(\mathbf{X}_1, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_{t-1})
\end{aligned}$$

und somit (ohne exogene Variable)

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{a}_t + G_t\,\mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t = g(\mathbf{X}_1, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_{t-1}; \mathbf{a}_t, \mathbf{W}_t)$$

Stochastische Eigenschaften

Aus der rekursiven Darstellung folgt:

- Vergangene und gegenwärtige $\mathbf{X}_s$, wie auch $\mathbf{Y}_s$, sind unkorreliert mit $\mathbf{V}_t$.

$$E(\mathbf{V}_t\,\mathbf{X}_s') = E(\mathbf{V}_t\,\mathbf{Y}_s') = 0, \qquad 1 \le s \le t$$

- Vergangene und gegenwärtige $\mathbf{X}_s$ sind unkorreliert mit $\mathbf{W}_t$.

$$E(\mathbf{W}_t\,\mathbf{X}_s') = 0, \qquad 1 \le s \le t$$

- Vergangene $\mathbf{Y}_s$ sind unkorreliert mit $\mathbf{W}_t$.

$$E(\mathbf{W}_t\,\mathbf{Y}_s') = 0, \qquad 1 \le s < t$$

Markoffeigenschaft, Stabilität des Systems

- Ist die Folge $\mathbf{X}_1, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_{t-1}, \ldots$ nicht nur unkorreliert, sondern auch unabhängig, so gilt für $\mathbf{X}_t$ die **Markoffeigenschaft**.
  Ie, die Verteilung von $\mathbf{X}_{t+1}$ hängt nur vom Zustand $\mathbf{X}_t$ in t ab.

- Die Fortsetzung der obigen Rekursion ergibt

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} F^j\,\mathbf{V}_{t-j-1}$$

Die Zustandsgleichung ist **stabil**, wenn die Eigenwerte der Matrix F innerhalb des Einheitskreises liegen, $|\lambda_F| < 1$.
(Bzw $\det(I - F\,z) = 0$ für $|z| > 1$, die Wurzeln außerhalb des Einheitskreises.)

Zustandsraumdarstellung

Eine Zeitreihe $\{\mathbf{Y}_t, t = 1, 2, \ldots\}$ besitzt eine **Zustandsraumdarstellung**, wenn für $\{\mathbf{Y}_t\}$ ein Zustandsraummodell existiert.

ARIMA und Zustandsraummodelle

AR(1)

Sei $\{Y_t\}$ ein 1-dimensionaler *AR*(1) *Prozess*

$$Y_t = \alpha\, Y_{t-1} + Z_t\,, \qquad |\alpha| < 1\,, \qquad Z_t \;\sim\; WN(0\,,\,\sigma^2)$$

Wir definieren die *Beobachtungs-* und *Zustandsgleichungen* als

$$Y_t = X_t\,, \qquad X_{t+1} = \alpha\, X_t + V_t\,, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Die Koeffizientenmatrizen G und F sind: $G = 1$ und $F = \alpha$,
die Störungen $W_t = 0$, ie $R = 0$, und $V_t = Z_t$.

Der *Anfangswert* für X_1 ergibt sich aus der Rekursion eines AR(1)

$$X_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j\, Z_{1-j}$$

Das SSM eines AR(1)

- Der AR(1):
  - Der AR(1) ist für $t = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \infty$ nur definiert, wenn $|\alpha| < 1$ ist.
  - Geht man von einem Anfangszeitpunkt $t = 1$ mit einem Anfangswert X_1 aus, so ist der Prozess für beliebige α, also zB auch für $\alpha = 1$, definiert.
- Das SSModell:
  Ausgehend von X_1 ist der Prozess für alle α und $t = 1, 2, \ldots$ definiert.
  Daher kann man auch nicht-stationäre Prozesse modellieren.

AR(p) – Beobachtungsgleichung

Sei $\{Y_t\}$ ein 1-dimensionaler *AR(p) Prozess*, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + Z_t, \qquad Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

mit $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \ldots - \alpha_p z^p = 0$ für $|z| > 1$.

Wir führen einen p-dimensionalen *Zustandsvektor* $\mathbf{X}_t$ ein

$$\mathbf{X}_t = (Y_{t-p+1}, \ Y_{t-p+2}, \ \ldots, \ Y_t)'$$

Die *Beobachtungsgleichung* $Y_t = G_{1\times p} \mathbf{X}_t + W_t$ lautet

$$Y_t = [0 \ 0 \ \ldots \ 0 \ 1] \, \mathbf{X}_t$$

Dabei ist $\mathbf{W}_t = \mathbf{0}$.

AR(p) – Zustandsgleichung

Die *Zustandsgleichung* $\mathbf{X}_{t+1} = F_{p\times p} \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$ ist

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_p & \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \ldots & \alpha_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} Z_{t+1}$$

mit $\mathbf{V}_t = (0, 0, \ldots, Z_{t+1})'$.

ARMA(1, 1)

Sei $\{Y_t\}$ ein 1-dimensionaler *AR(1,1) Prozess*, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + Z_t - \beta Z_{t-1}, \qquad Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

mit $|\alpha|, |\beta| < 1$.

Wir definieren ein $U_t = (1 - \beta L)^{-1} Y_t$, sodass

$$(1 - \alpha L)[(1 - \beta L)^{-1} Y_t] = (1 - \alpha L) U_t = Z_t$$

und

$$Y_t = (1 - \beta L) U_t$$

Wir führen einen 2-dimensionalen *Zustandsvektor* $\mathbf{X}_t$ ein

$$\mathbf{X}_t = (U_{t-1}, \ U_t)'$$

ARMA$(1,1)$- Ein SSM

Die *Beobachtungsgleichung* $\quad Y_t = G_{1\times 2}\,\mathbf{X}_t + W_t \quad$ lautet

$$Y_t = [-\beta \;\; 1]\,\mathbf{X}_t$$

Dabei ist $\quad \mathbf{W}_t = \mathbf{0}$.

Die *Zustandsgleichung* $\quad \mathbf{X}_{t+1} = F_{2\times 2}\,\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \quad$ ist

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{X}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Z_{t+1}$$

mit $\quad \mathbf{V}_t = (0, 0, \ldots, Z_{t+1})'$.

($Y_t = U_t - \beta\, U_{t-1}$, $U_t = U_t$, $U_{t+1} = \alpha\, U_t + Z_{t+1}$)

ARIMA$(1,1,1)$

Ist $\{Y_t\}$ ein ARIMA$(1,1,1)$, so ist $\{\Delta Y_t\}$ ein ARIMA$(1,0,1)$.
Dh ΔY_t hat die Darstellung von oben
$\Delta Y_t = G\,\mathbf{X}_t \quad \mathbf{X}_{t+1} = F\,\mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \quad .$
Y_t ergibt sich aus ΔY_t als $\quad Y_t = \Delta Y_t + Y_{t-1} = G\,\mathbf{X}_t + Y_{t-1}$
Die *Beobachtungsgleichung* mit $t = 1, 2, \ldots$ wird zu

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} G & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_t \\ \mathbf{Y}_{t-1} \end{bmatrix}$$

Ein neuer Zustandsvektor $\mathbf{T_t}$, definiert durch stacking von $\mathbf{X}_t$ und $\mathbf{Y}_{t-1}$, liefert die *Zustandsgleichung*

$$\mathbf{T}_{t+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t+1} \\ \mathbf{Y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Das Strukturmodell

Beobachtungsgleichung ohne Saison

Das Zustandsraummodell ist sehr flexibel. Es erlaubt einfach deterministische und stochastische (lokale) Trends, wie auch deterministische und stochastische Saison zu beschreiben.

Das Komponentenmodell (ohne Saison) besitzt die *Beobachtungsgleichung*

$$Y_t = M_t + W_t, \qquad W_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$$

Modell mit deterministischem Niveau

Nehmen wir an

$$M_t = m_t, \qquad m_t \text{ deterministisch,}$$

so können unterschiedliche Niveaus m_t zu verschiedenen Zeitpunkten vorgegeben werden.

Die (erweiterte) *Zustandsgleichung* lautet

$$M_{t+1} = m_{t+1} + F\, M_t + V_t$$

mit $F = 0$ und $E(V_t) = Var(V_t) = 0$.

Modell mit stochastischem Niveau

Die *Zustandsgleichung* ist

$$M_{t+1} = M_t + V_t, \qquad V_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$$

mit Anfangsniveau M_1. Sie ist ein random walk ohne Drift. Zusammen mit der Beobachtungsgleichung ergibt sich ein **random walk plus noise**.

$$Y_t = M_t + W_t, \qquad M_{t+1} = M_t + V_t$$

Dieser Prozess ist ein **ARIMA**$(0, 1, 1)$.

Stoch Niveau und ARIMA$(0, 1, 1)$

Der differenzierte Prozess ΔY_t gehorcht

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = V_{t-1} + W_t - W_{t-1}$$

Er ist stationär mit Mittel Null und besitzt die ACF

$$\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots\} = \{1, -\sigma_w^2/(2\,\sigma_w^2 + \sigma_v^2), 0, 0, \ldots\}$$

eines MA(1) Prozesses $\quad \rho_1 = -\beta/(1+\beta^2), \quad \rho_s = 0, s > 1, \quad$ mit

$$(\Delta Y_t) = Z_t - \beta\, Z_{t-1}$$

$V(\Delta Y_t) = 2\,\sigma_w^2 + \sigma_v^2 = (1+\beta^2)\,\sigma_z^2. \quad \beta$ explizit ist

$$\beta = \frac{1}{2\sigma_w^2}(2\,\sigma_w^2 + \sigma_v^2 - \sigma_v\,\sqrt{\sigma_v^2 + 4\,\sigma_w^2})$$

Modelle mit lokalem Niveau u lok Steigung

Die *Zustandsgleichung* ist

$$M_{t+1} = M_t + B_t + V_t$$

- Lokales determ Niveau und lokale determ Steigung
  $$M_{t+1} = m_t + \beta_t, \qquad m_t, \beta_t \text{ gegeben}$$
- Stochastisches Niveau und lokale determ Steigung
  $$M_{t+1} = M_t + \beta_t + V_t, \qquad \beta_t \text{ gegeben}$$
- Determ Niveau und stoch Steigung, $\quad m_t$ gegeben
  $$M_{t+1} = m_t + B_t, \qquad B_{t+1} = B_t + U_t, \quad U_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$$
- Stoch Niveau und stoch Steigung, $\quad V_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$
  $$M_{t+1} = M_t + B_t + V_t, \qquad B_{t+1} = B_t + U_t, \quad U_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$$

Die SS-Form f stoch Niveau u stoch Steigung

Wir führen einen Zustandsvektor $\quad \mathbf{X}_t = (M_t, B_t)' \quad$ ein.

Die *Zustandsgleichung* ist

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} M_{t+1} \\ B_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_t + \begin{bmatrix} V_t \\ U_t \end{bmatrix}$$

Die *Beobachtungsgleichung* ist

$$Y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_t + W_t$$

Beispiel - Linearer Trend

Beispiel: Linearer Trend $\quad Y_t = a + b\,t + \epsilon_t$

Beobachtungsgleichung:

$$Y_t = M_t + V_t, \qquad \{V_t\} \sim WN(0, \sigma_v^2)$$

Zustandsgleichung:

$$M_{t+1} = M_t + \beta_t$$

mit

$$M_1 = a, \;\; \beta_t = b, \;\; V_t = \epsilon_t$$

Die Kalman Rekursionen

Prognose-, Filter-, Glättungsproblem

Die Kalman Rekursionen geben Lösungen im Sinne der Minimierung der Fehlerquadratsumme für das

- Prognoseproblem:
  Gegeben $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{t-1}$, gesucht $\mathbf{Y}_t$.
- Filterproblem:
  Gegeben $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_t$, gesucht $\mathbf{Y}_t$.
- Glättungsproblem:
  Gegeben $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_T$, $T > t$, gesucht $\mathbf{Y}_t$.

für $\mathbf{Y}_0 = (1, \ldots, 1)'$, Vektor der Konstanten, und $t = 1, 2, \ldots$, an.

Prognose eines Vektors

Im Gegensatz zum univariaten Fall, prognostizieren/filtern/glätten wir hier einen Vektor. Prognostizieren/Filtern/Glätten ist *komponentenweise* zu verstehen. ZB für die 1-Schritt Prognose eines Vektors $\mathbf{X}_t$:

$$\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} = (\hat{X}_{1,t|t-1}, \ldots, \hat{X}_{n,t|t-1})'$$

$$\hat{X}_{k,t|t-1} = E(X_{k,t}|\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{t-1})$$

Wir schreiben

$$\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} = E(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{t-1}) = E_{t-1}(\mathbf{X}_t)$$

Hier ist $E_{t-1}(\mathbf{X}_t)$ die Projektion von $\mathbf{X}_t$ auf die Vergangenheit von $\mathbf{Y}_t$ inklusive einer Konstanten.

Kalman Rekursion für die Prognose

Wir geben nur die Kalman Rekursion für die Prognose an.

Der Kalman Filter berechnet rekursiv die 1-Schritt Prognosen $\hat{\mathbf{X}}_{1|0}$, $\hat{\mathbf{X}}_{2|1}$, usw zusammen mit der Folge der MSE-Matrizen der 1-Schritt Prognosefehler,

$$\Omega_{t|t-1} = E[(\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})(\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})']$$

Wir beginnen mit

$$\hat{\mathbf{X}}_{1|0} = E(\mathbf{X}_1), \qquad \Omega_{1|0} = E[(\mathbf{X}_1 - E\mathbf{X}_1)(\mathbf{X}_1 - E\mathbf{X}_1)']$$

$E(\mathbf{X}_1)$ ist die unbedingte Erwartung von $\mathbf{X}_1$.

Kalman Rekursion für die Prognose (Fs)

Und weiter, $t = 1, 2, \ldots$, gelten die Rekursionen

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = F\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \Theta_t\,\Delta_t^{-1}\,(\mathbf{Y}_t - G\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})$$

$$\Omega_{t+1|t} = F\,\Omega_{t|t-1}\,F' + Q - \Theta_t\,\Delta_t^{-1}\,\Theta_t'$$

mit

$$\Delta_t = G\,\Omega_{t|t-1}\,G' + R, \qquad \Theta_t = F\,\Omega_{t|t-1}\,G'$$

Δ_t^{-1} ist die generalisierte Inverse von Δ_t.

Die 1-Schritt Prognose für $\mathbf{Y}_t$ ist einfach

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} = G\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$$

Kalman Rekursion für die Prognose (Fs)

Interpretation der Rekursion für $\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t}$

Die Prognose für $\mathbf{X}_{t+1}$ ist eine Linearkombination aus

- der letzten Prognose $\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$ und
- dem Prognosefehler der Prognose von $\mathbf{Y}_t$.

Oft werden **die einzelnen Schritte** als

(1) Anfangswerte festlegen (diskutieren wir nicht)

(2) Prognose von $\mathbf{Y}_t$, $\hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}$

(3) Update von $\mathbf{X}_t$ berechnen, $\hat{\mathbf{X}}_{t|t}$ (hier nicht explizit sichtbar)

(4) Prognose von $\mathbf{X}_{t+1}$, $\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t}$

beschrieben.

Exkurs: Generalisierte Inverse

Gegeben sei eine Matrix $A_{r\times s}$. Die generalisierte Inverse $X = A^{-1}_{s\times r}$ zu A ist eine Lösung der Gleichung

$$A\,X\,A = A$$

Die h-Schritt Prognose

Die h-Schritt Prognose, $\hat{\mathbf{X}}_{t+h|t} = E_t\mathbf{X}_{t+h}$, ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} &= F\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \Theta_t\,\Delta_t^{-1}\,(\mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}) \\
\hat{\mathbf{X}}_{t+h|t} &= F\,\hat{\mathbf{X}}_{t+h-1|t} \\
&= F^h\,\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} \\
\hat{\mathbf{Y}}_{t+h|t} &= G\,\hat{\mathbf{X}}_{t+h|t}
\end{aligned}$$

Aus der Beziehung

$$\mathbf{X}_{t+h} - \hat{\mathbf{X}}_{t+h|t} = F\,(\mathbf{X}_{t+h-1} - \hat{\mathbf{X}}_{t+h-1|t}) + \mathbf{V}_{t+h-1}$$

finden wir für $h = 2, 3, \ldots$

$$\Omega_{t+h|t} = F\,\Omega_{t+h|t}\,F' + Q$$

Die h-Schritt Prognose (Fs)

Analog ergibt sich für $h = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Delta_t^{(h)} := E[(\mathbf{Y}_{t+h} - \hat{\mathbf{Y}}_{t+h|t})\,(\mathbf{Y}_{t+h} - \hat{\mathbf{Y}}_{t+h|t})']$$

bzw

$$\Delta_t^{(h)} = G\,\Omega_{t+h|t}\,G' + R$$

Beispiel: Random walk plus noise

Das Modell ist

$$Y_t = X_t + W_t, \qquad W_t \sim WN(0, \sigma_w^2)$$

$$X_{t+1} = X_t + V_t, \qquad V_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$$

In die Kalman Prognosegleichung setzen wir für
$Y_0 := 1, \quad G = 1, \quad F = 1$ und $R = \sigma_w^2, \quad Q = \sigma_v^2.$

$$\hat{Y}_{t+1|t} = E_t Y_{t+1} = \hat{X}_{t|t-1} + \frac{\Theta_t}{\Delta_t}(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1}) = (1 - a_t)\,\hat{Y}_{t|t-1} + a_t\,Y_t$$

[$\hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} = G\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$ und $\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = F\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \Theta_t\,\Delta_t^{-1}\,(\mathbf{Y}_t - G\,\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})$]

$$a_t = \frac{\Theta_t}{\Delta_t} = \frac{\Omega_{t|t-1}}{\Omega_{t|t-1} + \sigma_w^2}$$

Beispiel: Random walk plus noise (Fs)

$\Omega_{t|t-1} = \Omega$, $\Omega_{t|t-1}$ ist unabhängig von t, so existiert eine **steady-state Lösung**, $\quad \Omega_{t+1|t} = \Omega = \Omega_{t|t-1}$.

$$\Omega_{t+1|t} = \Omega + \sigma_v^2 - \frac{\Omega^2}{\Omega + \sigma_w^2} = \Omega$$

Lösung der quadratischen Gleichung für $\Omega > 0$ ist

$$\Omega = \frac{1}{2}(\sigma_v^2 + \sqrt{\sigma_v^4 + 4\,\sigma_v^2\sigma_w^2})$$

und die a_t konvergieren mit $t \to \infty$ zu a mit

$$a = \frac{\Omega}{\Omega + \sigma_w^2}$$

Schätzung von Zustandsraummodellen

Die Likelihood

Sei θ ein Vektor, der alle Parameter, die in dem Modell auftreten umfasst. Die Likelihood ist

$$L(\theta; \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_T) = \prod_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \ldots, \mathbf{Y}_0)$$

Dies folgt aus der einfachen Beziehung für die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts von zwei Ereignissen A und B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Bei drei Ereignissen:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B, A)$$

Die Gaussian Likelihood

Unter Annahme von gemeinsam normalverteilten Fehlern ist

$$\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t \text{ und } W_t \sim MVN(\mathbf{0}, R)$$

$$\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{Y}_t, \ldots, \mathbf{Y}_0 \sim MVN(\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t}, \Omega_{t+1|t})$$

wie oben angegeben.

Unter sehr allgemeinen Bedingungen gilt, dass der ML Schätzer

- konsistent,
- asymptotisch normalverteilt,
- asymptotisch unverzerrt und
- asymptotisch effizient ist.

Dh die üblichen t-Tests können angewendet werden.