Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Saisonbereinigung und Glättung
Kapitel 10

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Klassische Zerlegung von Zeitreihen
- Saisonbereinigungsverfahren: Gleitende Durchschnitte
- Glättungsverfahren zur Prognose: Exponentielle Glättung
- Verfahren von Holt und Holt-Winters
- Modellwahl

Die klassische Zeitreihenzerlegung

3 Komponenten

Hier wird die Reihe Y_t in drei Komponenten zerlegt:

$$Y_t = f(T_t, S_t, E_t)$$

T_t . . . Trend-Zyklus
S_t . . . Saison
E_t . . . irreguläre Komponente

Die Funktion $f(\ldots)$ kann **additiv** oder **multiplikativ** sein:

$$Y_t = T_t + S_t + E_t \qquad \text{oder} \qquad Y_t = T_t \,.\, S_t \,.\, E_t$$

- **Additiv**: Der saisonale Effekt ist hier keine Funktion des Niveaus der Reihe.
- **Multiplikativ**: Der saisonale Effekt wird durch T_t verstärkt.

(Cp Fig 4-1, p138 MWH, Klassifikation nach Pegels)

Saisonbereinigung

Einzelne Schritte der Saisonbereinigung

Die **saisonbereinigte Reihe** zu Y erhalten wir als

$$(Y_t - S_t) = T_t + E_T$$

indem wir die Saisonkomponente von der beobachteten Reihe abziehen. Dabei geht man folgendermaßen vor:

1) Berechnung der Trendkomponente, T_t:
ZB linearer, exponentieller, kein Trend oder Glättung
2) Berechnung der detrended, trendbereinigten Reihe $(Y_t - T_t)$.
3) Ermittlung der Saisonkomponente, S_t, aus $(Y_t - T_t)$.
4) Berechnung von $(Y_t - S_t)$.

Gleitender Durchschnitt, k MA

Ein Verfahren zur Berechnung der Trend-Zyklus-Komponente ist der **gleitende Durchschnitt, moving average, k MA,**.

Ausgangsbasis sind **Zeitfenster** mit einer **ungeraden** Anzahl von Beobachtungen, $k = 2m + 1$.

$$T_t = \frac{1}{2m+1}(Y_{t-m} + \ldots + Y_t + \ldots + Y_{t+m})$$

Der mittleren Beobachtung t wird der Wert zugewiesen.
Die neue Reihe T_t ist um die ersten m und letzten m Beobachtungen kürzer als Y_t.

Die Stärke der Glättung hängt von der Wahl von k ab.

- Für große k wird Y_t stark,
- für kleine k wenig geglättet.

Centered moving average, 2x4 MA

Da unsere Periodenlängen oft gerade sind – 4 für Quartalsdaten, 12 für Monatsdaten (aber 5 oder 7 für Tagesdaten) – verwendet man **centered moving averages**.

Zum Beispiel der zentrierte 4 MA ist definiert als ein 2 MA eines 4 MA, bezeichnet als 2x4 MA.

Hier für den Zeitpunkt 3 formuliert:

$$T_3 = \frac{1}{2}(Y_1' + Y_2') = \frac{1}{8}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5)$$

wobei (Y_i') einen 4 MA bezeichnet. Der 2x4 MA ist ein spezieller 5 MA mit nicht-konstanten Gewichten.

Centered moving average, 2x4 MA, 2x12 MA

Explizit:
$Y_1' = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)/4, \qquad Y_2' = (Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5)/4.$
$Y_1' + Y_2' = [(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + (Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5)]/4$ und
$(Y_1' + Y_2')/2 = (Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5)/8.$

Allgemein gilt für einen **2x4 MA**:

$$T_t = (0.5Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + 0.5Y_{t+2})/4$$

Für Monatsdaten verwendet man den **2x12 MA**:

$$T_t = (0.5Y_{t-6} + Y_{t-5} + \ldots + Y_t + \ldots + Y_{t+5} + 0.5Y_{t+6})/12$$

Gewichteter k moving average

Der centered MA ist ein **gewichteter k moving average**:

$$T_t = \sum_{j=-m}^{m} a_j \, Y_{t+j} \quad \text{mit} \quad \sum_{j=-m}^{m} a_j = 1$$

Die $a_j \geq 0$ sind Gewichte. $k = 2\,m + 1$ ist ungerade.

Bsp:
Für den 2x4 MA sind die Gewichte:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

Additive Zerlegung für Monatsdaten

Für Monatsdaten schreiben wir den Zeitindex t in der Form

$$t = J.M = Jahr.Monat$$

J bezeichnet das jeweilige Jahr und M das jeweilige Monat.

1) Trend-Zyklus Komponente über einen 2x12 MA ermitteln: T_t.
2) Detrending, den Trend aus Y_t eliminieren: $(Y_t - T_t) = S_t + E_t$.
3) Saisonale Indizes (12 Stück) berechnen: $S_{J.M} = s_M$

$$s_M = \frac{1}{N_M} \sum (Y - T)_{J.M} \qquad M = 1, \ldots, 12$$

N_M bezeichnet die Anzahl der jeweiligen Monate.

4) Die irreguläre Komponente E_t ergibt sich als Residuum.

$$E_t = Y_t - T_t - S_t$$

Multiplikative Zerlegung für Monatsdaten

Man geht analog zum additiven Modell vor. Die vier Schritte für Monatsdaten sind:

1) Trend-Zyklus Komponente über einen 2x12 MA ermitteln: T_t.
2) Detrending, den Trend aus Y_t eliminieren:
$R_t = (Y_t / T_t) = S_t \,.\, E_t$.
3) Saisonale Indizes (12 Stück) berechnen: $S_t = S_{J.M} = s_M$

$$s_M = \frac{1}{N_M} \sum R_{J.M} \quad M = 1, \ldots, 12$$

4) Die irreguläre Komponente E_t ergibt sich als Residuum.

$$E_t = Y_t / (T_t \,.\, S_t)$$

X-11, X-12 Verfahren

Wesentlich verfeinerte Verfahren, die speziell auf ökonomische Reihen abgestimmt wurden, sind das X-11 und dessen Weiterentwicklung das X-12 Verfahren. Sie werden vom US Bureau of Census zur Saisonbereinigung seiner Reihen verwendet.

Exponentielle Glättung und Prognose

Prognose mittels Glättung

Wir verwenden nun Glättungsverfahren zur Prognose von Reihen.

Im Zusammenhang mit der Prognose unterscheiden wir folgende **Begriffe**:

$1, \ldots, (t-2), (t-1),$	t	$(t+1), (t+2), \ldots$
Vergangenheit,	aktueller Zeitpunkt	Zukunft
$Y_1, \ldots, Y_{t-2}, Y_{t-1},$	Y_t	$Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots$
beobachtete Werte		unbekannte Werte
angepasste, fitted, geglättete Werte		prognostizierte Werte, F_{t+j}
ex post Analyse		ex ante Analyse
Residuen, Schätzfehler		Prognosefehler, $(F_{t+j} - Y_{t+j})$

Moving averages, MA(k)

Zur Prognose können wir für

- *Reihen ohne Trend* den Durchschnitt für die gesamte Beobachtungsperiode zur Prognose verwenden.

$$F_{t+1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} Y_i$$

  Aber auch $F_{t+h} = F_{t+1}$ für $h \geq 1$.

- *Reihen mit Trend* einen **gleitenden Durchschnitt, moving average, MA(k),** (lokales Mittel)

$$F_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^{t} Y_i$$

  verwenden.
  Man beachte den Unterschied von k MA und MA(k).

MA(k), naive Prognose

- Mit $k = t$ fallen Mittel und MA zusammen.
- Für $k = 1$, $F_{t+1} = Y_t$ heißt F **naive Prognose**.
  Der zuletzt beobachtete Wert wird als Prognose verwendet.
  (Das ist optimal für einen Random Walk ohne Drift.)

Sprünge oder Verschiebungen werden bei großem k nur langsam berücksichtigt.

Einfaches exponentielles Glätten

Das **einfache exponentielle Glätten**, single exponential smoothing, **SES**, ist ein gewichteter gleitender Durchschnitte mit geometrisch fallenden Gewichten und nur einem Parameter: $0 < \alpha < 1$. Es ist *für Reihen ohne Trend und ohne Saison* geeignet.

Rekursive Darstellung:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(Y_t - F_t)$$

Die Prognose für morgen ist die letzte Prognose plus einer Fehlerkorrektur für die letzte Prognose.

- Ist α groß ($\alpha \approx 1$), wird stark auf den letzten Fehler reagiert, die Anpassung ist schnell.
- Ist α klein ($\alpha \approx 0$), wird kaum auf den Fehler reagiert, die Anpassung ist langsam.

Einfaches exponentielles Glätten (Fs)

Eine andere Darstellung der Rekursion ist (vgl adaptive Erwartungen)

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha) F_t$$

F_{t+1} ist ein gewichteter Durchschnitt aus Y_t und F_t.

Explizite Darstellung:

$$F_{t+1} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i \, Y_{t-i} + (1-\alpha)^t F_1$$

Die Prognose ergibt sich als

$$F_{t+m} = F_{t+1} \qquad m > 0$$

SES - Anfangswerte

Wahl des Anfangswertes

- Entweder die erste Beobachtung oder
- ein Mittel aus den ersten Beobachtungen verwenden.

Probleme entstehen bei kurzen Datensätzen und einem kleinen α.

SES - optimales α

Das **optimale** α wird zB so gewählt, dass die Summe der quadrierten (1-Schritt-)Prognosefehler minimiert wird.

Dazu kann entweder

- ein numerisches Verfahren zur *nicht-linearen Optimierung* herangezogen werden, oder
- eine **Gitter-Suche**, grid search, durchgeführt werden. Diese ist sehr einfach.

  Man wählt zB $\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ als **Gitter** für das Intervall $(0,\ 1)$ und berechnet für jedes gewählte α die mittlere Fehlerquadratsumme, MSE.
  Das α, das den kleinsten MSE liefert, ist das beste.

Holt's Methode

Das Verfahren von Holt erweitert das SES auf *Reihen mit linearem Trend*.

Es benötigt dafür zwei Parameter $0 < \alpha, \beta < 1$.

Das Modell lautet

$$\begin{aligned} \text{Niveau:} \quad L_t &= \alpha Y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}) \\ \text{Trend:} \quad b_t &= \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1} \\ \text{Prognose:} \quad F_{t+m} &= L_t + b_t\, m \end{aligned}$$

Bemerkung: Trend bedeutet hier die Steigung des Trends.

Die für die Periode $1, \ldots, t$ optimierten Parameter werden zur Prognose für $(t+1), (t+2), \ldots$ verwendet.

Holt's Methode (Fs)

- Die Trendgleichung ist ein SES der (diskretisierten 1-Perioden-)Steigung der Reihe mit dem Parameter β.
- Die Niveaugleichung ist ähnlich einem SES von Y mit dem Unterschied, dass der letzte Niveauwert um die Steigung verschoben wird.
- Die Prognosegleichung gibt die m-Schritt-Prognose an. Daher wird b_t mit m multipliziert.

Wir benötigen hier zwei Anfangswerte: L_1 und b_1.
ZB: $L_1 = Y_1$ und $b_1 = (Y_3 - Y_1)/2$.

Die optimalen Parameter können wiederum über ein Gitter (α, β) mit $\alpha, \beta = 0.1, \ldots, 0.9$ gewählt werden.

Die Methode von Holt-Winters

Die Methode von Holt-Winters ist zur Prognose *für Reihen mit linearem Trend und Saison* geeignet.

Es treten hier 3 Glättungsparameter auf:

$$\alpha,\ \beta \text{ und } \gamma \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$

Die Parameterwerte werden wie oben, entweder über nicht-lineare Optimierung oder über die Gittersuche ermittelt.

Holt-Winters mit additiver Saison

Im additiven Modell ist die Saison vom Niveau der Reihe unabhängig.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Niveau:} & L_t & = & \alpha(Y_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}) \\ \text{Trend:} & b_t & = & \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1} \\ \text{Saison:} & S_t & = & \gamma(Y_t - L_t) + (1-\gamma) S_{t-s} \\ \text{Prognose:} & F_{t+m} & = & L_t + b_t\, m + S_{t-s+m} \end{array}$$

- Neu ist die Saisongleichung. Hier wird eine exponentielle Glättung der $(Y_t - L_t)$ Komponente (Beobachtung minus geglättetem Niveau) berechnet.
- s ist 12 für Monatsdaten, 4 für Quartalsdaten, etc.
- Das Niveau L ergibt sich aus Y minus dem Saisoneffekt.

Holt-Winters mit multiplikativer Saison

Im multiplikativen Modell ist der Saisoneffekt proportional zum Niveau der Reihe. Der Trend selbst ist linear.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Niveau:} & L_t & = & \alpha(Y_t / S_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1}) \\ \text{Trend:} & b_t & = & \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1} \\ \text{Saison:} & S_t & = & \gamma(Y_t / L_t) + (1-\gamma) S_{t-s} \\ \text{Prognose:} & F_{t+m} & = & (L_t + b_t\, m)\,.\, S_{t-s+m} \end{array}$$

- Die Saisongleichung beschreibt eine exponentielle Glättung des Quotienten (Y_t / L_t).

Holt-Winters multipl Saison - Anfangswerte

Die benötigten Anfangswerte sind:

$$L_s, \quad b_s, \quad \text{und} \quad S_1, \dots, S_s$$

Eine Wahlmöglichkeit dafür ist:

- $L_s = (Y_1 + \dots + Y_s)/s$,
- $b_s = [(Y_{s+1} - Y_1)/s + \dots + (Y_{s+s} - Y_s)/s]/s$
  Bemerkung: $(Y_{s+1} - Y_1)/s$ ist die durchschnittliche 1-Perioden-Steigung als Durchschnitt über s Perioden berechnet.
- $S_1 = Y_1/L_s, \dots, S_s = Y_s/L_s$.

Diskussion

- Die vorgestellten Methoden sind einfach und benötigen höchstens drei Parameter.
- Sie lassen sich leicht automatisieren, so dass sie auf eine große Zahl von Reihen (zB in großen Lagerhaltungsproblemen) anwendbar werden.
- Die Zielfunktion (minimale Fehlerquadratsumme) kann bei Vorliegen von Ausreißern zB durch die Minimierung des MAPE, mean absolute percentage error, ersetzt werden.
- Die vorgestellten Modelle sind Spezialfälle des stochastischen ARIMA Modells, das später behandelt werden wird.
- Holt-Winters für expo Wachstum und multipl Saison in EViews: Die Reihe zuerst logarithmieren und dann Holt-Winters mit additiver Saison anzuwenden.

Verfahren zur Wahl eines geeigneten Modells

1) Teilen der Daten in zwei Teile:
   - Schätzdatensatz, initialization set, estimation sample:
     Für diesen Datensatz wird das Modell angepasst.
   - Testdatensatz, test set:
     Hier wird die Prognosetauglichkeit des geschätzten Modells gemessen.
2) Wahl der Glättungsmethode.
3) Schätzen des Modells für die Initialisierungsmenge.
4) Prognosegüte des Modells mit den geschätzten Parametern aus Schritt 3 an Hand des Testsatzes messen.
5) Bei Unzufriedenheit mit dem Ergebnis nochmals zu Schritt 2.