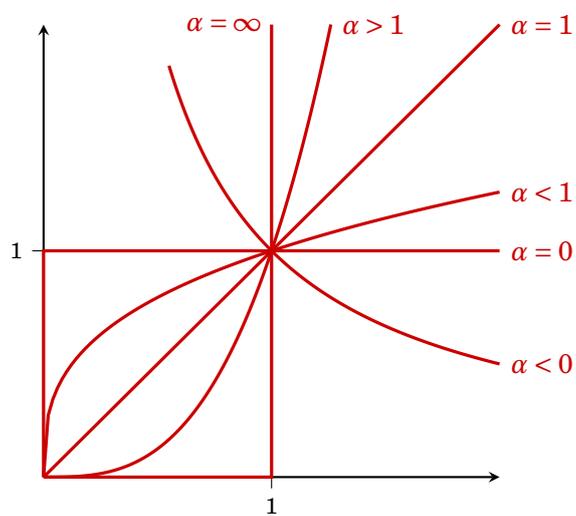


Mathematik Grundlagen

Josef Leydold



8. September 2020

Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien

Danksagung

Ich danke allen Personen, die mich auf Fehler im Skriptum aufmerksam gemacht haben.

Insbesondere danke ich Frau Ursula Doleschal und Frau Kira Zatsepina für Korrekturen und Ergänzungen im russischen Teil des [Kleines Wörterbuchs](#).

© 2012 Josef Leydold · Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/at/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Vorwort	v
1 Mengen und Abbildungen	1
1.1 Was sind Mengen?	1
1.2 Mengenverknüpfungen	3
1.3 Was ist eine Abbildung?	6
Übungen	9
2 Terme, Gleichungen und Ungleichungen	11
2.1 Zahlen	11
2.2 Terme	12
2.2.1 Das Summensymbol	13
2.2.2 Absolutbetrag	14
2.2.3 Potenzen und Wurzeln	14
2.2.4 Polynome	15
2.2.5 Lineare Terme	18
2.2.6 Rationale Terme	18
2.2.7 Exponent und Logarithmus	19
2.3 Gleichungen	20
2.3.1 Lineare Gleichungen	22
2.3.2 Betragsgleichungen	23
2.3.3 Gleichungen mit Exponenten und Logarithmus	23
2.3.4 Potenzgleichungen	24
2.3.5 Wurzelgleichungen	24
2.3.6 Quadratische Gleichungen	25
2.3.7 Nullstellen von Polynomen	25
2.3.8 Nullstellen eines Produkts	26
2.3.9 Das Newtonverfahren	26
2.4 Ungleichungen	27
2.4.1 Polynom- und andere Ungleichungen	27
2.4.2 Betragsgleichungen	29
Übungen	30

3	Folgen und Reihen	35
3.1	Was sind Folgen und Reihen?	35
3.2	Grenzwerte und ihre Berechnung	37
3.3	Arithmetische und geometrische Folgen	40
3.4	Zinsen, Renten und Kredite	41
	Übungen	45
4	Reelle Funktionen	49
4.1	Was sind Funktionen?	49
4.2	Wie zeichne ich einen Funktionsgraphen?	50
4.3	Stückweise definierte Funktionen	54
4.4	Elementare Funktionen	55
4.5	Ist f injektiv und surjektiv?	55
4.6	Die inverse Funktion	58
4.7	Limiten	60
4.8	Stetigkeit	62
	Übungen	63
5	Differentialrechnung	69
5.1	Was ist der Differentialquotient?	69
5.2	Die Ableitung einer Funktion	74
5.3	Monotonie und Konvexität	76
5.4	Lokale und globale Extremwerte	80
	5.4.1 Berechnung der lokalen Extrema	81
	5.4.2 Berechnung der globalen Extrema	83
	Übungen	86
6	Stammfunktion und Integral	93
6.1	Was ist eine Stammfunktion?	93
6.2	Was ist ein Integral?	96
6.3	Was ist ein uneigentliches Integral?	98
	Übungen	100
	Kleines Wörterbuch	103
	Register zum kleinen Wörterbuch	113
	Lösungen	117
	Symbolverzeichnis	129
	Index	131

Vorwort

Der Geiz lehrte mich zu rechnen.
Seneca, um 4 v.Chr. bis 65 n.Chr.

Mathematik ist die Sprache zur Beschreibung quantitativer und qualitativer Zusammenhänge in der Ökonomie. Die Aufgabe der von uns angebotenen Lehrveranstaltungen ist es, die für Ihr Studium wichtigsten Elemente dieser Sprache zu vermitteln. Wir müssen dabei jedoch gewisse mathematische Grundkenntnisse voraussetzen. Diese Grundfertigkeiten sollten Sie bereits in Ihrer Schulzeit, spätestens aber in den Einführungslehrveranstaltungen Ihres Studiums, erworben haben. Aus verschiedensten Gründen (exogene Faktoren sind etwa unterschiedliche Lehrpläne an verschiedenen höheren Schulen, unterschiedliche Gewichtung des Lehrstoffes in einzelnen Schulen) variieren diese Vorkenntnisse jedoch sehr stark.

Dieses Skriptum gibt einen Überblick über diese Voraussetzungen. Der hier beschriebene Stoff wird in den weiteren Lehrveranstaltungen in Mathematik und Statistik als bekannt vorausgesetzt und ist somit auch prüfungsrelevant. Das Skriptum bietet daher der oder dem Studierenden die Möglichkeit, anhand der vielen Übungsbeispiele eine Standortbestimmung ihrer bzw. seiner Vorkenntnisse zu machen. Es enthält außerdem eine Zusammenfassung des notwendigen Wissens zum Lösen der Übungsbeispiele. Es bietet somit auch die Möglichkeit, eventuell vorhandene Wissenslücken zu beheben.

Der Lehrstoff in diesem Skriptum wurde in Themenbereiche zusammengefasst. Der dadurch bedingte Verzicht auf einen linearen Aufbau wird durch zahlreiche Querverweise — die allerdings auch Vorgriffe sein können — kompensiert.

Ich möchte an dieser Stelle noch auf einige Defizite hinweisen, die in meiner Lehrtätigkeit immer wieder auftreten. Während das Durchrechnen prozeduraler Verfahren oft leicht eingeübt und reproduziert werden kann (wie z.B. das Bestimmen von lokalen Extremwerten einer Funktion), so stellt eine Aufgabe, bei der der erfolgversprechende Lösungsweg nicht sofort evident ist, weitaus größere Probleme dar. So eine Aufgabe wäre etwa das Lösen nichtlinearer Gleichungen. Versuch und Irrtum gehört durchaus zum Alltag beim Arbeiten mit mathematischen Problemen. Die Anzahl der notwendigen Versuche, bis die richtige Lösung gefunden wird, sollte sich aber durch Erfahrung („Übung“) reduzieren lassen. Lassen Sie sich also nicht sofort (also nach ein paar Minuten) entmutigen, falls Sie die Lösung noch nicht sehen können.

Besondere Probleme bereiten erfahrungsgemäß folgende Aufgaben:

- das Zeichnen (oder Skizzieren) von Funktionsgraphen,
- Äquivalenzumformungen von Gleichungen,
- das Arbeiten mit Ungleichungen,
- die korrekte Handhabung von Bruchtermen,
- das Rechnen mit Exponenten und Logarithmen,
- das Verwenden der mathematischen Notation.

Die präsentierten „Lösungen“ derartiger (Teil-) Aufgaben sind überraschend oft falsch.

Viele Übungsbeispiele wurden dankenswerterweise von Michael Hauser, Georg Lenneis und Klaus Pötzelberger zur Verfügung gestellt, bzw. stammen aus alten Klausuraufgaben des Instituts.

Umfangreiche Sammlungen weiterer Übungsaufgaben finden Sie außerdem in den Büchern aus der Reihe *Schaum's Outline*. Hier sei insbesondere das Buch

- Elliot Mendelson, *Beginning Calculus*, Schaums' Outline Series, 3rd ed., McGraw Hill, 2003

hervorgehoben.

Als Hilfestellung für Studentinnen und Studenten, für die die deutschen mathematischen Fachausdrücke noch ungewohnt sind, finden Sie auf Seite 103 ein kleines Wörterbuch für Englisch, Französisch und Russisch.

Trotz sorgfältiger Zusammenstellung befinden sich in diesem Skriptum wahrscheinlich noch einige Fehler. Das gilt insbesondere für die Lösungen der Übungsbeispiele.

Wien, im Juli 2012

Josef Leydold

Mengen und Abbildungen

Denke dir die Mengenlehre wäre als eine Art Parodie auf die Mathematik von einem Satiriker erfunden worden. – Später hätte man dann einen vernünftigen Sinn gesehen und sie in die Mathematik einbezogen.

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik
LUDWIG WITGENSTEIN (1889–1951)

1.1 Was sind Mengen?

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik. Wir begnügen uns hier mit einer höchst einfachen Definition.

Definition 1.1 (Mengen)

Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten. Ein Objekt einer Menge A heißt **Element** dieser Menge. Mengen werden üblicherweise mit lateinischen Großbuchstaben, deren Elemente mit lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnet. Die Tatsache, dass ein Objekt a Element der Menge A ist (bzw. nicht ist) bezeichnen wir mit

Menge
Element

$$a \in A \quad (\text{bzw. } a \notin A)$$

Bei dieser Definition muss natürlich eindeutig bestimmbar sein, ob ein Objekt zu einer Menge gehört oder nicht. Die „Menge“ aller reichen Österreicher ist daher in unserem Sinn gar keine Menge. (Es sei denn, wir definieren ganz genau wer *reich* ist und wer nicht.)

Kleine Mengen können definiert werden, indem man einfach die Elemente, durch Kommata getrennt, auflistet und in *geschwungene* Klammern setzt. Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an (**aufzählendes Verfahren**).

aufzählendes
Verfahren

Beispiel 1.1

Die Menge aller Buchstaben des Wortes „*Wirtschaftswissenschaften*“ besteht aus den Buchstaben $\{a, c, e, f, h, i, n, r, s, t, w\}$.

Die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner 4 ist $\{1, 2, 3\}$.

Tabelle 1.1: Einige wichtige Mengen

Symbol	Beschreibung
\emptyset	leere Menge ^a
\mathbb{N}	natürliche Zahlen ^b $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	natürliche Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{Q}	rationale Zahlen, Bruchzahlen $\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
\mathbb{R}	reelle Zahlen
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \mid a \leq x \leq b\}$
(a, b)	offenes Intervall ^c $\{x \mid a < x < b\}$
$[a, b)$	halboffenes Intervall ^d $\{x \mid a \leq x < b\}$
\mathbb{R}^+	positive reelle Zahlen $(0, \infty)$

^aIn der Schule ist das Symbol $\{\}$ üblich.

^bIn der Schule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ bzw. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

^cauch $]a, b[$

^dauch $[a, b[$

Bei größeren Mengen (insbesondere solchen mit unendlich vielen Elementen), ist diese Methode unbrauchbar. Stattdessen beschreiben wir die Menge durch jene Eigenschaften, die von allen ihren Elementen und nur von diesen erfüllt werden (**beschreibendes Verfahren**). Wir schreiben dafür

beschreibendes
Verfahren

$$M = \{x \mid x \text{ hat charakteristische Eigenschaft}\}$$

und sagen „Die Menge aller Elemente x für die gilt ...“.

Beispiel 1.2

Die Menge aller geraden Zahlen ist

$$\{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar}\}.$$

Die Menge aller WU Studentinnen und Studenten ist

$$\{x \mid x \text{ ist im Untersuchungszeitraum an der WU Wien immatrikuliert}\}.$$

Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge** Ω sind.

Obermenge

Beispiel 1.3

Für eine Wahlanalyse betrachten wir verschiedene Mengen, etwa die Menge der Wählerinnen und Wähler der Partei X, die Menge aller Wahlberechtigten mit Hochschulbildung, die Menge der Wähler, etc. Als Obermenge werden wir hier sicherlich die Menge aller Wahlberechtigten heranziehen.

Venn-
Diagramm

Mengen können durch sogenannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Dabei wird die Obermenge durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt (⇨ Abb. 1.1).

Teilmenge

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B , falls jedes Element von A auch Element

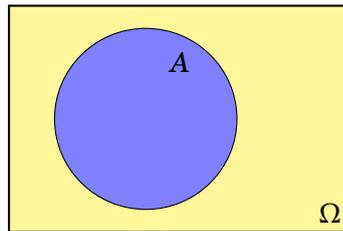


Abbildung 1.1: Venn Diagramm

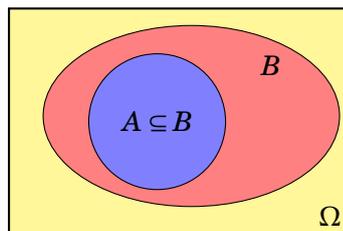


Abbildung 1.2: Teilmenge

Tabelle 1.2: Mengenverknüpfungen

Symbol	Definition	Bezeichnung	
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	Durchschnitt	A geschnitten B
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	Vereinigung	A vereinigt B
$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	Mengendifferenz	A ohne B
\overline{A}	$\Omega \setminus A$	Komplement	A komplement
$A \times B$	$\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$	Produktmenge	

von B ist. Wir schreiben $A \subseteq B$. Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** von B , $A \subset B$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

echte
Teilmenge

1.2 Mengenverknüpfungen

Mengen können miteinander verknüpft werden (☞ Tabelle 1.2). In Abb. 1.3 sind diese Mengenoperationen als Venn-Diagramme dargestellt. Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** falls $A \cap B = \emptyset$.

disjunkt

Beispiel 1.4

Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ und $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Aus dem Venn-Diagramm in Abb. 1.4 erkennen wir leicht:

$A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, $\overline{C} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \setminus C = \{1, 3\}$,
 $B \cap C = \emptyset$ (i.e., B und C sind disjunkt).

Für diese Mengenverknüpfungen gibt es — genauso wie für Addition und Multiplikation von Zahlen — Rechenregeln (☞ Tabelle 1.3). Mittels Venn-Diagrammen kann man sich diese Regeln plausibel machen. Abbildung 1.5 zeigt dies am Beispiel

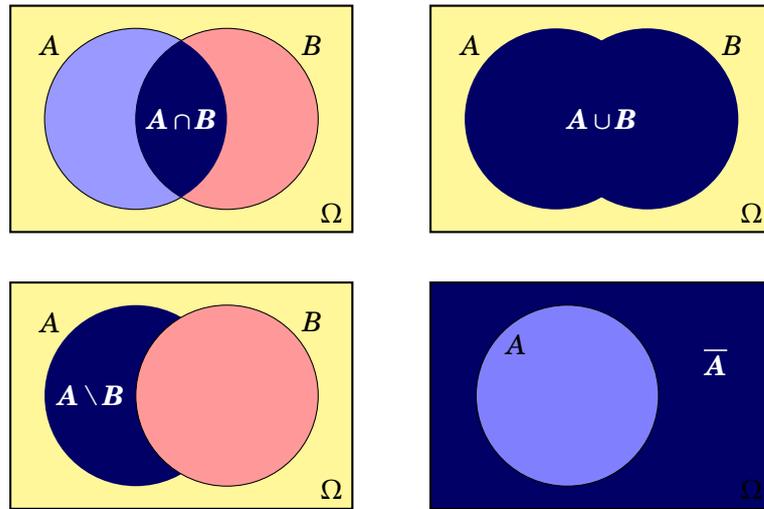


Abbildung 1.3: Venn-Diagramme von Mengenverknüpfungen

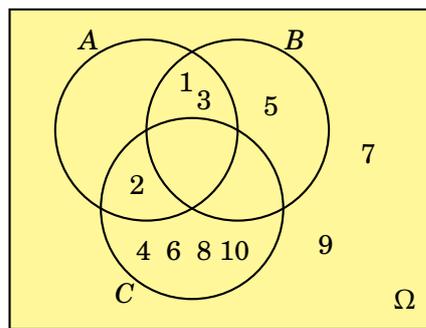


Abbildung 1.4: Venn Diagramm zu Beispiel 1.4

des Gesetzes von de Morgan. Diese Regeln erlauben es, komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen.

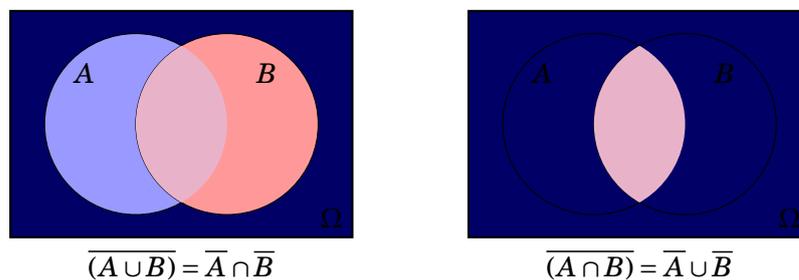


Abbildung 1.5: Gesetz von de Morgan

Beispiel 1.5

$$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)} \stackrel{(6)}{=} (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{(8)}{=} (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \stackrel{(5)}{=} A \cap (B \cup \bar{B}) \stackrel{(7)}{=} A \cap \Omega = A$$

Cartesisches Produkt

Das **Cartesische Produkt** (die *Produktmenge*) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Tabelle 1.3: Rechenregeln für Mengenverbindungen	
Regel	Bezeichnung
(1) $A \cup A = A \cap A = A$	<i>Idempotenz</i>
(2) $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$	<i>Identität</i>
(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	<i>Assoziativität</i>
(4) $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$	<i>Kommutativität</i>
(5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	<i>Distributivität</i>
(6) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	<i>Gesetz von de Morgan</i>
(7) $\overline{\overline{A}} \cup A = \Omega$ und $\overline{\overline{A}} \cap A = \emptyset$	
(8) $\overline{\overline{A}} = A$	

zweier Mengen A und B erlaubt es „zwei-dimensionale“ Mengen zu bilden.

Beispiel 1.6

Das Cartesische Produkt aus $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ ist

$$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Beispiel 1.7

Das Cartesische Produkt aus $A = [2, 4]$ und $B = [1, 3]$ ist (s. Abb. 1.6)

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [2, 4] \text{ und } y \in [1, 3]\}.$$

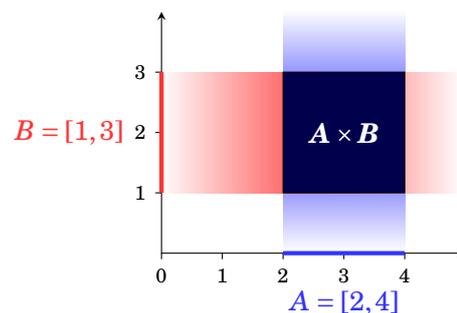


Abbildung 1.6: Cartesisches Produkt zweier Intervalle

1.3 Was ist eine Abbildung?

Funktion

Der Begriff der **Abbildung** oder **Funktion**¹ ist einer der wichtigsten Begriffe in der Mathematik. Eine Funktion ordnet jedem Element aus einer *Definitionsmenge* ein Merkmal (ein Element aus der Menge der zulässigen Merkmale, der sogenannten *Wertemenge*) *eindeutig* zu.

Abbildung

Definition 1.2 (Abbildung)

Eine **Abbildung** f ist definiert durch

Definitionsmenge

(i) eine **Definitionsmenge** D ,

Wertemenge

(ii) eine **Wertemenge** W und

Zuordnungsvorschrift

(iii) eine **Zuordnungsvorschrift**, die jedem Element von $x \in D$ **genau ein** Element $y \in W$ zuordnet.

Wir schreiben dafür

$$f : D \rightarrow W, \quad x \mapsto y = f(x)$$

unabhängige Variable

- x heißt **unabhängige Variable**, y heißt **abhängige Variable**.

abhängige Variable

- y ist das **Bild** von x , x ist das **Urbild** von y .

Bild

- $f(x)$ heißt **Funktionsterm**, x heißt **Argument** der Abbildung.

Urbild

Abbildungen können durch „Pfeildiagramme“ veranschaulicht werden, wie etwa in Abb. 1.7 auf Seite 7 dargestellt.

Funktionsterm

Beispiel 1.8

$D = \{\text{Menschen}\}$, $W = \{\text{Geburstage}\}$, $f : \text{Mensch} \mapsto \text{Geburstag}$

„Jedem Menschen wird sein Geburstag zugeordnet“ ist eine Abbildung.

Argument

Beispiel 1.9

$D = \{\text{Menschen}\}$, $W = \{\text{Staatsbürgerschaften}\}$,

$f : \text{Mensch} \mapsto \text{Staatsbürgerschaft(en)}$

„Jedem Menschen wird seine Staatsbürgerschaft zugeordnet“ ist **keine** Abbildung, da die Zuordnung nicht immer *eindeutig* (Doppelstaatsbürgerschaft) oder *möglich* (Staatenlose) ist.

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder charakterisieren (☞ Abb. 1.7).

Definition 1.3

injektiv

- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge höchstens ein Urbild besitzt.

surjektiv

- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge mindestens ein Urbild besitzt.

bijektiv

- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

¹Wir verwenden die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* synonym.

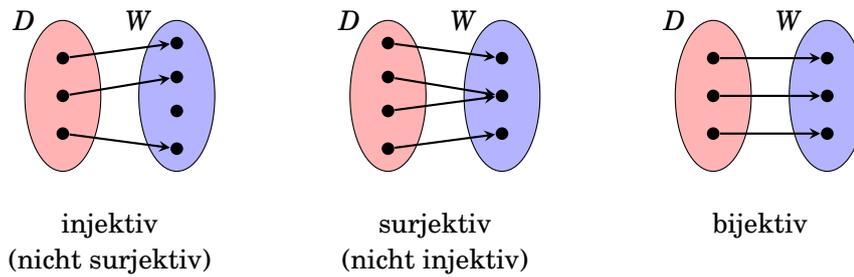


Abbildung 1.7: Schematische Darstellung von Abbildungen

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Funktion**) id , die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

Einheitsfunktion

$$id: D \rightarrow W = D, x \mapsto x$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall einer Abbildung sind **reelle Funktionen** (in einer Variable). Das sind Funktionen, in denen sowohl die Definitionsmenge als auch die Wertemenge Teilmengen (meist Intervalle) von \mathbb{R} sind. Wir werden diese Funktionen in Kapitel 4 ausführlicher besprechen.

reelle Funktion

Durch „Hintereinanderausführen“ zweier Funktionen erhalten wir eine neue Funktion (↔ Abb. 1.8).

Definition 1.4 (Zusammengesetzte Funktion)

Seien $f: D_f \rightarrow W_f$ und $g: D_g \rightarrow W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$, dann heißt die Funktion

$$g \circ f: D_f \rightarrow W_g, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

die **zusammengesetzte Funktion** von g und f (lies: g zusammengesetzt f).

zusammengesetzte Funktion

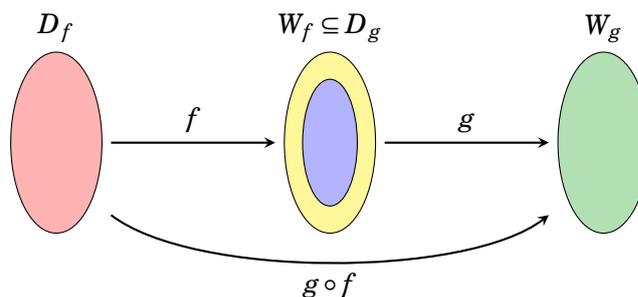


Abbildung 1.8: Zusammengesetzte Abbildung

Beispiel 1.10

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2$. und $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto g(x) = x^2$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2.$$



Bei der Verknüpfung von Funktionen kommt es auf die Reihenfolge an. Im Allgemeinen gilt

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x).$$

Beispiel 1.11

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2$. und $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto g(x) = x^2$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2.$$

Ist eine Abbildung $f: D_f \rightarrow W_f$ *bijektiv*, so kann jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$ (i.e. sein Urbild) zugeordnet werden (☞ Abb. 1.9). Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung f^{-1} mit der Definitionsmenge W_f und der Wertemenge D_f :

$$f^{-1}: W_f \rightarrow D_f, y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Definition 1.5 (Inverse Funktion)

Die Abbildung $f^{-1}: W_f \rightarrow D_f, x \mapsto y = f^{-1}(x)$ heißt die **inverse Funktion** (oder **Umkehrabbildung**) von f .

inverse Funktion
Umkehr-
abbildung

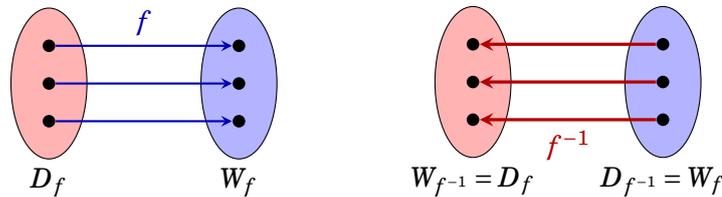


Abbildung 1.9: Umkehrabbildung

Die Umkehrabbildung hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D_f$ und $y \in W_f$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

oder formaler

$$f^{-1} \circ f = \text{id}: D_f \rightarrow D_f \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}: W_f \rightarrow W_f.$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Umkehrabbildung einer Funktion f genau dann existiert, wenn f bijektiv. Man beachte dabei aber dass Definitionsmenge und Wertemenge Bestandteil der Funktion sind.

Beispiel 1.12

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ nicht bijektiv und besitzt daher keine Umkehrabbildung.

Die Funktion $f: [0, 2] \rightarrow [0, 4], x \mapsto x^2$ ist bijektiv und besitzt die Umkehrabbildung $f^{-1}: [0, 4] \rightarrow [0, 2], x \mapsto \sqrt{x}$.

— Übungen

1. Die Obermenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1, 3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ und $C = \{3, 6, 7, 9, 10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

- | | | |
|------------------------------------|--|------------------------------------|
| (a) $A \cup C$ | (b) $A \cap B$ | (c) $A \setminus C$ |
| (d) \bar{A} | (e) $(A \cup C) \cap B$ | (f) $(\bar{A} \cup B) \setminus C$ |
| (g) $\overline{(A \cup C)} \cap B$ | (h) $(\bar{A} \setminus B) \cap (\bar{A} \setminus C)$ | (i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

2. Es sei A die Menge aller Wahlberechtigten, B die Menge aller Männer, C die Menge aller Frauen, D die Menge aller Pensionisten und E die Menge aller unselbständig Beschäftigten in einem Wahlbezirk. Geben Sie eine (vernünftige) Obermenge an. Drücken Sie folgende Mengen in Worten aus:

- | | | | |
|---------------------|----------------|----------------|-------------------------|
| (a) $A \cap B$ | (b) $A \cap C$ | (c) $B \cap E$ | (d) $A \setminus D$ |
| (e) $C \setminus A$ | (f) \bar{C} | (g) $C \cap D$ | (h) $(D \cup E) \cap C$ |

3. Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$.

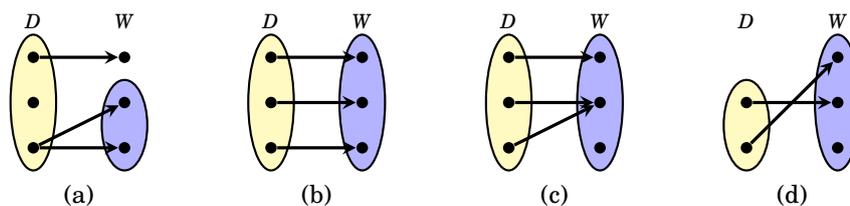
4. Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:

- | | |
|--|---|
| (a) $\overline{(A \cup B)} \cap \bar{B}$ | (b) $(A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B)$ |
| (c) $((\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{(A \cap \bar{B})}) \cap A$ | (d) $(C \cup B) \cap \overline{(\bar{C} \cap \bar{B})} \cap (C \cup \bar{B})$ |

5. Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 10 < x < 200\}$:

- | | |
|--|---|
| (a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 10 < x \leq 200\}$ | (b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 121\}$ |
| (c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 4\pi < x < \sqrt{181}\}$ | (d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 20 < x < 100\}$ |

6. Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



Terme, Gleichungen und Ungleichungen

Jeder Berufsstand hat seine eigenen Techniken und Verfahrensweisen, die Kraft macht es nicht. Ein Müller, der sich ohne seinen Vorteil die schweren Mehl- und Getreidesäcke auf die Schultern heben würde, wäre alsbald erschöpft. Da springt der sogenannte Vorteil ein, der besondere Griff. Mit dem speziellen Trick geht es mühelos.

Zu Lasten der Briefträger
ALOIS BRANDSTETTER

2.1 Zahlen

Wir unterscheiden folgende Zahlen(mengen):

- **natürliche Zahlen**¹: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **ganze Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **rationale Zahlen (Bruchzahlen)**: $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
 Rationale Zahlen können auch als **Dezimalzahlen** dargestellt werden:
 z.B. $\frac{1}{4} = 0,25$, $-\frac{5}{9} = -0,5\dot{5} = -0,55555\dots$, $\frac{5}{11} = 0,4\dot{5} = 0,454545\dots$
 Die **Dezimaldarstellung** einer rationalen Zahl ist immer *endlich* (z.B. von $\frac{1}{4}$) oder *periodisch*² (z.B. von $\frac{5}{11}$).
- **irrationale Zahlen**: Zahlen mit *unendlicher*, nicht periodischer Dezimaldarstellung
 z.B. $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, $\pi = 3,141592653\dots$, $e = 2,7182818\dots$
- **reelle Zahlen**: \mathbb{R}
 Alle rationalen und irrationalen Zahlen.

¹Manchmal wird auch 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

²Der periodische Teil der Dezimalzahl wird durch ein oder zwei Punkte dargestellt, z.B.: $0,1\dot{2}3\dot{6}$ steht für die unendliche periodische Dezimaldarstellung $0,1236236236236\dots$

Für die Dezimaldarstellung von reellen Zahlen gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Festkommaformat**

Das Komma kennzeichnet den ganzzahligen Anteil der Zahl. z.B.: 1234,56

- **Gleitkommaformat**

Das Komma steht nach der ersten Ziffer. Die Größenordnung der Zahl wird durch Multiplizieren mit einer geeigneten Potenz von 10 ausgedrückt. z.B.: $1,23456 \times 10^3$. Dabei heißt „1,23456“ die (6-stellige) **Mantisse** und „3“ der **Exponent** der Zahl.

In der EDV wird ein *Dezimalpunkt* verwendet und der Exponent durch den Buchstaben „E“ (oder „e“) dargestellt. (vgl. Bem. 2.1).

z.B.: 1.23456 E3.

Mantisse
Exponent

Bemerkung 2.1

In der englischsprachigen Literatur ist statt eines Kommas ein Dezimalpunkt („decimal point“) üblich.

Bemerkung 2.2

In welchem Format Ihr persönlicher Taschenrechner Gleitkommazahlen darstellt, entnehmen Sie bitte der Bedienungsanleitung. Die Ziffernfolge „1.23456 03“ auf dem Display ist z.B. kein gültiges Zahlenformat auf dem Papier. Richtigerweise sollte es 1234,56 oder $1,23456 \times 10^3$ lauten.

2.2 Terme

In der Mathematik trifft man auf Ausdrücke wie etwa

$$B = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

der den Barwert einer nachschüssigen Rente nach n Jahren angibt; oder

$$U = 2\pi r$$

der den Umfang eines Kreises mit Radius r angibt. Diese mathematischen Ausdrücke auf beiden Seiten des „=“-Zeichens heißen **Terme**. Sie enthalten **Zahlen**, **Konstante** (das sind Symbole, die einen *fixen* Wert repräsentieren) und **Variable** (für die ein *beliebiger* Wert eingesetzt werden kann).

Term
Konstante
Variable

Bemerkung 2.3

Konstante werden meist, aber nicht immer, mit den ersten Buchstaben (a, b, c, \dots), Variable mit den letzten Buchstaben (\dots, x, y, z) des lateinischen Alphabets bezeichnet³. Um mehr Symbole zu erhalten, werden diese Buchstaben mit Indizes versehen (z.B. a_1, a_2, a_3, x_1, P_0).

Beim Rechnen mit Termen muss darauf geachtet werden, für welche Werte der Variablen der Ausdruck definiert ist. So ist etwa der Ausdruck $\frac{1}{x-1}$ nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert, der Ausdruck $\sqrt{x+1}$ nur für $x \geq -1$. Die Menge aller erlaubten Variablenwerte heißt der **Definitionsbereich** des Terms.

Definitionsbereich

2.2.1 Das Summensymbol

Terme, die viele Summanden enthalten, die gesetzmäßig zusammenhängen, lassen sich oft durch Verwendung des **Summensymbols** \sum vereinfachen. Dabei werden die einzelnen Summanden durch ein „*Bildungsgesetz*“ mit Hilfe einer *Indexvariable* (meist i, j, k, m oder n) beschrieben. Im Summensymbol werden die untere und die obere Grenze für die *ganzzahligen* Werte dieser Indexvariable angegeben⁴.

Summensymbol

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Wir können das Summensymbol auch als Abkürzung für die rechte Seite der obigen Formel interpretieren. Dazu setzen wir im Ausdruck, auf den sich das Summensymbol bezieht, für die Indexvariable alle ganzzahligen Werte zwischen Unter- und Obergrenze ein, und addieren die so entstandenen Terme.

Beispiel 2.1

Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen größer 2 ist in verschiedenen Notationen:

$$\sum_{i=1}^{10} (2+i) = (2+1) + (2+2) + (2+3) + \cdots + (2+10)$$

Beim Rechnen mit dem Summensymbol gelten die üblichen Regeln der Arithmetik wie Assoziativgesetz und Distributivgesetz. Wir können daher, z.B., Summensymbole zusammenfassen und wieder trennen. Dabei ist zu beachten, dass die Grenzen für die Indexvariablen übereinstimmen. Die Indexvariablen dürfen aber durch verschiedene Buchstaben bezeichnet sein.

Beispiel 2.2

$$\sum_{i=2}^n a_i + \sum_{j=2}^n b_j = \sum_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n b_i = \sum_{i=2}^n (a_i + b_i)$$

Die Umbenennung von j nach i in der zweiten Summe ist erlaubt. Die Indexvariable kann ja mit einem beliebigen Buchstaben bezeichnet werden, der nur innerhalb der Summe eindeutig sein muss.

Analog zum *Summensymbol* gibt es auch das **Produktsymbol** \prod .

Produktsymbol

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

³Diese Konvention geht auf René Descartes (1596–1650) zurück.

⁴lies: „Summe über a_i von $i = 1$ bis $i = n$ “

2.2.2 Absolutbetrag

Absolutbetrag

Der **Absolutbetrag** $|x|$ einer Zahl gibt den Abstand zum Nullpunkt an. Er ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

2.2.3 Potenzen und Wurzeln

Potenz

Basis

Exponent

Eine **Potenz** von x ist ein Ausdruck⁵ der Form x^n . x heißt dabei die **Basis** und n der **Exponent** der Potenz. Für $n \in \mathbb{N}$ steht dieses Symbol für die n -fache Multiplikation von x .

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}$$

Für negative ganzzahlige Exponenten gilt:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Wurzel

Eine Zahl y heißt die n -te **Wurzel** $\sqrt[n]{x}$ von x , falls $y^n = x$. Das *Ziehen der n -ten Wurzel* stellt somit die umgekehrte Operation des *Potenzierens* dar. Für die *Quadratwurzel* \sqrt{x} wird die abgekürzte Schreibweise \sqrt{x} verwendet.

Wir können nun auch rationale Potenzen definieren:

$$x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \quad m \in \mathbb{Z}, x \geq 0$$



Bei gebrochenzahligen Exponenten muss die Basis größer oder gleich 0 sein.

Tabelle 2.1 zeigt den Zusammenhang zwischen Potenzen und Wurzeln sowie deren Rechenregeln.

Bemerkung 2.4

Potenzen lassen sich auch auf irrationale Exponenten erweitern (\mathbb{R} §2.2.7, Seite 19).

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned} \frac{(x \cdot y)^4}{x^{-2} y^3} &= x^4 y^4 x^{-(-2)} y^{-3} = x^6 y \\ \frac{(2x^2)^3 (3y)^{-2}}{(4x^2 y)^2 (x^3 y)} &= \frac{2^3 x^{2 \cdot 3} 3^{-2} y^{-2}}{4^2 x^{2 \cdot 2} y^2 x^3 y} = \frac{8 x^6 y^{-2}}{16 x^7 y^3} = \frac{1}{18} x^{6-7} y^{-2-3} = \frac{1}{18 x y^5} \\ 4^{\frac{3}{2}} &= \sqrt[2]{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8 \\ \left(3x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{4}{3}}\right)^3 &= 3^3 x^{\frac{3}{3}} y^{-\frac{12}{3}} = 27 x y^{-4} = \frac{27 x}{y^4} \end{aligned}$$

⁵lies: „ x hoch n “ oder auch „ x zur n -ten Potenz“; x^2 wird als „ x -quadrat“ bezeichnet.

Tabelle 2.1: Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Seien $n, m \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$	$x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \quad (x \geq 0)$
$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}$	$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad (x \geq 0)$
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	$x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \quad (x \geq 0)$
$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$	

Häufige Fehlerquellen:

$-x^2$ ist *nicht* gleich $(-x)^2$
 $(x+y)^n$ ist *nicht* gleich $x^n + y^n$
 $x^n + y^n$ kann (im allgemeinen) *nicht* vereinfacht werden
 $3x^n$ ist *nicht* gleich $(3x)^n$

**2.2.4 Polynome**

Ein **Monom** ist ein Produkt von Konstanten und Variablen mit nichtnegativen ganzzahligen Potenzen. Der **Grad** eines Monoms ist die Summe der Exponenten im Ausdruck.

Monom
Grad

Beispiel 2.4

 $6x^2$ ist ein Monom 2. Grades. $3x^3y$ und xy^2z sind Monome 4. Grades. \sqrt{x} und $\frac{2}{3xy^2}$ sind *keine* Monome

Ein **Polynom** ist die Summe von ein oder mehreren Monomen. Der **Grad** eines Polynoms ist der größte Grad unter den einzelnen Monomen.

Polynom
Grad

Beispiel 2.5

 $4x^2y^3 - 2x^3y + 4x + 7y$ ist ein Polynom 5. Grades.

Polynome $P(x)$ in einer Variable können mittels Summensymbol dargestellt werden,

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

wobei x die Variable und die a_i Konstanten sind.

Multiplizieren

Polynome können multipliziert werden, indem jeder Summand des ersten Polynoms mit jedem Summanden des zweiten Polynoms multipliziert wird und die Teilprodukte addiert werden.

Beispiel 2.6

$$\begin{aligned}(2x^2 + 3x - 5) \cdot (x^3 - 2x + 1) &= 2x^2 \cdot x^3 + 2x^2 \cdot (-2x) + 2x^2 \cdot 1 \\ &\quad + 3x \cdot x^3 + 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot 1 \\ &\quad + (-5) \cdot x^3 + (-5) \cdot (-2x) + (-5) \cdot 1 \\ &= 2x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 13x - 5\end{aligned}$$

binomischer
Lehrsatz

Für $(x + y)^n$ kann der **binomische Lehrsatz** verwendet werden.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Binomial-
koeffizient
Fakultät

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**⁶, und $n!$ wird als **Fakultät**⁷ von n bezeichnet. Per Definition ist $0! = 1$.

Beispiel 2.7

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ (x + y)^3 &= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3\end{aligned}$$

Faktorisieren

Faktorisieren
Faktor

Der umgekehrte Vorgang, nämlich das Zerlegen eines Polynoms in das Produkt von Polynomen niedrigerer Ordnung, wird als **Faktorisieren** bezeichnet. Das Polynom wird als Produkt von **Faktoren** dargestellt.

⁶lies: „n über k“.

⁷lies: „n-fakultät“ oder „n-faktorielle“.

Beispiel 2.8

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 4xy + 8xy^3 &= 2x \cdot (x + 2y + 4y^3) \\
 (x^2 - y^2) &= (x + y) \cdot (x - y) \\
 (x^2 - 1) &= (x + 1) \cdot (x - 1) \\
 (x^2 + 2xy + y^2) &= (x + y) \cdot (x + y) = (x + y)^2 \\
 x^3 + y^3 &= (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)
 \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren können wir uns leicht von der Richtigkeit dieser Faktorisierungen überzeugen.

Bemerkung 2.5

Das Faktorisieren eines Polynoms in mehreren Variablen ist im allgemeinen schwierig und nicht immer möglich.

Ein Faktor (Polynom) 1. Grades wird als **Linearfaktor** bezeichnet.

Linearfaktor

Für Polynome in einer Variable mit der Nullstelle x_1 erhalten wir mit $(x - x_1)$ einen Linearfaktor des Polynoms. Den zweiten Faktor erhalten wir durch *Division*. Die *Division zweier Polynome* geschieht in analoger Weise wie die Division natürlicher Zahlen.

Beispiel 2.9

$x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von $P(x) = x^3 + x^2 - 2$. Wir erhalten damit $(x - 1)$ als Linearfaktor. Der zweite Faktor ist dann $(x^3 + x^2 - 2) : (x - 1)$.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 + 0x - 2) : (x - 1) = x^2 + 2x + 2 \\
 \underline{x^2 \cdot (x - 1) \longrightarrow} \quad \begin{array}{r} x^3 - x^2 \quad |(-) \\ 2x^2 + 0x \end{array} \\
 \underline{2x \cdot (x - 1) \longrightarrow} \quad \begin{array}{r} 2x^2 - 2x \quad |(-) \\ 2x - 2 \end{array} \\
 \underline{2 \cdot (x - 1) \longrightarrow} \quad \begin{array}{r} 2x - 2 \quad |(-) \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

Wir erhalten daher $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 2)$.

Bemerkung 2.6

Falls der Divisor kein Faktor des Dividenden ist, so bleibt bei der Division ein Divisionsrest. (Analog zur Division natürlicher Zahlen, falls der Divisor kein Teiler des Dividenden ist.)

Wenn ein Polynom n -ten Grades $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, n reelle Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n besitzt, so lässt sich dieses Polynom als Produkt der n Linearfaktoren $(x - x_i)$ zerlegen:

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

Bemerkung 2.7

In der Menge der komplexen Zahlen⁸ lässt sich *jedes* Polynom eindeutig in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen, da ein Polynom n -ten Grades in der Menge der komplexen Zahlen genau n Nullstellen besitzt (*Fundamentalsatz der Algebra*).

⁸Die komplexen Zahlen werden hier nicht behandelt.

Tabelle 2.2: Rechenregeln für Bruchterme

Seien $b, c, e \neq 0$.

Regel	Bezeichnung	Beispiel
$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b}$	<i>Kürzen</i>	$\frac{2x^2}{4x} = \frac{x}{2}$
$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$	<i>Erweitern</i>	$\frac{x}{2} = \frac{2x \cdot x}{2x \cdot 2} = \frac{2x^2}{4x}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	<i>Multiplizieren</i>	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$
$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	<i>Dividieren</i>	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12}$
$\frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b}$		$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$
$\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c + d \cdot b}{b \cdot c}$	<i>Addieren^a</i>	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot e}$	<i>Doppelbruch Auflösen</i>	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{12}$

^aZuerst auf *gemeinsamen Nenner* bringen!

2.2.5 Lineare Terme

linearer Term

Ein **linearer Term** ist ein Ausdruck, der nur Monome vom Grad 1 enthält. Er ist somit ein Spezialfall eines Polynomen.

Beispiel 2.10

$a + bx + y + a \cdot c$ ist ein linearer Term in x und y , falls wir a , b und c als Konstante auffassen.

$xy + x + y$ ist nicht linear, da xy Grad 2 besitzt.

2.2.6 Rationale Terme — Das Problem mit dem Bruchstrich

rationaler Term
Bruchterm
Zähler
Nenner

Ein **rationaler Term (Bruchterm)** ist ein Ausdruck der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind und **Zähler** bzw. **Nenner** heißen. Der Definitionsbereich eines Bruchterms ist \mathbb{R} ohne die Nullstellen des Nenners. Eine alternative Schreibweise ist $P(x)/Q(x)$.

Beispiel 2.11

$\frac{x^2 + x - 4}{x^3 + 5}$ ist ein Bruchterm mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{5}\}$.

Tabelle 2.2 zeigt die erlaubten Rechenoperationen mit Bruchtermen.

Beispiel 2.12

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1$$

$$\frac{4x^3 + 2x^2}{2xy} = \frac{2x^2(2x+1)}{2xy} = \frac{x(2x+1)}{y}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass beim Rechnen mit Brüchtermen immer wieder eklatante Rechenfehler passieren! Die folgenden Beispiele für derartige Irrtümer stammen aus der Prüfungspraxis des Autors.

Häufige Fehlerquellen:

$$\frac{a+c}{b+c} \text{ ist nicht gleich } \frac{a}{b} \quad \left[\frac{x+2}{y+2} \neq \frac{x}{y} \right].$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \text{ ist nicht gleich } \frac{x+y}{a+b} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{1}{5} \right].$$

$$\frac{a}{b+c} \text{ ist nicht gleich } \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \quad \left[\frac{1}{x^2+y^2} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right].$$



2.2.7 Exponent und Logarithmus

Die Rechenregeln für Potenzen aus Tabelle 2.1 auf Seite 15 gelten auch für irrationale Exponenten. Wir können daher auch die Basis als Konstante wählen und den Exponenten als Variable.

Eine Zahl y heißt **Logarithmus** zur Basis a der Zahl x , falls $a^y = x$. Wir schreiben dafür^{9,10} $y = \log_a(x)$. Es gilt

Logarithmus

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$$

Der *Logarithmus* ist der *Exponent* einer Zahl bezüglich der Basis a .

Beispiel 2.13

$$\log_{10}(100) = 2, \text{ da } 10^2 = 100$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3, \text{ da } 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$\log_2(8) = 3, \text{ da } 2^3 = 8$$

In Tabelle 2.3 sind die Rechenregeln für Exponent und Logarithmus zusammengefasst.

Häufige Fehlerquellen:

$$\log_a(x+y) \text{ ist nicht gleich } \log_a(x) + \log_a(y).$$

$$\log_a((-x)^2) \text{ ist nicht gleich } 2 \log_a(-x) \text{ sondern } 2 \log_a|x|.$$

Die wichtigste Basis für den Logarithmus ist die **Eulersche Zahl** $e = 2,7182818\dots$ (**natürlicher Logarithmus**). Wir schreiben dafür $\log(x)$ oder $\ln(x)$ anstatt $\log_e(x)$. Wichtig ist auch der Logarithmus zur Basis 10 (**dekadischer Logarithmus**).

Eulersche Zahl
natürlicher
Logarithmus
dekadischer
Logarithmus

⁹lies: „Logarithmus von x zur Basis a “

¹⁰manchmal auch ${}_a \log(x)$



Tabelle 2.3: Rechenregeln für Exponent und Logarithmus

Achtung: $\log_a(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert!

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

$$a^0 = 1$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(a^x) = x$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

Bemerkung 2.8

Meist schreibt man nur $\log(x)$ ohne Basisangabe. In diesem Fall ist (sollte) die verwendete Basis aus dem Zusammenhang oder einer Konvention ersichtlich sein.

- Im mathematischen Bereich: natürlicher Logarithmus (Finanzmathematik, Programme wie \mathbb{R} , *Mathematica*, *Maxima*, ...)
- Im technischen Bereich: dekadischer Logarithmus (Wirtschaftswissenschaften, Taschenrechner, Excel, ...)

Wir können alle Exponenten und Logarithmen zu einer beliebigen Basis auf die Basis e umrechnen. Es ist nämlich nach Regeln für den Logarithmus $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}$ und somit

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

Genauso erhalten wir aus $\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y = e^{y \ln(a)} \Leftrightarrow \ln(x) = y \ln(a)$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

2.3 Gleichungen

Gleichung

Eine **Gleichung** erhalten wir durch *Gleichsetzen* zweier Terme.

$$\text{linke Seite} = \text{rechte Seite}$$

Lösungsmenge

Definitionsbereich

Grundmenge

Die **Lösungsmenge** einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die diese Gleichung erfüllen. Der **Definitionsbereich** ist der Durchschnitt der Definitionsmengen aller Terme der Gleichung (☞ Seite 12). Die Menge aller Zahlen, die wir als Lösung der Gleichung zulassen, heißt die **Grundmenge** der Gleichung. Im folgenden ist die Grundmenge stets \mathbb{R} oder (in ökonomischen Aufgaben) $[0, \infty)$.

Das Lösen von Gleichungen gehört zu den häufigsten Aufgaben in der Mathematik. Entweder soll der Wert einer zunächst unbekanntes Größe berechnet werden, oder es soll eine Variable durch andere Variablen ausgedrückt werden¹¹.

Zum Lösen einer Gleichung versuchen wir die gesuchte Größe durch **Äquivalenzumformungen** auf einer Seite der Gleichung zu isolieren. Eine *Äquivalenzumformung* ist eine Umformung, die auf *beide* Seiten der Gleichung angewendet wird, und die wieder eindeutig rückgängig gemacht werden kann (vgl. bijektive Abbildung, §4.5, Seite 55) und deshalb die Lösungsmenge unverändert läßt. Äquivalenzumformungen erhalten wir durch

Äquivalenz-
umformung

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl oder eines beliebigen Term auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplizieren beider Seiten mit einer Zahl oder Term *ungleich* Null.
- Dividieren beider Seiten durch eine Zahl oder Term *ungleich* Null.
- Logarithmieren oder Exponenzieren beider Seiten.

Beim Logarithmieren muss darauf geachtet werden, dass beide Seiten größer Null sind.



Beim Multiplizieren oder Dividieren mit einem Term, der die gesuchte Variable enthält, muss darauf geachtet werden, dass dieser Term Null werden könnte! Für das Lösen einer Gleichung hat das die Konsequenz, dass beim Multiplizieren eine „zusätzliche Lösung“ entstehen könnte (☞ Beispiele 2.14 und 2.15). Beim Dividieren hingegen könnte dabei eine Lösung „verschwinden“ (☞ Beispiel 2.16).



Beim Multiplizieren mit einem solchen Term ist daher stets eine Probe durchzuführen.



Beim Dividieren ist eine Fallunterscheidung durchzuführen:



- 1. Fall:** Die Division ist erlaubt (der Divisor ist *ungleich* Null).
- 2. Fall:** Die Division ist nicht erlaubt (der Divisor ist *gleich* Null).

Bemerkung 2.9

Beim Kürzen eines Bruchterms muss darauf geachtet werden, dass die Nullstellen des Nenners nicht zum Definitionsbereich des Bruchterms gehören (☞ §2.2.6, Seite 18).

Bemerkung 2.10

Der Fehler, dass durch einen Term, der Null werden könnte, dividiert wird, tritt vor allem beim Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen in mehreren Variablen auf (☞ Beispiel 2.17).



Beispiel 2.14

Durch Multiplikation von $x^2 + 5x - 1 = x - 1$ mit $(x - 2)$ erhalten wir $x^3 + 3x^2 - 11x + 2 = x^2 - 3x + 2$ mit der Lösungsmenge $L = \{-4, 0, 2\}$. 2 ist aber keine Lösung der ursprünglichen Gleichung $x^2 + 5x - 1 = x - 1$.

¹¹z.B.: Aus der Kreisumfangformel $U = 2r\pi$ soll der Radius eines Kreises durch dessen Umfang ausgedrückt werden.

Beispiel 2.15

Durch Multiplizieren von $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 1$ mit $(x - 1)$ erhalten wir $x^2 + x - 2 = x - 1$ mit der Lösungsmenge $L = \{-1, 1\}$. 1 ist aber nicht im Definitionsbereich von $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Beispiel 2.16

Wenn wir die Gleichung $(x - 1)(x - 2) = 0$ (Lösungsmenge $L = \{1, 2\}$) durch $(x - 1)$ dividieren erhalten wir die Gleichung $x - 2 = 0$ mit der einzigen Lösung $x = 2$. Die Lösung $x = 1$ geht durch das Dividieren „verloren“.

Beispiel 2.17

Wir suchen die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Durch Addition und Division könnten wir die erste Zeile umformen in $xy = x \rightsquigarrow y = \frac{x}{x} = 1$. Tatsächlich erhalten wir aber auch mit $x = 0$ eine Lösung des Gleichungssystems. Die Division würde eine Lösung eliminieren und ist so nicht erlaubt.

Es empfiehlt sich folgende Vorgangsweise:

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x(y - 1) = 0$. Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x = 0$ (und damit $y = \pm\sqrt{2}$ wegen der 2. Gleichung) oder $y - 1 = 0$ und damit $y = 1$ und $x = \pm 1$. Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{(0, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2}), (-1, 1), (1, 1)\}$.

Bemerkung 2.11

Es ist manchmal notwendig¹², eine Probe durchzuführen (siehe oben und §2.3.5, Seite 24). Dabei wird die errechnete Zahl in die Gleichung eingesetzt. Nur wenn die Gleichung für diese Zahl erfüllt ist, ist diese Zahl auch eine Lösung der Gleichung.

Es empfiehlt sich aber auch für andere Gleichungen (etwa einfache lineare Gleichungen) eine Probe durchzuführen. Auf diese Weise kann ein Rechenfehler erkannt werden.

2.3.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen enthalten nur lineare Terme.

lineare
Gleichung

Beispiel 2.18

Wir suchen den Radius eines Kreises mit Umfang 6. Dazu müssen wir die lineare Gleichung $6 = 2r\pi$ lösen¹³. Durch Division durch 2π ($\neq 0$) erhalten wir die Lösung: $r = \frac{3}{\pi}$.

Beispiel 2.19

Aus der Barwertformel für eine nachschüssige Rente (☞ Seite 42) $B_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$ soll die Rente R ausgedrückt werden. Da R nur in 1. Potenz vorkommt, müssen wir eine lineare Gleichung lösen. Durch Division durch die Konstante $\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$ ($\neq 0$) erhalten wir als Lösung: $R = B_n \cdot \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1}$.

¹²Es ist ratsam, immer eine Probe durchzuführen.

¹³ $U = 2r\pi$

2.3.2 Betragsgleichungen

Eine Gleichung mit Absolutbetrag können wir als eine Abkürzung für zwei Gleichungen sehen:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ oder } -x = 1$$

Beispiel 2.20

Gesucht ist die Lösung von $|2x - 3| = |x + 1|$. Wir müssen dazu alle Lösungen von jeder der beiden Gleichungen finden:

$$\begin{aligned} (2x - 3) &= (x + 1) && \Rightarrow x = 4 \\ -(2x - 3) &= (x + 1) && \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(Die Gleichungen $-(2x - 3) = -(x + 1)$ und $(2x - 3) = -(x + 1)$ lassen sich durch Multiplizieren mit -1 in obige Gleichungen überführen.)

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{\frac{2}{3}, 4\}$.

2.3.3 Gleichungen mit Exponenten und Logarithmus

Gleichungen mit Exponenten sind Gleichungen, die die gesuchte Variable im *Exponenten* (und nur dort) enthalten. Die Variable wird zuerst auf einer Seite der Gleichung in einem Term, der keine Addition oder Subtraktionen enthalten darf, isoliert. Durch *Logarithmieren* erhalten wir dann die gesuchte Lösung.

Beispiel 2.21

Wir suchen die Lösung der Gleichung $2^x = 32$. Durch Logarithmieren beider Seiten erhalten wir

$$2^x = 32 \Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(32) \Leftrightarrow x \ln(2) = \ln(32) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(32)}{\ln(2)} = 5$$

Beispiel 2.22

Aus der Formel für die Kreditrate $X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1}$ (☞ Seite 43) soll die Dauer n eines Kredits bei vorgegebener Kredithöhe K , Kreditrate X und Aufzinsungsfaktor q berechnet werden. Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir (beachten Sie bitte die Rechenregeln für den Logarithmus, ☞ Tabelle 2.3, Seite 20):

$$\begin{aligned} X &= K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1} && | \cdot (q^n - 1) \\ X(q^n - 1) &= K q^n (q - 1) && | - K q^n (q - 1) \\ q^n (X - K(q - 1)) - X &= 0 && | + X \\ q^n (X - K(q - 1)) &= X && | : (X - K(q - 1)) \\ q^n &= \frac{X}{X - K(q - 1)} && | \ln \\ n \ln(q) &= \ln(X) - \ln(X - K(q - 1)) && | : \ln(q) \\ n &= \frac{\ln(X) - \ln(X - K(q - 1))}{\ln(q)} \end{aligned}$$

(Achten Sie bitte darauf, ob die angegebenen Äquivalenzumformungen für die Konstanten q , X und K auch erlaubt sind.)

Gleichungen mit Logarithmen lassen sich (manchmal) durch Exponenzieren beider Seiten lösen.

Beispiel 2.23

Die Lösung von $\ln(x+1) = 0$ erhalten wir durch Exponenzieren beider Seiten der Gleichung.

$$\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

2.3.4 Potenzgleichungen

Gleichungen, die *nur eine* Potenz (☞ §2.2.3, Seite 14) der gesuchten Variable enthalten, lassen sich durch *Wurzelziehen* lösen.

Achten Sie bitte darauf, dass im Falle einer geraden Potenz die Gleichung (in \mathbb{R}) nicht immer lösbar, und die Lösung nicht eindeutig ist. Im Falle einer ungeraden Potenz ist die Gleichung (in \mathbb{R}) immer eindeutig lösbar (☞ Beispiel 2.24).

Beispiel 2.24

Die Lösungsmenge von $x^2 = 4$ lautet $L = \{-2, 2\}$.

Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine (reelle) Lösung.

Die Lösungsmenge von $x^3 = -8$ ist $L = \{-2\}$.

2.3.5 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen lassen sich lösen, indem wir beide Seiten quadrieren oder potenzieren

Beispiel 2.25

Die Lösung von $\sqrt[3]{x-1} = 2$ erhalten wir durch Potenzieren:

$$\sqrt[3]{x-1} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$$

Bei Wurzelgleichungen mit geraden Radices (z.B. Quadratwurzel) stellt das Potenzieren keine Äquivalenzumformung dar (z.B. wird aus der „Nicht-Gleichung“ $-3 \neq 3$ durch Quadrieren die Gleichung $(-3)^2 = 3^2$). Wir könnten (wie beim Multiplizieren mit einem Term) eine „zusätzliche Lösung“ erzeugen. Der Definitionsbereich der Gleichung ist meist nur mehr eine kleine Teilmenge der reellen Zahlen. Er wird dadurch bestimmt, dass der Radikand unter einer Wurzel mit geradem Radix nicht negativ sein darf.

Wir müssen bei Wurzelgleichungen daher **immer** eine **Probe** durchführen.

Beispiel 2.26

Wir wollen die Gleichung $\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{x-4}$ lösen. Die Definitionsmenge ist $D = \{x | x \geq 4\}$. Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= 1 - \sqrt{x-4} && |^2 \\ x-1 &= 1 - 2 \cdot \sqrt{x-4} + (x-4) && | -x+3 \quad |:2 \\ 1 &= -\sqrt{x-4} && |^2 \\ 1 &= x-4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$



Wurzel-
gleichung



Die Probe ergibt aber $\sqrt{5-1} = 1 - \sqrt{5-4} \Leftrightarrow 2 = 0$, eine *falsche* Aussage. Die Lösungsmenge ist daher $L = \emptyset$, die leere Menge.

2.3.6 Quadratische Gleichungen

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung der Form

quadratische
Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Lösungen:} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bzw. in Standardform

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{Lösungen:} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2.3.7 Nullstellen von Polynomen

Quadratische Gleichungen sind ein Spezialfall von **algebraischen Gleichungen**

algebraische
Gleichung

$$P_n(x) = 0$$

wobei $P_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Solche Gleichungen lassen sich schrittweise durch Abspalten von Linearfaktoren (durch Division, \S 2.2.4, Seite 15) lösen:

1. Wir suchen eine Nullstelle x_1 von $P_n(x)$ (z.B. durch Ausprobieren oder mit dem Newton-Verfahren (\S 2.3.9)).
2. Mit $(x - x_1)$ erhalten wir einen Linearfaktor von $P_n(x)$.
3. Durch Division $P_n(x) : (x - x_1)$ erhalten wir ein Polynom $P_{n-1}(x)$ von Grad $n - 1$.
4. Falls $n - 1 = 2$ erhalten wir eine quadratische Gleichung. Andernfalls gehen wir wieder zu Schritt 1, d.h. wir suchen eine Nullstelle von $P_{n-1}(x)$.

Beispiel 2.27

Wir suchen die Lösungen von $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Durch Ausprobieren erhalten wir die Lösung $x_1 = 1$.

Wir dividieren nun durch den Linearfaktor $(x - 1)$ und erhalten:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \quad (\text{vgl. Beispiel 2.9, Seite 17}).$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösungen $x_2 = 2, x_3 = 3$.

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{1, 2, 3\}$.

Bemerkung 2.12

Für die Lösungen von Gleichungen 3. und 4. Grades gibt es ähnlich zu quadratischen Gleichungen allgemeine Formeln, die jedoch wesentlich komplizierter sind¹⁴. Für Polynome ab dem 5. Grad kann man beweisen, dass keine derartige Formel angegeben werden kann.

¹⁴Für Gleichungen 3. Grades gibt es z.B. die Formel von Cardano.

2.3.8 Nullstellen eines Produkts

Ein Produkt zweier (oder mehrerer) Terme $f(x) \cdot g(x)$ wird genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, also $f(x) = 0$ oder $g(x) = 0$.

Beispiel 2.28

$x^2 \cdot (x-1) \cdot e^x = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x^2 = 0$ ($\Rightarrow x = 0$) oder $x-1 = 0$ ($\Rightarrow x = 1$) oder $e^x = 0$ (keine Lösung). Die Lösungsmenge dieser Gleichung lautet daher $L = \{0, 1\}$.



Bemerkung 2.13

Das Dividieren durch einen Faktor ist nur erlaubt, wenn dieser immer ungleich Null ist (☞ §2.3, Seite 21).



Wenn ein Polynom bereits als Produkt zweier oder mehrerer Faktoren vorliegt, dann sollte man einer etwaigen Versuchung widerstehen, dieses Produkt auszumultiplizieren. Die Nullstellen von $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$ sind offensichtlich, jene von $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ hingegen nicht.

2.3.9 Das Newtonverfahren

Newton-
verfahren

Mit Hilfe des **Newtonverfahrens** lassen sich Nullstellen von Polynomen und anderen *differenzierbaren* Funktionen (☞ §5.1, Seite 69) näherungsweise berechnen. Es erzeugt eine Folge $\langle x_k \rangle$ (☞ §3.1, Seite 35) von Näherungslösungen, die gegen eine (vom Startwert abhängige) Nullstelle konvergiert (☞ §3.2, Seite 37).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$f'(x_k)$ ist dabei die erste Ableitung von f an der Stelle x_k (☞ §5.2, Seite 74).

Das Newtonverfahren konvergiert in den meisten Fällen schnell gegen eine Nullstelle.

Beispiel 2.29

Wir suchen eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ mit Hilfe des Newtonverfahrens. Als Startpunkt wählen wir $x_0 = 0$. Für die Rekursionsformel des Newtonverfahrens benötigen wir die erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$. Die ersten 4 Näherungslösungen sind daher:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-6}{11} = 0,54545$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,84895$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,97467$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0,99909$$

2.4 Ungleichungen

Eine **Ungleichung** erhalten wir durch Vergleichen zweier Terme mit einem der Ungleichheitszeichen \leq , $<$, $>$ oder \geq , z.B.:

Ungleichung

$$\text{linke Seite} \leq \text{rechte Seite}$$

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die die Ungleichung erfüllen. Sie besteht — im Gegensatz zu Gleichungen — meist aus einem Intervall oder der Vereinigung von Intervallen. Der **Definitionsbereich** ist der Durchschnitt der Definitionsmengen aller Terme der Ungleichung (vgl. Gleichungen, §2.3, Seite 20).

Lösungsmenge

Definitionsbereich

Zum Lösen einer Ungleichung versuchen wir — analog zu einer Gleichung — die gesuchte Größe durch **Äquivalenzumformungen** auf einer Seite der Ungleichung zu isolieren (☞ Äquivalenzumformungen, Seite 21).

Äquivalenzumformung

Beim Multiplizieren mit einer *negativen* Zahl dreht sich das *Ungleichheitszeichen* um. Wir müssen daher beim Multiplizieren oder Dividieren mit einem Term stets eine Fallunterscheidung durchführen (vgl. auch die Bemerkungen zu den Äquivalenzumformungen auf Seite 21):



1. **Fall:** Das Ungleichheitszeichen dreht sich nicht um (der Term ist *größer* Null).
2. **Fall:** Das Ungleichheitszeichen dreht sich um (der Term ist *kleiner* Null).
3. **Fall:** Die Multiplikation oder Division ist nicht erlaubt (der Term ist *gleich* Null).

Beispiel 2.30

Wir suchen die Lösung von $\frac{2x-1}{x-2} \leq 1$. Da wir zur Lösung dieser Ungleichung mit $(x-2)$ multiplizieren, müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen:

1. Fall $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$: Wir erhalten $2x-1 \leq x-2 \Leftrightarrow x \leq -1$, ein Widerspruch zur Annahme $x > 2$.
2. Fall $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$: Das Ungleichheitszeichen dreht sich um. $2x-1 \geq x-2 \Leftrightarrow x \geq -1$. Also $x < 2$ und $x \geq -1$.
3. Fall $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: Liegt nicht im Definitionsbereich.

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [-1, 2)$.

Mittels solcher Äquivalenzumformungen lassen sich alle *linearen Ungleichungen* und viele *Exponentialungleichungen* lösen.

lineare
Ungleichung
Exponential-
ungleichung

2.4.1 Polynom- und andere Ungleichungen

Polynomungleichungen lassen sich nicht einfach durch Äquivalenzumformungen lösen.

Bemerkung 2.14

Das Ersetzen des „ $=$ “-Zeichens durch das Ungleichheitszeichen in der Lösung der quadratischen Gleichung (☞ §2.3.6, Seite 25) ist *falsch*.





Beispiel 2.31

Die Lösung von $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ist *nicht* $x_{1,2} \leq \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ und somit $x \leq 1$ (und auch nicht $x \leq 2$). 0 ist zwar kleiner als 1 (oder 2), erfüllt aber trotzdem nicht die Ungleichung!

Folgende Vorgangsweise liefert die Lösungsmenge von Ungleichungen, die Polynome, rationale Ausdrücke oder andere *stetige* Terme enthalten¹⁵:

1. Wir bringen alle Variablen auf die linke Seite und erhalten einen Ausdruck der Form $T(x) \leq \text{konstant}$, wobei $T(x)$ ein beliebiger Term sein kann.
2. Wir berechnen alle Punkte in denen die Ungleichung zu einer Gleichung wird, d.h. wir ersetzen das Ungleichheitszeichen durch das „=" Zeichen und lösen die so entstandene Gleichung (☞ §2.3, Seite 20ff), d.h., im Falle einer Polynomungleichung berechnen wir die Nullstellen des Polynoms $T(x)$.
3. Die Lösungen der Gleichung zerlegen die *Definitionsmenge* (bei Polynomen: $(-\infty, \infty)$) in Intervalle I_k . Diese Intervalle sind offen, im Falle von *echten* Ungleichungen (mit $<$ oder $>$), andernfalls abgeschlossen. (Achten Sie aber immer auf den Definitionsbereich!) In jedem dieser Intervalle ist nun die Ungleichung entweder überall oder in keinem einzigen Punkt erfüllt.
4. Wir wählen in jedem Intervall einen Punkt $x_k \in I_k$ aus. Ist die Ungleichung in x_k erfüllt, so ist sie im gesamten Intervall I_k erfüllt, andernfalls nicht.

Beispiel 2.31 (Fortsetzung)

Gesucht ist die Lösungsmenge von $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. Die Definitionsmenge ist \mathbb{R} .

Die Lösungen von $x^2 - 3x + 2 = 0$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Wir erhalten daraus drei Intervalle und überprüfen anhand dreier Punkte, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

$$\begin{array}{ll} (-\infty, 1] & \text{nicht erfüllt: } 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \not\leq 0 \\ [1, 2] & \text{erfüllt: } \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4} \leq 0 \\ [2, \infty) & \text{nicht erfüllt: } 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2 \not\leq 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [1, 2]$.

Beispiel 2.32

Wir suchen die Lösung von $\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} \geq 1$. Die Definitionsmenge besteht aus zwei Intervallen: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Die Lösung von $\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} = 1$ erhalten wir durch

$$\frac{x^2 + x - 3}{x - 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

Wir erhalten insgesamt vier Intervalle und überprüfen anhand von vier Punkten, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

¹⁵Das Verfahren funktioniert nur, wenn alle beteiligten Terme *stetig* (☞ §4.8, Seite 62ff) sind. Enthält der Term $T(x)$ Unstetigkeitsstellen, so müssen wir diese im Punkt 3 bei der Zerlegung des Definitionsbereichs in Intervalle berücksichtigen.

$$\begin{array}{ll} (-\infty, -1] & \text{nicht erfüllt: } \frac{(-2)^2+(-2)-3}{(-2)-2} = \frac{1}{4} \not\geq 1 \\ [-1, 1] & \text{erfüllt: } \frac{0^2-0-3}{0-2} = \frac{3}{2} \geq 1 \\ [1, 2) & \text{nicht erfüllt: } \frac{1,5^2+1,5-3}{1,5-2} = -\frac{3}{2} \not\geq 1 \\ (2, \infty) & \text{erfüllt: } \frac{3^2+3-3}{3-2} = 9 \geq 1 \end{array}$$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [-1, 1] \cup (2, \infty)$.

2.4.2 Betragsungleichungen

Ungleichungen mit Absolutbeträgen lassen sich genauso lösen wie in §2.4.1 beschrieben.

Wir können aber eine Betragsungleichung auch lesen als eine Abkürzung für zwei Ungleichungen:

$$\begin{array}{ll} |x| < 1 & \Leftrightarrow x < 1 \text{ und } x > -1 \\ |x| > 1 & \Leftrightarrow x > 1 \text{ oder } x < -1 \end{array}$$

— Übungen

7. Stellen Sie die folgenden Zahlen im Gleitkommaformat mit 4-stelliger Mantisse dar (mathematische und EDV Schreibweise):

- | | | |
|---|---------------------------------------|----------------------|
| (a) 1,4932 | (b) -137,197 | (c) -97,2850 |
| (d) $\frac{64,917}{12,7 \times 10^{-5} + 2,7 \times 10^{-4}}$ | (e) $2,731 \times 23,817$ | (f) $\sqrt{39,23}$ |
| (g) $39,23^2$ | (h) 0,002 | (i) $0,1 \cdot 10^3$ |
| (j) $-0,1 \cdot 10^{-2}$ | (k) $-75,959 \times (0,178 - 3,9177)$ | |

8. Stelle Sie die folgenden Zahlen im Festkommaformat dar:

- | | |
|---|---|
| (a) 8.93 E4 | (b) -8.930 E-4 |
| (c) 2.932 E0 | (d) -2.255 E-3 |
| (e) $\sqrt{1.210 \times 10^{-12}}$ | (f) $(1.554 \times 10^4) \times (7.342 \times 10^{-4})$ |
| (g) $(1.25 \times 10^{75})^2$ | (h) -2.13×10^0 |
| (i) $1.205 \times 10^{10} - 1.205 \times 10^{11}$ | (j) 1.99×10^{-2} |
| (k) 9.601×10^2 | (l) $1.205 \times 10^{10} + 1.205 \times 10^{11}$ |

9. Berechnen Sie Summe und Produkt:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| (a) $\sum_{i=0}^5 a^i b^{5-i}$ | (b) $\prod_{i=1}^5 (-2)^i$ |
|--------------------------------|----------------------------|

10. Welche der Lösungen für die folgenden Ausdrücke ist richtig?

- (a) $\sum_{i=2}^{10} 5(i+3) = ??$
- 1: $5(2+3+4+\dots+9+10+3)$
 - 2: $5(2+3+3+3+3+4+3+5+3+6+3+\dots+10+3)$
 - 3: $5(2+3+4+\dots+9+10) + 5 \cdot 3$
 - 4: $5(2+3+4+\dots+9+10) + 9 \cdot 5 \cdot 3$
- (b) $\prod_{i=1}^2 (a+b)^i = ??$
- 1: $(a+b)^2$
 - 2: $(a+b)^3$
 - 3: $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
 - 4: Keine dieser Lösungen

11. Vereinfachen Sie die folgenden Summenausdrücke:

- | | |
|---|--|
| (a) $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^n b_j^2 - \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2$ | (b) $\sum_{i=1}^n (a_i b_{n-i+1} - a_{n-i+1} b_i)$ |
| (c) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 + \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2$ | (d) $\sum_{j=0}^{n-1} x_j - \sum_{i=1}^n x_i$ |
| (e) $\sum_{j=1}^n \left(x_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ | |

12. Vereinfachen Sie:

(a) $(x+h)^2 - (x-h)^2$	(b) $(a+b)c - (a+bc)$
(c) $\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}} + \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{y}}$	(d) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}$
(e) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$	(f) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{xy + xz + y(z-x)}$

13. Vereinfachen Sie:

(a) $(A-B)(A^2+AB+B^2)$	(b) $(A-x)^2 + (A+x)^2$
(c) $y(xy+x+1) - \frac{x^2y^2-1}{x-\frac{1}{y}}$	(d) $\frac{s}{st^2-t^3} - \frac{1}{s^2-st} - \frac{1}{t^2}$
(e) $\frac{\frac{x^2+y}{2x+1}}{\frac{2xy}{2x+y}}$	(f) $\frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}}{\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x}}$
(g) $\frac{2x^2y-4xy^2}{x^2-4y^2} + \frac{x^2}{x+2y}$	

14. Wie lautet der Koeffizient von x^4y^2 in den Entwicklungen (nach dem Binomischen Lehrsatz) von:

(a) $(2x^2+2y)^4$	(b) $(x+y)^6$	(c) $(x+2xy)^4$
(d) $(2x^2-2y)^4$	(e) $(2x^2-3y)^4$	(f) $(3x^2-y^2)^3$

15. Entwickeln Sie nach dem Binomischen Lehrsatz:

(a) $(x+y)^4 - (x-y)^4$	(b) $(x+y)^4 + (x-y)^4$	(c) $(x-x^2\sqrt{y})^3$
(d) $(x-2y)^3$	(e) $(3x+2\frac{y}{x})^3$	(f) $(x+rx^2)^4$

16. Da $f(x) = x^3 - 5x + 2$ eine Nullstelle in $x = 2$ besitzt, lässt sich $f(x)$ schreiben als $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$. Wie lauten a , b und c ?

17. Wie müssen die Konstanten a , b und c gewählt werden, damit die folgenden Gleichungen für alle x erfüllt sind:

(a) $\frac{x}{1+x} - \frac{2}{2-x} = -\frac{2a+bx+cx^2}{2+x-x^2}$
(b) $\frac{x^2+2x}{x+2} - \frac{x^2+3}{x+3} = \frac{a(x-b)}{x+c}$
(c) $\frac{x^2}{x+y} + \frac{xy}{x-y} = \frac{x(ax^2+bx+cy^2)}{x^2-y^2}$
(d) $\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{2-\frac{1}{x}} = \frac{ax^3+bx^2+cx}{2x^2-3x+1}$

18. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}}$	(b) $\frac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{6}}}$	(c) $\frac{\sqrt{x}-4}{x^{\frac{1}{4}}-2}$
(d) $\frac{1}{(\sqrt{x})^{-\frac{3}{2}}}$	(e) $\frac{\frac{2}{x^{-\frac{1}{7}}}}{x^{-\frac{7}{2}}}$	(f) $\left(\frac{ x ^{\frac{1}{3}}}{ x ^{\frac{1}{6}}}\right)^6$

19. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$(a) \frac{(\sqrt{x} + y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}$$

$$(b) \frac{1}{3\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(c) \frac{(xy)^{\frac{1}{6}} - 3}{(xy)^{\frac{1}{3}} - 9}$$

$$(d) \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

20. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$(a) \log_2(2), \log_2(4), \log_2(16), \log_2(0), \log_2(1), \log_2\left(\frac{1}{4}\right), \log_2(\sqrt{2}), \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \log_2(-4).$$

$$(b) \log_{10}(300), \log_{10}(3^{10}). \quad [\text{Verwenden Sie } \log_{10}(3) = 0,47712.]$$

21. Berechnen (vereinfachen) Sie ohne Taschenrechner:

$$(a) 0,01^{-\log_{10}(100)}$$

$$(b) \log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$(c) 10^{3\log_{10}(3)}$$

$$(d) \frac{\log_{10}(200)}{\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(49)}$$

$$(e) \log_8\left(\frac{1}{512}\right)$$

$$(f) \log_{\frac{1}{3}}(81)$$

22. Schreiben Sie in der Form $y = A e^{cx}$ (i.e., bestimmen Sie A und c):

$$(a) y = 10^{x-1}$$

$$(b) y = 4^{x+2}$$

$$(c) y = 3^x 5^{2x}$$

$$(d) y = 1,08^{x-\frac{x}{2}}$$

$$(e) y = 0,9 \cdot 1,1^{\frac{x}{10}}$$

$$(f) y = \sqrt{q} 2^{x/2}$$

23. Die folgenden Polynome f_i haben die Nullstelle $x_0 = -2$. Stellen Sie die Polynome in der Form $f_i(x) = (x - x_0)g_i(x)$ dar (i.e., berechnen Sie die Polynome g_i):

$$(a) f_1(x) = 2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + x + 2$$

$$(b) f_2(x) = -x^3 + 5x^2 + 22x + 16$$

$$(c) f_3(x) = -3x^4 - 6x^3 + x^2 + 10x + 16$$

$$(d) f_4(x) = 7x^3 + 6x^2 - 14x + 4$$

24. Geben Sie ein Polynom 4. Grades mit den Nullstellen $-1, 2, 3$ und 4 an. Wie lautet die Menge aller Polynome mit diesen Nullstellen. Kann so ein Polynom noch andere Nullstellen haben?

25. Stellen Sie folgende Polynome als Produkte von Linearfaktoren dar.

$$(a) f_1(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7$$

mit Nullstelle -7

$$(b) f_2(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$$

mit Nullstellen $1, -2$

$$(c) f_3(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10$$

mit Nullstelle -5

26. Berechnen Sie die Nullstellen und zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$(a) f(x) = 3x^2 - 9x + 2$$

$$(b) f(x) = 2x^2 - 5x + 1$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 12$$

$$(d) f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$(e) f(x) = 5x^2 - 5x - 6$$

$$(f) f(x) = 4x^2 - 12x - 4$$

27. Lösen Sie nach y und nach x auf:

$$(a) xy + x - y = 0$$

$$(b) 3xy + 2x - 4y = 1$$

$$(c) x^2 - y^2 + x + y = 0$$

$$(d) x^2y + xy^2 - x - y = 0$$

$$(e) x^2 + y^2 + 2xy = 4$$

$$(f) 9x^2 + y^2 + 6xy = 25$$

$$(g) 4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$(h) 4x^2 - 9y^2 = 36$$

$$(i) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

28. Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy^2 + yx^2 = 6$

(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x-y}$

(e) $\frac{1}{y-1} = \frac{y+x}{2y+1}$

(g) $(y+2x)^2 = \frac{1}{1+x} + 4x^2$

(i) $\frac{y}{x+2y} = \frac{2x}{x+y}$

(b) $xy^2 + (x^2 - 1)y - x = 0$

(d) $\frac{y}{y+x} = \frac{y-x}{y+x^2}$

(f) $\frac{yx}{y+x} = \frac{1}{y}$

(h) $y^2 - 3xy + (2x^2 + x - 1) = 0$

29. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $2^x = 3^{x-1}$

(b) $3^{2-x} = 4^{\frac{x}{2}}$

(c) $2^x 5^{2x} = 10^{x+2}$

(d) $2 \cdot 10^{x-2} = 0,1^{3x}$

(e) $\frac{1}{2^{x+1}} = 0,2^x 10^4$

(f) $(3^x)^2 = 4 \cdot 5^{3x}$

30. Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$ mit $f(x) = \ln(x^2(x - \frac{7}{4}) + (\frac{x}{4} + 1)^2)$.

31. Das Newtonverfahren zur näherungsweisen Berechnung der Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$ startet mit $x_0 = 3$, wie lauten die ersten Näherungen (Iterationsschritte) x_1, x_2, x_3 ?

32. Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x > 0$

(c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

(d) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

(e) $x^2 - 2x + 6 \leq 1$

(f) $x^2 - 2x + 6 \geq 1$

33. Stellen Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen dar:

(a) $7 \leq |12x + 1|$

(b) $\frac{x+4}{x+2} < 2$

(c) $\frac{3(4-x)}{x-5} \leq 2$

(d) $25 < (-2x+3)^2 \leq 50$

(e) $42 \leq |12x+6| < 72$

(f) $5 \leq \frac{(x+4)^2}{|x+4|} \leq 10$

34. Stellen Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen dar:

(a) $4 \geq \frac{-2x+4}{x+2} \geq 2$

(b) $2x + \frac{5}{4} \leq 3x + 1 \leq 2x + 3$

(c) $4 \geq \frac{-2x-4}{x+2} \geq 2$

(d) $\frac{2x+3}{x-2} \leq 2 \leq \frac{x+3}{x+2}$

Folgen und Reihen

“Can you do Addition?” the White Queen asked. “What’s one and one?”

“I don’t know,” said Alice. “I lost count.”

Through the Looking Glass

LEWIS CARROLL (1832–1898)

3.1 Was sind Folgen und Reihen?

In einem Sparbuch sind alle Buchungsposten (Gutschriften, Belastungen, usw.) für ein bestimmtes Sparkonto, aufgelistet — *geordnet* nach dem Buchungstag. Die Buchungsbeträge in den einzelnen Zeilen bilden somit eine „*geordnete Menge*“ von (reellen) Zahlen.

Definition 3.1 (Folge)

Eine **Folge** ist eine Anordnung von reellen Zahlen. Die einzelnen Zahlen heißen **Glieder** der Folge.

Folge

Glied

Formal: Eine Folge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$.

Folgen werden mit $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ oder kurz $\langle a_i \rangle$ bezeichnet¹.

Folgen können definiert werden

- durch **Aufzählen** der Glieder,
- durch Angabe eines **Bildungsgesetzes** oder
- durch **Rekursion**².

Bildungsgesetz

Rekursion

Beispiel 3.1

Aufzählung: $\langle a_i \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \dots \rangle$

Bildungsgesetz: $\langle a_i \rangle = \langle 2i - 1 \rangle$

Rekursion: $\langle a_i \rangle, a_1 = 1, a_{i+1} = a_i + 2$

¹Statt *spitzen* Klammern sind auch *runde* Klammern üblich: (a_i) .

²Jedes Folgenglied wird durch seine(n) Vorgänger bestimmt.

Bezeichnung	Definition
monoton steigend	$a_{i+1} \geq a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
monoton fallend	$a_{i+1} \leq a_i$
alternierend	$a_{i+1} \cdot a_i < 0$, d.h. das Vorzeichen wechselt.
beschränkt	$ a_i \leq M$, für ein $M \in \mathbb{R}$.

Eine Folge $\langle a_i \rangle$ kann graphisch dargestellt werden, indem man

- (1) die einzelnen Folgenglieder in der Zahlengerade aufträgt, oder
- (2) die Zahlenpaare (n, a_n) in der Zahlenebene einzeichnet.

Beispiel 3.2

Abbildung 3.1 zeigt die ersten 10 Glieder der Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ in beiden Darstellungsmöglichkeiten.

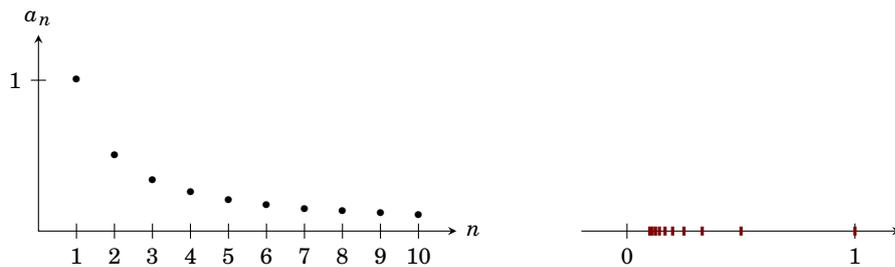


Abbildung 3.1: Graphische Darstellung der ersten 10 Glieder der Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$

Tabelle 3.1 listet einige Eigenschaften auf mit denen sich Folgen charakterisieren lassen. Man beachte, dass M im Falle einer beschränkten Folge nicht notwendigerweise bekannt sein muss. Es muss nur sichergestellt sein, dass so ein M existiert.

Beispiel 3.3

Die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ ist monoton fallend und beschränkt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|a_n| = |1/n| \leq 1$ gilt. (Wir hätten auch $M = 1000$ wählen können.) Sie ist jedoch *nicht* alternierend.

Wir können nun in unserem Sparbuchbeispiel die ersten k Buchungsbeträge addieren: $s_k = \sum_{i=1}^k b_i$. So eine Summe heißt die k -te **Teilsumme** (oder **Partialsomme**) der Folge $\langle b_i \rangle$. Da bei Kontoeröffnung das Guthaben genau 0 Geldeinheiten betragen hat, ist dieses s_k gerade der Kontostand nach k Buchungszeilen. Diese Kontostände bilden wiederum eine Folge.

Definition 3.2 (Reihe)

Die Folge $\langle s_k \rangle$ aller Teilsummen einer Folge $\langle a_i \rangle$ heißt die **Reihe** der Folge $\langle a_i \rangle$.

Teilsumme

Reihe

Beispiel 3.4

Die Reihe der Folge $\langle a_i \rangle = \langle 2i - 1 \rangle$ lautet

$$\langle s_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k 2i - 1 \right\rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle = \langle k^2 \rangle$$

3.2 Grenzwerte und ihre Berechnung

Betrachten wir die Folge $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$. In Abbildung 3.2 sind die ersten Glieder dieser Folge auf der Zahlengerade aufgetragen.

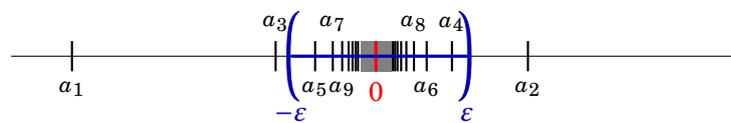


Abbildung 3.2: Grenzwert der Folge $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$

Es fällt auf, dass sich die Glieder immer mehr dem Wert 0 nähern, je größer n wird. Sie „streben“ mit wachsendem n gegen 0. Wir sagen, die Folge $\langle a_n \rangle$ **konvergiert** gegen 0.

Definition 3.3 (Limes)

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) einer Folge $\langle a_n \rangle$, wenn es für jedes noch so kleine Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ ein a_N gibt, sodass $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ für alle $n \geq N$ (m.a.W.: alle Folgeglieder ab a_N liegen im Intervall).

Grenzwert
Limes

Wir schreiben dafür

$$\langle a_n \rangle \rightarrow a \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**. Sie **konvergiert** gegen ihren Grenzwert.

konvergent

Beispiel 3.5

In unserem Beispiel ist $a = 0$. In Abbildung 3.2 ist das Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ für $\epsilon = 0,3$ eingezeichnet. Alle Folgeglieder ab a_4 liegen in diesem Intervall. Wenn wir ein kleineres Intervall betrachten, etwa für $\epsilon = \frac{1}{1000000}$, so liegen wiederum alle Folgeglieder ab dem 1 000 001-ten Glied in diesem Intervall. Daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Beispiel 3.6

Die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\rangle$ konvergiert 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Beispiel 3.7

Die Folge $\langle b_n \rangle = \langle \frac{n-1}{n+1} \rangle = \langle 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots \rangle$ ist konvergent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

divergent

Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert. So eine Folge heißt dann **divergent**.

Beispiel 3.8

Die Folge $\langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle$ besitzt keinen Grenzwert, da sie größer als jede beliebige natürliche Zahl wird. Sie strebt gegen ∞ .

bestimmt
divergent

Derartige Folgen heißen **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (oder $-\infty$). Wir schreiben dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad (\text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty)$$

Beispiel 3.9

Die Folge $\langle (-1)^n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$ besitzt keinen Grenzwert. Es liegen zwar alle geraden Folgenglieder in jedem noch so kleinem Intervall um 1. Es enthält aber kein einziges ungerades Folgenglied. Die Folge strebt auch nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

So eine Folge heißt (**unbestimmt**) **divergent**.

Es ist im Allgemeinen schwierig, Grenzwerte zu berechnen. In Tabelle 3.2 sind daher die Grenzwerte einiger besonders wichtiger Folgen aufgelistet. Aus diesen Grenzwerten lassen sich viele weitere Grenzwerte mit Hilfe der Regeln aus Tabelle 3.3 herleiten.

Beispiel 3.10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} \cdot n^{-1}) \stackrel{(3)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{2^{-n}}_{\lim=0} \stackrel{(5)}{=} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) \stackrel{(1)}{=} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2$$



Wir müssen beim Anwenden dieser Rechenregeln darauf achten, dass wir keine Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 \cdot \infty$ erhalten (☞ Beispiel 3.11). Diese Ausdrücke sind *nicht definiert* und der Grenzwert könnte jeder beliebige Wert bzw. die Folge könnte divergent sein. Auch können wir aus $\lim = \frac{1}{0}$ *nicht* schließen, dass $\lim = \infty$ (oder $\lim = -\infty$).

Beispiel 3.11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad (= \text{nicht definiert})$$

Trick: Kürzen durch die **höchste** vorkommende Potenz im **Nenner**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot (1 + n^{-2})}{\cancel{n^2} \cdot (1 - n^{-2})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + n^{-2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - n^{-2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Tabelle 3.2: Grenzwerte wichtiger Folgen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c &= c \text{ für alle } c \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha &= \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha > 0 \\ 1 & \text{für } \alpha = 0 \\ 0 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= \begin{cases} \infty & \text{für } q > 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ 0 & \text{für } -1 < q < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \leq -1 \end{cases} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{q^n} &= \begin{cases} 0 & \text{für } |q| > 1 \\ \infty & \text{für } 0 < q < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } -1 < q < 0 \end{cases} \quad (|q| \notin \{0, 1\}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e = 2,7182818\dots \end{aligned}$$

Tabelle 3.3: Rechenregeln für Limiten

Gegeben sind zwei konvergente Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. $\langle c_n \rangle$ sei eine beschränkte Folge.

Regel

-
- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n + d) = c \cdot a + d$
 - (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
 - (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
 - (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ für $b \neq 0$
 - (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot c_n) = 0$ falls $a = 0$
 - (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$ für $k \in \mathbb{N}$

Tabelle 3.4: Eigenschaften von arithmetischen und geometrischen Folgen

Arithmetische Folge:

Die *Differenz* aufeinanderfolgender Glieder ist konstant:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Bildungsgesetz:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Jedes Glied ist das *arithmetische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})$$

Summenformel:

Arithmetische Reihe:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Geometrische Folge:

Der *Quotient* aufeinanderfolgender Glieder ist konstant:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Jedes Glied ist das *geometrische Mittel* seiner Nachbarglieder:

$$a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

Geometrische Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1$$

3.3 Arithmetische und geometrische Folgen

Arithmetische und geometrische Folgen sind von grundlegender Bedeutung für die *Finanzmathematik* (☞ §3.4). Tabelle 3.4 listet die grundlegende Eigenschaften dieser Folgen auf.

Bemerkung 3.1

Es ist manchmal üblich, bei Folgen und Reihen bei 0 anstatt bei 1 zu zählen zu beginnen. Die Bildungsgesetze und Summenformeln für die arithmetische Folge lauten dann

$$a_n = a_0 + n \cdot d \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

und für die geometrische Folge

$$a_n = a_0 \cdot q^n \quad \text{bzw.} \quad s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{für } q \neq 1)$$

3.4 Zinsen, Renten und Kredite

Zinsenrechnung

Ein Sparer legt seine Ersparnisse von $K = K_0$ Geldeinheiten auf ein Sparbuch und bekommt dafür $p = 5\%$ Zinsen p.a. Wie groß ist sein Guthaben nach 1, 2, ..., n Jahren?

$$\begin{aligned} \text{Guthaben nach einem Jahr: } K_1 &= K_0 + \overbrace{p \cdot K_0}^{\text{Zinsen}} = K_0(1+p) = K_0 \cdot q \\ \text{nach dem zweiten Jahr: } K_2 &= K_1 \cdot q = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\ &\dots\dots\dots \\ \text{nach dem } n\text{-ten Jahr: } K_n &= K_{n-1} \cdot q = (K_{n-2} \cdot q) \cdot q = \dots = K_0 \cdot q^n \end{aligned}$$

Das Kapital wird also jedes Jahr (jede *Verzinsungsperiode*) durch Multiplikation des Kapitals des vorangegangenen Jahres mit einem konstanten Faktor $q = (1+p)$ berechnet. Dieser Faktor wird als **Aufzinsungsfaktor** bezeichnet. Die Guthaben in den einzelnen Jahren bilden somit eine *geometrische Folge*³.

Aufzinsungsfaktor

Wir haben hier die Veränderung eines Kapitals oder Geldbetrages im Zeitverlauf durch Verzinsung oder Wertsteigerung betrachtet. Der Begriff der **Verzinsung** kann aber auch auf andere Veränderungen, z.B. durch Inflation, erweitert werden. Der betrachtete Zeitraum wird in Perioden, an deren Ende eine Verzinsung stattfindet, untergliedert. Die Dauer einer Periode ist von Fall zu Fall unterschiedlich und beträgt z.B. bei Sparkonten typischerweise ein Jahr.

Verzinsung

Wir können daher die Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$ auf den allgemeinen Fall des Wertzuwachses bzw. der Wertabnahme eines Kapitals im Zeitablauf erweitern. Es seien K_n und K_m die Werte eines Kapitals zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten n und m bei einem Zinssatz p . Dann ist

$$K_n = K_m \cdot q^{n-m} \quad \text{mit } q = 1+p$$

Wenn $n < m$, spricht man von einer **Abzinsung** oder **Diskontierung** von K_m auf K_n . Wenn $n > m$ wird K_m auf K_n **aufgezinst**.

Diskontierung

Beispiel 3.12

Ein Guthaben G auf einem Sparbuch beträgt 1990, 17 683 Geldeinheiten. Wie hoch war das Guthaben im Jahre 1988 bzw. wie hoch wird es im Jahr 1995 bei einer Verzinsung von 8% sein?

$$1988: G_{1988} = G_{1990} \cdot (1+0,08)^{1988-1990} = 17\,683 \cdot 1,08^{-2} \approx 15\,160,32$$

$$1995: G_{1995} = G_{1990} \cdot (1+0,08)^{1995-1990} = 17\,683 \cdot 1,08^5 \approx 25\,982,13$$

³In §3.1 haben wir gelernt, dass die Folgenglieder mit 1 beginnend numeriert werden, hier beginnen wir jedoch mit 0! Daraus ergibt sich auch der Unterschied von unserer Formel und dem Bildungsgesetz für die geometrische Folge (☞ §3.3, Bem. 3.1). Wir erlauben uns hier jedoch diese Inkonsequenz. Unsere Formel ist dafür verständlicher als $K_n = K_1 \cdot q^{n-1}$ für das Kapital im $(n-1)$ -ten Jahr. Solche „Schummeleien“ werden Ihnen noch das eine oder andere mal begegnen, und zwar nicht nur in diesem Skriptum.

Überprüfen Sie bitte daher immer die Voraussetzungen für eine Formel vor deren Verwendung.

Rentenrechnung (nachsüssig)

Rente

Eine Zahlung, die in gleicher Höhe in regelmäßigen Abständen erfolgt, heißt eine **Rente**. Wird die Rente jeweils zu Beginn einer Periode bezahlt, so heißt sie **vorschüssig**, andernfalls **nachsüssig**. Wir werden hier nur auf *nachsüssige* Renten eingehen.

Endwert

Der **Endwert** einer Rente ist die Summe aller Zahlungen auf den Endzeitpunkt der Rente *aufgezinst*.

Sei R die Rente, p die Verzinsung (Zinssatz), $q = (1 + p)$ und n die Anzahl der Zahlungen so erhält man den Endwert durch

$$E_n = \underbrace{R \cdot q^{n-1}}_{\text{erste Zahlung}} + \underbrace{R \cdot q^{n-2}}_{\text{zweite Zahlung}} + \dots + \underbrace{R \cdot q^0}_{\text{letzte Zahlung}}$$

Nach der Summenformel für geometrische Folgen (geometrische Reihe,  Tab. 3.4 auf Seite 40) gilt daher

$$E_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Barwert

Der **Barwert** ist die Summe aller Rentenzahlungen auf den Beginn der Rente *abgezinst*. Er wird durch Abzinsung des Endwertes für n Perioden berechnet.

$$B_n = \frac{E_n}{q^n} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

ewige Rente

Ein Spezialfall ist die **ewige Rente**. Darunter versteht man eine Rente, die unendlich oft gezahlt wird. Ihr Endwert ist immer unendlich⁴. Ihr Barwert lässt sich durch den Grenzwertübergang der Anzahl der Zahlungen n berechnen.

$$B_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{R}{q - 1}$$

Beispiel 3.13

Berechnen Sie Bar- und Endwert einer jährlichen Rente von 2000 Geldeinheiten für 10 Jahre bei einer Verzinsung von 5%. Wie hoch wäre der Barwert für eine ewige Rente gleicher Höhe und Verzinsung?

$R = 2000$, $n = 10$, $p = 0,05$, $q = 1 + p = 1,05$.

$$\text{Endwert: } E_{10} = 2000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} \approx 25\,155,79$$

$$\text{Barwert: } B_{10} = \frac{E_{10}}{1,05^{10}} \approx 15\,443,47$$

⁴da immer $p > 0$ und damit $q > 1$ ist.

$$\text{ewige Rente: } B_{\infty} = \frac{2000}{1,05 - 1} \approx 40000$$

Tilgungsrechnung

In der Tilgungsrechnung geht es um die Rückzahlung von Krediten, Darlehen udg. Im Falle gleichbleibender Rückzahlungsraten kann man zur Berechnung der Kreditrate die Rentenrechnung verwenden. Dabei muss der Barwert der Tilgungszahlungen gleich der ursprünglichen Kredithöhe K sein. Sei im folgenden X die Höhe der Tilgungsraten, p der Zinssatz und n die Laufzeit des Kredits, dann muss gelten

$$K = B_n = X \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

Daraus erhält man durch Umformen die Höhe der Kreditrate.

$$X = K \cdot q^n \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

Falls die Kreditrate bekannt ist, lässt sich aus dieser Formel auch die Laufzeit des Kredits berechnen. Durch Umformung (s. §2.3.3, Seite 23) erhalten wir

$$n = \frac{\ln X - \ln(X - K(q - 1))}{\ln q}$$

Beispiel 3.14

Ein Kredit über 50 000 Geldeinheiten wird mit 9% p.a. verzinst.

(a) Wie hoch sind die jährlichen Tilgungszahlungen bei einer Laufzeit von 10 Jahren?

$K = 50000$, $q = 1,09$ und $n = 10$:

$$X = 50000 \cdot 1,09^{10} \frac{1,09 - 1}{1,09^{10} - 1} \approx 7791$$

(b) Wie hoch muss die Laufzeit des Kredits angesetzt werden, damit die Rückzahlungsraten 10 000 Geldeinheiten nicht übersteigen.

Für eine jährliche Tilgungszahlung von $X = 10000$, $q = (1+p) = 1,09$ und $K = 50000$ erhalten wir

$$n = \frac{\ln 10000 - \ln(10000 - 50000 \cdot 0,09)}{\ln 1,09} \approx 6,94$$

Die Laufzeit muss daher mindestens 7 Jahre betragen.

Unter **Konversion** einer Schuld versteht man die Änderung der Tilgungsbedingungen während der Laufzeit des Kredits, z.B. durch Änderung des Zinssatzes. Es gilt:

Konversion

Die Restschuld⁵ des alten Tilgungsplanes ist das neue Schuldkapital für den neuen Tilgungsplan.

Beispiel 3.14 (Fortsetzung)

(c) Im Kredit aus Beispiel (a) steigt nach 4 Jahren die Verzinsung auf 10% p.a.. Wie hoch ist die neue Kreditrate?

$$\begin{aligned} \text{Restschuld} &= \text{Kredit aufgezinst um 4 Jahre} - \text{Endwert der ersten 4 Tilgungsraten} \\ &= 50000 \cdot 1,09^4 - 7791 \frac{1,09^4 - 1}{1,09 - 1} \approx 34949,83 \end{aligned}$$

Berechnen neuen Kredit mit $K = 34949,83$, $n = 10 - 4 = 6$ und $q = 1 + p = 1,10$:

$$X_{\text{neu}} = 34949,83 \cdot 1,10^6 \frac{1,10 - 1}{1,10^6 - 1} \approx 8024,74$$

⁵die um die bisher geleisteten Tilgungszahlungen verminderte Schuld.

— Übungen

35. Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folgen und stellen Sie diese graphisch dar:

- (a) $2n$ (b) $\frac{1}{2+n}$ (c) $e^{\sqrt{n}}$ (d) $e^{-\sqrt{n}}$
 (e) $n^{1/3}$ (f) $n^{1/n}$ (g) $(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ (h) $2^n/3^{\sqrt{n}}$

36. Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen der Folgen und stellen Sie diese graphisch dar:

- (a) $2n$ (b) $\frac{1}{2+n}$ (c) $2^{n/10}$ (d) $e^{-\sqrt{n}}$
 (e) $n^{1/3}$ (f) $(-1)^n \frac{1}{n}$ (g) $(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ (h) $\frac{2}{1+2^n}$

37. Berechnen Sie:

- (a) $\sum_{n=1}^{10} (7n + 18)$ (b) $\sum_{n=-3}^8 (2n - 8)$
 (c) $\sum_{n=1}^7 5(n - 3)$ (d) $\sum_{n=4}^8 (5n + 6(n - 4))$

38. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 6n^2 + 3n - 1}{7n^3 - 16} \right)$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - (-1)^n n^3)$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1} \right)$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \bmod 10}{(-2)^n} \right)$

Hinweis: Die Operation $a \bmod b$ hat als Ergebnis den Rest der ganzzahligen Division von a durch b , also z.B. $17 \bmod 5 = 2$, $12 \bmod 4 = 0$ und $33 \bmod 7 = 5$.

39. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen $\langle a_n \rangle$ mit

- (a) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ (b) $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$ (c) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$
 (d) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n$ (e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (f) $a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n}}$
 (g) $a_n = \frac{n}{n+1} + \sqrt{n}$ (h) $a_n = \frac{4+\sqrt{n}}{n}$

Hinweis: Substituieren (ersetzen) Sie in (c) n durch $2n$. Dabei bleibt der Grenzwert unverändert (Analog n durch $-2n$ in (d)). Verwenden dann Sie Regel (6) aus Tabelle 3.3.

40. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{(-1)^n n^5}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n}{2n-1} - \frac{4n^2-1}{5-3n^2} \right)$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,9^n$

41. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{nx}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx} \right)^n$

42. $\langle a_n \rangle$ sei eine geometrische Folge mit $a_1 = 2$ und relativer Zuwachsrate 0,1. Wie lautet das Bildungsgesetz von $\langle a_n \rangle$ und wie lautet a_7 ?

43. $\langle a_n \rangle$ sei eine geometrische Folge mit $a_7 = 12$ und relativer Zuwachsrate $-0,3$. Wie lautet das Bildungsgesetz von $\langle a_n \rangle$ und wie lautet a_1 ?
44. Berechnen Sie die ersten 10 Partialsummen der arithmetischen Reihe für $a_1 = 0$, $d = 1$, bzw. $a_1 = 1$, $d = 2$.
45. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^N a_n$ für
- (a) $N = 7$ und $a_n = 3^{n-2}$
 - (b) $N = 7$ und $a_n = 2(-1/4)^n$
 - (c) $N = 10$ und $a_n = 100 \cdot (1,1)^n$
 - (d) $N = \infty$ und $a_n = 0,95^n$
46. Die Bevölkerung eines Landes (konstantes relatives Wachstum) betrug 1960 4,0 Millionen und 1975 5,0 Millionen. In welchem Jahr wird die Bevölkerung sich im Vergleich zu 1960 verdoppelt haben (gerundet)?
47. Ein Angestellter bezog im Jahr 1970 ein Jahreseinkommen von 180 000 GE. Wie viel hat er in den Jahren 1970 – 1990 insgesamt verdient, wenn
- (a) sein Einkommen jährlich mit der (konstanten) relativen Zuwachsrate von 6% gewachsen ist?
 - (b) sein Einkommen jährlich um den (konstanten) Betrag 12 000 GE gewachsen ist?
48. Ein Kapital von 12 000 Geldeinheiten wird zu 6% jährlich für fünf Jahre angelegt. Auf welchen Wert ist es bei Berechnung von Zinseszinsen angestiegen?
49. Welcher nominelle Zinsfuß verdreifacht bei kontinuierlicher Verzinsung ein Kapital im Lauf von 15 Jahren?
50. Welcher Zinssatz führt nach 8 Jahren zum selben Kapitalwachstum wie der Zinssatz von 5% in 10 Jahren? Wie hoch ist der Endwert des Kapitals?
51. In einem Mietvertrag ist eine Wertsicherungsklausel vereinbart. Die Höhe der Miete beträgt zu Beginn 1989 73 792,43 Geldeinheiten. Wie hoch war die Miete ursprünglich bei Vertragsschluss zu Beginn 1982 und wie hoch wird sie zu Beginn des Jahres 2000 sein, wenn die Inflationsrate 3% beträgt?
Hinweis: Bei einem wertgesicherten Mietvertrag wird die Höhe der Miete regelmäßig an die Inflation angepasst. Nehmen Sie für dieses Beispiel an, dass die Anpassung jährlich erfolgt.
52. Jemand zahlt zu Beginn jedes Jahres einen Geldbetrag auf ein Sparbuch ein, um nach 10 Jahren eine Reise im Wert von 100 000 GE finanzieren zu können. Wie hoch muss der Geldbetrag mindestens sein, wenn die Verzinsung jährlich 5% beträgt?
Hinweis: Der Endwert einer *vorschüssigen* Rente ergibt sich durch $E_{\text{vorschüssig}} = q \cdot E_{\text{nachschüssig}}$. (q ist der Aufzinsungsfaktor.)
53. Eine Rente von jährlich 2000 Geldeinheiten wird bei einer Verzinsung von 7% für 15 Jahre nachschüssig ausbezahlt.
- (a) Wie hoch sind der Barwert und der Endwert der Rente?
 - (b) Angenommen, es handelt sich um eine ewige Rente. Wie hoch ist ihr Barwert?
 - (c) Wieviele Jahre müsste diese Rente ausbezahlt werden, damit ihr Barwert 21 188,03 Geldeinheiten beträgt?
54. (a) Wie hoch ist die jährliche Rückzahlungsrate eines 1990 gewährten Kredits in der Höhe von 80 000 Geldeinheiten bei einer Verzinsung von 12% und einer Laufzeit von 7 Jahren?

- (b) Wie müsste die Laufzeit dieses Kredits verändert werden, damit die jährliche Rückzahlungsrate 14 158,73 beträgt?
- (c) Nach drei Jahren steigt die Verzinsung auf 14%. Wie hoch ist die neue Kreditrate?
- 55.** Sie legen 100 000 GE mit 7% p.a. Verzinsung für 3 Jahre an. Berechnen Sie den Barwert dieser Anlage bezüglich einer jährlichen Inflationsrate von 3,5%.
- 56.** Sie legen für 10 Jahre 100 000 GE auf ein Sparbuch mit 5% p.a. Von den jährlich anfallenden Zinsen führen Sie als Kapitalertragssteuer 25% ab. Die Inflationsrate betrage $3\frac{3}{4}\%$ p.a. Geben Sie den Barwert dieser Anlage an. (Der Abzinsungsfaktor wird durch die Inflationsrate bestimmt.)
- 57.** Ein Kredit über 100 000 Geldeinheiten wird mit 11,25% p.a. verzinst. Wie groß muss die Laufzeit des Kredits (in Jahren) mindestens betragen, wenn die jährliche Rückzahlungsrate 18 000 Geldeinheiten nicht übersteigen darf?
- 58.** Ein Kapital von 10 000 GE soll durch Verzinsung nach einem Jahr auf 12 000 GE wachsen. Wie hoch muss der nominelle Jahreszins bei kontinuierlicher Verzinsung, bei 1, 2 oder bei 12 Verzinsungsperioden sein?
- 59.** Erklären Sie: Der Barwert einer sehr lang währenden Rente hängt von ihrer Dauer kaum ab.
- 60.** Ein Bauer verkauft seinen Hof. Er kann zwischen drei Angeboten wählen:
1. Angebot: 1 Mio. GE sofort
 2. Angebot: 2 Mio. GE nach 10 Jahren
 3. Angebot: eine jährliche (nachsüssige) Rente von 140 000 GE über 10 Jahre
- Vergleichen Sie die Angebote bei einem Zinssatz von 8%. Ermitteln Sie jeweils den Barwert und den Endwert.
- 61.** Durch gleichbleibende Zahlungen am Ende jedes Jahres soll nach 20 Jahren ein Kapital von 400 000 GE angespart werden. Wie hoch muss die jährliche Zahlung sein, wenn der Zinsfuß in den ersten 10 Jahren $p = 5\%$, dann aber $p = 3\%$ beträgt?
- 62.** Welches Kapital ermöglicht es, bei einem Zinsfuß von 4,5% eine ewige nachsüssige Rente von 4500 GE zu finanzieren?

Reelle Funktionen

Jede Entdeckung wird gleich in die Gesamtheit der Wissenschaften geleitet und hört damit gewissermaßen auf, Entdeckung zu sein, sie geht im Ganzen auf und verschwindet, man muss schon einen wissenschaftlich geschulten Blick haben, um sie dann noch zu erkennen.

Der Dorfschullehrer
FRANZ KAFKA (1883–1924)

4.1 Was sind Funktionen?

In § 1.3 auf Seite 6 haben wir Abbildungen kennengelernt, die Elemente aus der Definitionsmenge eindeutig einem Element aus der Wertemenge zuordnen.

Eine **reelle Funktion** ist ein besonders wichtiger Spezialfälle einer Abbildung, in denen sowohl die Definitionsmenge als auch die Wertemenge Teilmengen von \mathbb{R} sind.

reelle Funktion

Bei reellen Funktionen wird meist weder Definitionsmenge noch Wertemenge angegeben. In diesem Fall gilt:

- Die *Definitionsmenge* ist die größtmögliche *sinnvolle*¹ Teilmenge von \mathbb{R} , in der die Zuordnungsvorschrift definiert ist.
- Die *Wertemenge* ist die **Bildmenge**

Bildmenge

$$f(D) = \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D\}.$$

Beispiel 4.1

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Abkürzung für $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$. 0 kann im Definitionsbereich nicht enthalten sein, da $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist.

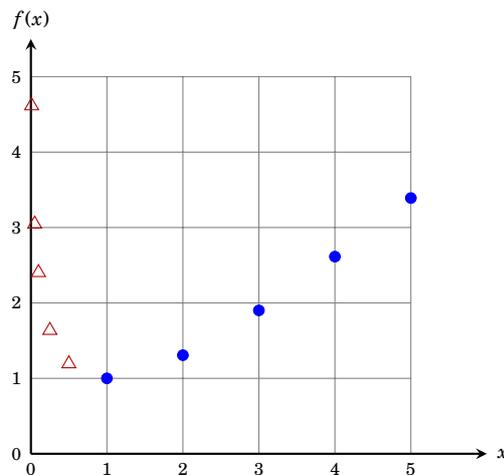
Beispiel 4.2

Die Produktionsfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist eine Abkürzung für

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

Es gibt keine „negativen“ Produktionsmengen. Außerdem ist \sqrt{x} für $x < 0$ nicht reell.

¹Wenn wir z.B. eine Kostenfunktion betrachten, so ist ein negatives Argument sinnlos. Es werden immer nur Güter und nicht negative Güter betrachtet.



Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	ERROR
1	1
2	1,307
3	1,901
4	2,614
5	3,391
0,5	1,193
0,25	1,636
0,1	2,403
0,05	3,046
0,01	4,615

Abbildung 4.1: Naïve Konstruktion des Graphen der Funktion $f(x) = x - \ln(x)$ im Intervall $(0,5)$

4.2 Wie zeichne ich einen Funktionsgraphen?

Graph

Jedem Paar $(x, f(x))$ entspricht ein Punkt in der Zahlenebene (xy -Ebene). Die Menge aller dieser Punkte bildet eine Kurve in dieser Ebene und heißt **Graph** der Funktion. Viele Eigenschaften von Funktionen lassen sich unmittelbar aus deren Graphen herauslesen.

Es ist natürlich unmöglich, zu jedem der unendlich vielen Zahlen im Intervall $(0,1)$ des Zahlenpaar $(x, f(x))$ in die xy -Ebene zu zeichnen.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 demonstrieren eine einfache Vorgangsweise zum Zeichnen eines Funktionsgraphen am Beispiel der Funktion

$$f(x) = x - \ln(x).$$

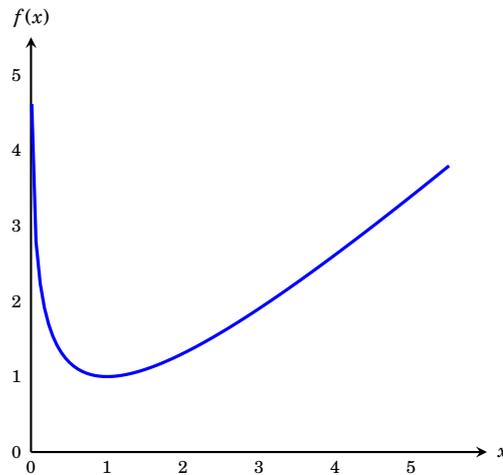
1. Wir überlegen uns zuerst wie der Graph wahrscheinlich aussehen wird. Graphen von einfachen elementaren Funktionen (☞ Abb. 4.7 und 4.8 auf Seite 56) sollten bereits aus dem Gedächtnis skizziert werden können.

In unserem Beispiel wird die Funktion in der Nähe von 0 (wegen $-\ln(x)$) und für sehr große Werte von x (wegen x) sehr große Funktionswerte annehmen. Dazwischen muss ein Bereich mit kleineren Funktionswerten liegen.)

2. Wir wählen einen geeigneten Bereich auf der x -Achse aus, in dem wir den Graphen zeichnen wollen. Dieser Bereich sollte so gewählt werden, dass er einen charakteristischen Ausschnitt zeigt. Achten Sie dabei auf die Definitionsmenge der Funktion.

In unserem Beispiel wählen wir das Intervall $(0,5)$.

3. Wir erstellen eine Wertetabelle, d.h. wir berechnen für einige ausgewählte x -Werte die y -Werte und zeichnen die entsprechenden Zahlenpaare in der xy -Ebene ein.

Abbildung 4.2: Graph der Funktion $f(x) = x - \ln(x)$ im Intervall $(0, 5)$

In unserem Beispiel verwenden wir die Werte $0, 1, \dots, 5$. Die entsprechenden Punkte sind mit dem Symbol \bullet in Abbildung 4.1 eingezeichnet.

- Wir überprüfen, ob aus den gezeichneten Punkten der Verlauf der Kurve ersichtlich ist. Sollte das nicht der Fall sein, verlängern wir die Wertetabelle um einige geeignete Werte und überprüfen noch einmal.

In Abbildung 4.1 sind diese zusätzlichen Punkte mit dem Symbol \triangle gekennzeichnet.

- Die eingezeichneten Punkte werden in geeigneter Weise miteinander verbunden² (siehe Abbildung 4.2).

Bemerkung 4.1

Computerprogramme zum Zeichnen von Funktionsgraphen liefern meistens Bilder wie jenes in Abbildung 4.3.

Obwohl dieses naive Verfahren von vielen Programmen zum Zeichnen von Funktionsgraphen angewandt wird, ist es meist auch hilfreich oder sogar *notwendig*, charakteristische Punkte — wie etwa lokale Extrema (siehe §5.4, Seite 80) oder Wendepunkte — zu berechnen („Kurvendiskussion“) und als Stützpunkte zum Zeichnen des Graphen zu verwenden. Zusätzlich kann es nützlich sein, Tangenten an diese Punkte einzuzichnen.

Der häufigste Fehler beim Zeichnen eines Graphen ist eine zu kleine Wertetabelle. Punkt (4) in der obigen Vorgangsweise wird einfach ignoriert. Stattdessen werden verschiedene Spekulationen angestellt. Etwa die, dass $f(x) = x - \ln(x)$ an der Stelle 0 den Funktionswert 0 besitzen müsste, wenn der Taschenrechner als Ergebnis ERROR anzeigt. Oder jene, wonach der Graph in Abbildung 4.2 bei nur im Bereich $[1, 5]$ definiert sei.

Ein anderes Beispiel eines falsch gezeichneten Funktionsgraphen ist die Funktion $f(x) = x^3$. Abbildung 4.4 (links) zeigt den Graphen dieser Funktion. Die Tangente im Ursprung (im Punkt 0) ist horizontal, deren Anstieg also 0. Oft wird diese



²Wir haben hier allerdings vorausgesetzt, dass die Funktion stetig (siehe 4.8, Seite 62) ist.

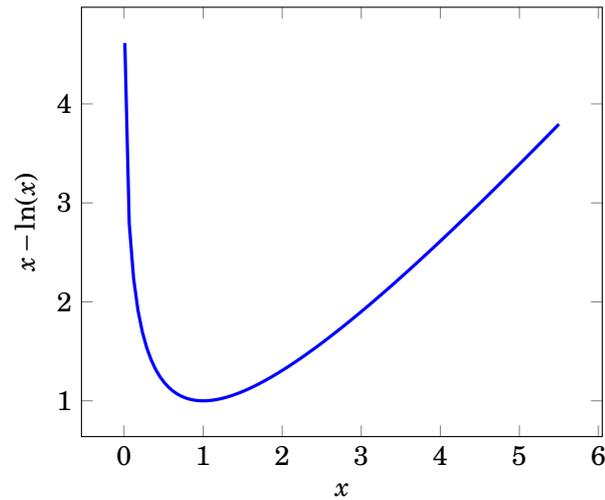


Abbildung 4.3: Graph der Funktion $f(x) = x - \ln(x)$ im Intervall $(0, 5)$

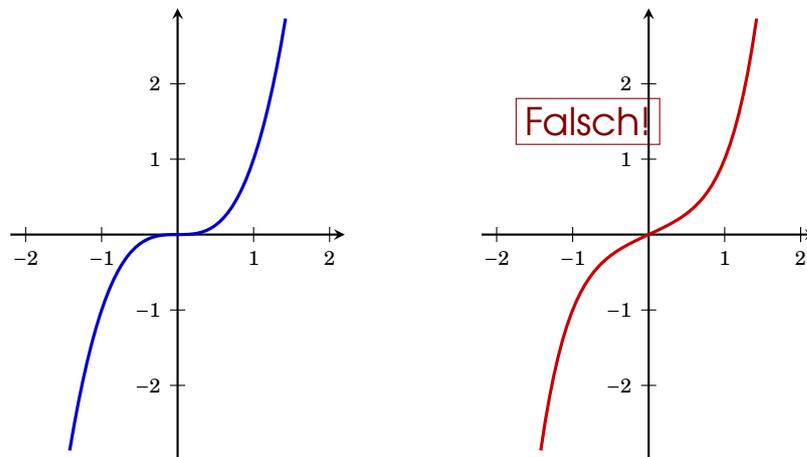


Abbildung 4.4: Richtige (links) und falsche (rechts) Zeichnung des Graph der Funktion $f(x) = x^3$. Man beachte den Anstieg der Tangente im Ursprung.

Eigenschaft nicht bedacht und erhält durch einfaches Verbinden der (zu wenigen) Punkte aus der Wertetabelle die Zeichnung in Abbildung 4.4 (rechts).

Wenn Sie nicht sicher sind, wie nun der Funktionsgraph aussieht, so berechnen Sie bitte noch einige (geeignete) Funktionswerte.



Skizze

In den meisten Fällen reicht eine **Skizze** des Funktionsgraphen völlig aus, um sich die Eigenschaften der untersuchten Funktion zu veranschaulichen. Bei einer Skizze kommt es auf die Genauigkeit der Funktionswerte nicht an, die Skalen an den beiden Achsen werden meist nicht gezeichnet. Allerdings ist es wichtig, dass die Skizze alle wesentlichen Eigenschaften und Punkte (wie etwa Extrema) der Funktion widerspiegelt. Die Zeichnung in Abbildung 4.4 (rechts) kann daher auch keine Skizze der Funktion $f(x) = x^3$, da sie den Anstieg der Tangente im Ursprung (das ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Funktion) nicht richtig wiedergibt.

Bemerkung 4.2

Zum Zeichnen des Graphen einer linearen Funktion (☞ Abbildung 4.7 (a), Seite 56) genügt eine Wertetabelle mit *nur zwei* Funktionswerten. Es ist ratsam selbst bei einer einfachen Skizze einer linearen Funktion ein *Lineal* zur Hand zu nehmen, da man ansonst Gefahr läuft, den Graph aus dem Handgelenk heraus (und damit krummlinig) zu zeichnen.



Es sei nochmals auf die Wichtigkeit hingewiesen, sich zuerst Gedanken über das mögliche Aussehen des Graphen zu machen (Punkt 1). Optimal wäre es sich zuerst eine (ungefähre) Skizze anzufertigen. Das gilt natürlich genauso, wenn ein Computerprogramm verwendet wird. Im Extremfall kann nämlich ein auf obiger Weise (eventuell mit Computerhilfe) erzeugter Graph wenig mit dem tatsächlichen Graphen gemeinsam haben. Z.B. schwankt die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ im Intervall $(0, 1]$ unendlich oft zwischen -1 und 1 . Wird der Graph jedoch mit einem Computerprogramm gezeichnet, so erhält man eine Kurve mit völlig unregelmäßigen Zacken, die fast nie -1 oder 1 erreichen.



Es sei außerdem noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Sie in der Lage sein sollten, die Graphen der Funktionen in den Abbildungen 4.7 und 4.8 auf den Seiten 56 und 57 ohne Anlegen einer Wertetabelle zu zeichnen (skizzieren).



Wenn der Graph einer Funktion $f(x)$ bekannt ist, so lässt der Graph einer Funktion der Form

$$g(x) = a + b \cdot f(c \cdot (x + d))$$

herleiten:

1. Zeichne (Skizziere) den Funktionsgraphen von $f(x)$.
2. Zeichne auf beiden Achsen die Markierungen für die Einheitslänge ein, i.e., die Markierungen für $x = 1$ und $y = 1$.
3. Ersetze die Markierung 1 an der x -Achse durch $|\frac{1}{c}|$. Dadurch ändert sich natürlich die Einheitslänge der x -Achse. Falls $c < 0$ ist, dann spiegle den Graphen an der y -Achse.
4. Verschiebe die y -Achse um d Einheiten nach links falls $d > 0$ und um $|d|$ Einheiten nach rechts falls $d < 0$.
Beachte dabei, dass sich die Einheitslänge in Schritt 3 geändert hat.
5. Ersetze die Markierung 1 an der y -Achse durch $|b|$. Dadurch ändert sich natürlich die Einheitslänge der y -Achse. Falls $b < 0$ ist, dann spiegle den Graphen an der x -Achse.
6. Verschiebe die x -Achse um a Einheiten nach unten falls $a > 0$ und um $|a|$ Einheiten nach oben falls $a < 0$.
Beachte dabei, dass sich die Einheitslänge in Schritt 5 geändert hat.

Beispiel 4.3

Abbildung 4.5 zeigt die Konstruktion des Graphen von

$$g(x) = 1 - 2 \left[3 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^2$$

ausgehend vom Graphen für $f(x) = x^2$.

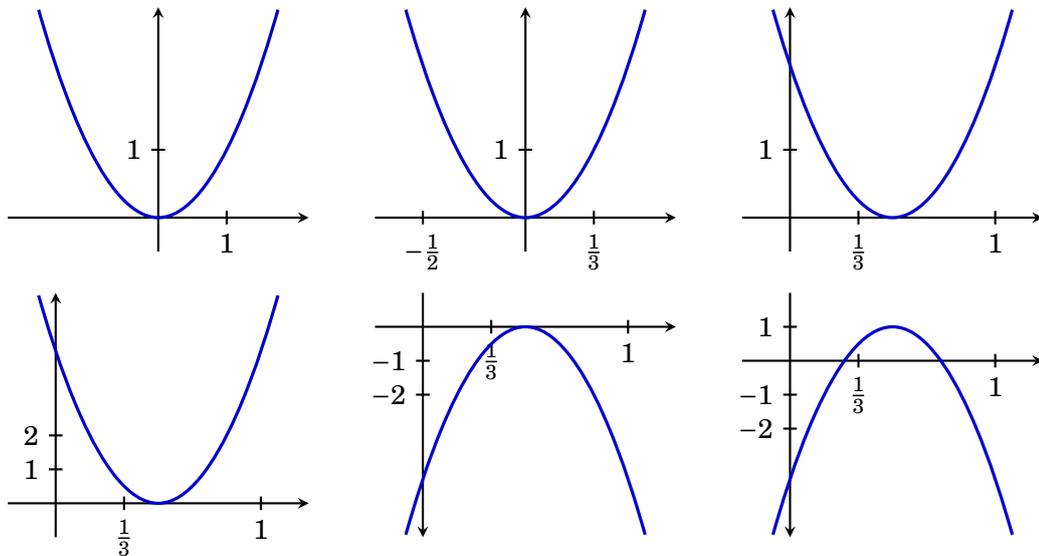


Abbildung 4.5: Konstruktion des Graphen von $g(x) = 1 - 2\left[3\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2$ (rechts unten) ausgehend vom Graphen für $f(x) = x^2$ (links oben); $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -\frac{1}{2}$.

4.3 Stückweise definierte Funktionen

Die Zuordnungsvorschrift einer Funktion muss nicht immer so einfach sein wie etwa in der Funktion $f(x) = 2(x - \ln x - 1)$. Es ist durchaus möglich, dass diese Zuordnungsvorschrift in verschiedenen Intervallen des Definitionsbereichs verschieden definiert ist. Beim Zeichnen des Graphen so einer Funktion gehen Sie in jedem einzelnen der Intervalle genauso wie oben beschrieben vor. Sie müssen dann allerdings an den Intervallgrenzen kennzeichnen, welche Punkte Bestandteil des Graphen sind und welche nicht. Dies geschieht üblicherweise durch \bullet (Bestandteil) und \circ (nicht Bestandteil).

Beispiel 4.4

Der Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

zerfällt in die Intervalle $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$ und $[1, \infty)$. Im ersten Intervall wird der Graph der Funktion $x \mapsto 1$, im zweiten von $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ und im dritten von $x \mapsto x$ gezeichnet. Danach muss noch geklärt werden, dass der Punkt $(1, 1)$ Bestandteil des Graphen ist, der Punkt $(1, \frac{1}{2})$ hingegen nicht (☞ Abbildung 4.6).

Bemerkung 4.3

In Ländern mit einem progressiven Steuersystem, wie z.B. in Österreich oder Deutschland, wird die zu bezahlende Einkommensteuer durch eine stückweise definierte Funktion berechnet.

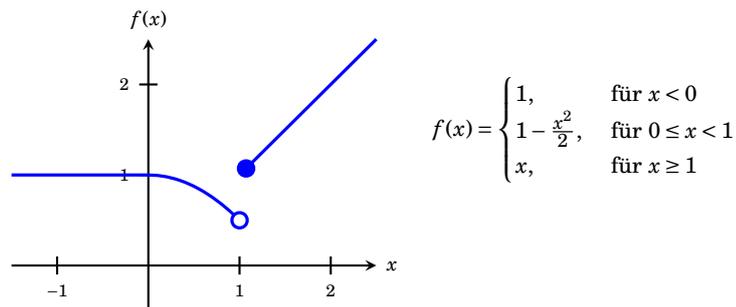


Abbildung 4.6: Graph einer stückweise definierten Funktion.

4.4 Elementare Funktionen

Unter *elementaren Funktionen* versteht man meist häufig auftretende Funktionen die sich aus den in § 2.2 auf Seite 12ff Termen durch die vier Grundrechenarten oder Funktionenverkettungen zusammensetzen lassen. Tabelle 4.1 zeigt wichtige elementare Funktionen. In den Abbildungen 4.7 und 4.8 sind die Graphen einiger dieser Funktionen dargestellt.

4.5 Ist f injektiv und surjektiv?

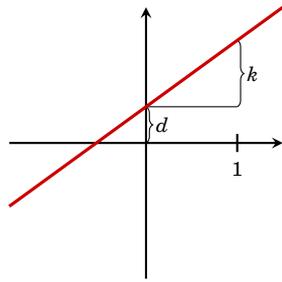
In § 1.3 (Definition 1.3 auf Seite 6) haben wir das Konzept von *injektiven*, *surjektiven* und *bijektiven* Abbildungen kennengelernt. Um festzustellen, ob eine gegebene Funktion eine dieser Eigenschaften hat, müssen wir feststellen, wie viele Urbilder jedes $y \in W_f$ besitzt. Dazu eignet sich der „Horizontalen-Test“.

1. Wir zeichnen den Graphen der zu untersuchenden Funktion (☞ §4.2).
2. Wir zeichnen ein $y \in W_f$ auf der y -Achse ein und legen eine Gerade parallel zur x -Achse (Horizontale) durch diesen y -Wert.
3. Die Anzahl der Schnittpunkte von Horizontale und Graph ist die Anzahl der Urbilder von y .
4. Wir wiederholen (2) und (3) für eine *repräsentative* Auswahl von y -Werten.
5. Interpretation: Schneidet jede Horizontale den Graphen in
 - (a) *höchstens* einem Punkt, so ist f *injektiv*;
 - (b) *mindestens* einem Punkt, so ist f *surjektiv*;
 - (c) *genau* einem Punkt, so ist f *bijektiv*.

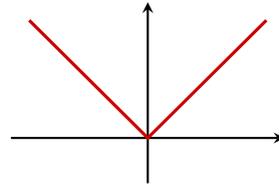
Beispiel 4.5

Ist die Funktion $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ injektiv und surjektiv?

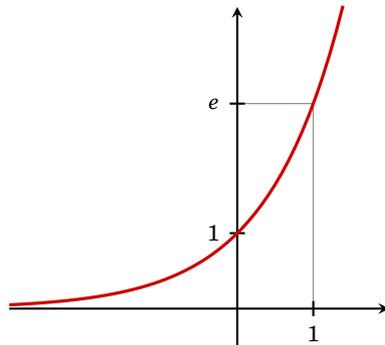
Abbildung 4.9 (links) zeigt den Graphen der Funktion. (Er ist nur im Intervall $[-1, 2]$ definiert!) Die Horizontale durch 5 ($\in W = \mathbb{R}$) schneidet den Graphen in keinem Punkt, f ist daher nicht surjektiv. Die Horizontale durch $\frac{1}{2}$ schneidet den Graphen in zwei Punkten, f ist daher auch nicht injektiv.



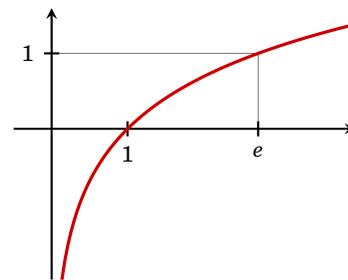
(a) $f(x) = kx + d$



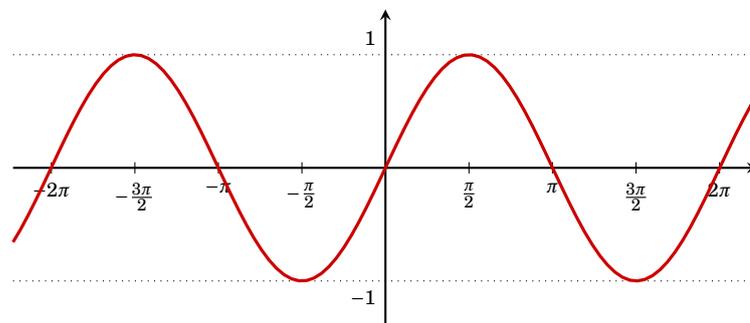
(b) $f(x) = |x|$



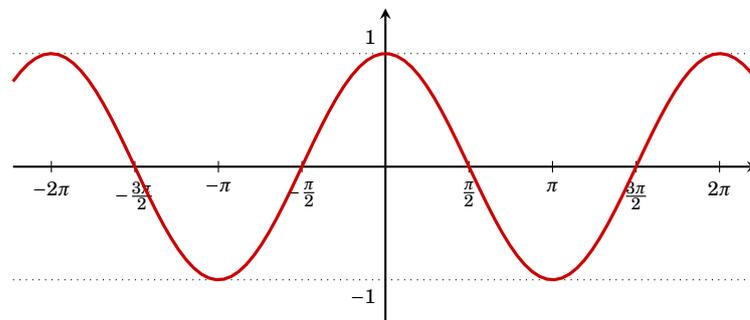
(c) $f(x) = \exp(x)$



(d) $f(x) = \ln(x)$



(e) $f(x) = \sin(x)$



(f) $f(x) = \cos(x)$

Abbildung 4.7: Elementare Funktionen (Teil 1)

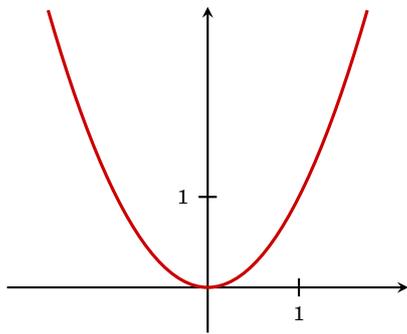
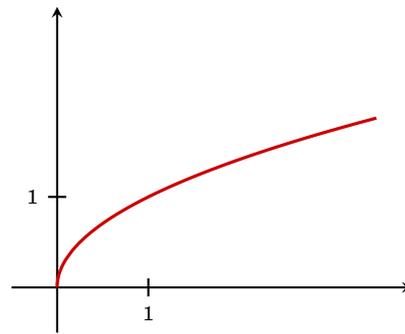
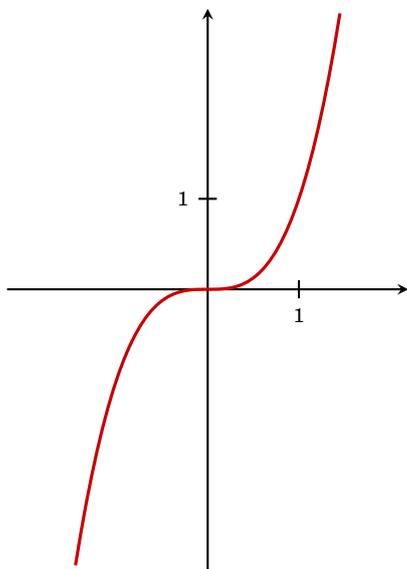
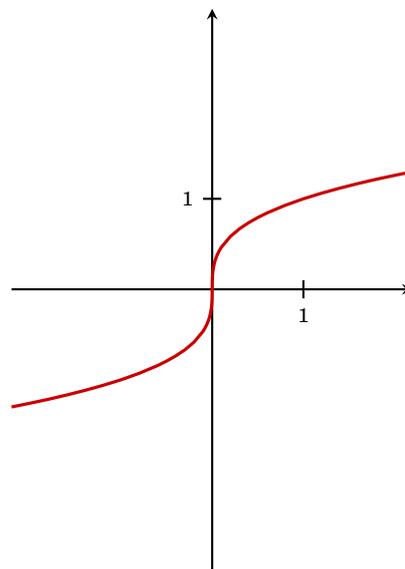
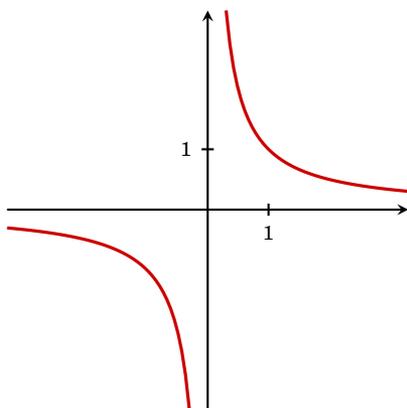
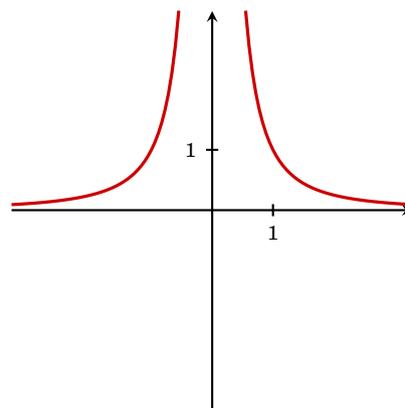
(g) $f(x) = x^2$ (h) $f(x) = \sqrt{x}$ (i) $f(x) = x^3$ (j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (k) $f(x) = \frac{1}{x}$ (l) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Abbildung 4.8: Elementare Funktionen (Teil 2)

Tabelle 4.1: Wichtige elementare Funktionen

<i>Lineare Funktionen</i>	$x \mapsto kx + d$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
	k heißt <i>Steigung</i> oder <i>Anstieg</i> d heißt <i>Achsenabschnitt</i>	
<i>Potenzfunktionen</i>	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$D \rightarrow W$
	$D = W = \mathbb{R}$ falls $n > 0$ $D = W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls $n < 0$	
<i>Wurzelfunktionen</i>	$x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}$	$D \rightarrow W$
	$D = W = \mathbb{R}_0^+$ falls n gerade $D = W = \mathbb{R}$ falls n ungerade	
<i>Polynome</i>	$x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
<i>Rationale Funktionen</i>	$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$	$D \rightarrow \mathbb{R}$
	$p(x), q(x)$ Polynome $D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$	
<i>Exponentialfunktion</i>	$x \mapsto \exp(x) = e^x$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
<i>allgemein</i>	$x \mapsto a^x \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
<i>Logarithmusfunktion</i>	$x \mapsto \log(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
	Inverse Funktion zur <i>Exponentialfunktion</i>	
<i>allgemein</i>	$x \mapsto \log_a(x) \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
<i>Winkelfunktionen</i>	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

Man beachte, dass Definitions- und Wertemenge Bestandteil einer Funktion sind. Die Funktion $g: [0, 2] \rightarrow [0, 4], x \mapsto x^2$ (Abb. 4.9, rechts) ist surjektiv, da Geraden außerhalb der Bildmenge nicht mehr zulässig sind. Die Funktion ist auch injektiv, da jede Horizontale den Graphen in höchstens einem Punkt schneiden kann. Die entsprechenden Punkte liegen ja nun außerhalb der Definitionsmenge. Die Funktion g ist daher bijektiv.

4.6 Die inverse Funktion

Wir haben in § 1.3 (Definition 1.5 auf Seite 8) gesehen, dass eine Abbildung f genau dann eine *Umkehrabbildung* (oder *inverse Funktion*) besitzt, wenn f bijektiv ist.

Wir erhalten die Zuordnungsvorschrift der inversen Funktion einer reellen Funk-

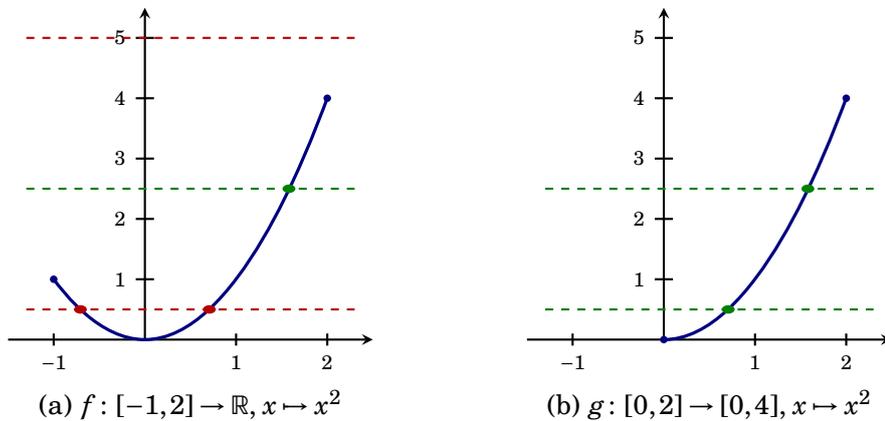


Abbildung 4.9: Horizontalentest

tion f durch Vertauschen der Rollen von Argument (x) und Bild (y). Mit anderen Worten, wir drücken x als Funktion von y aus.

Beispiel 4.6

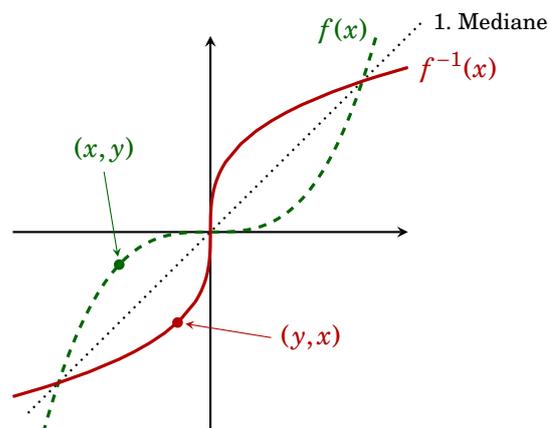
Wir suchen die Umkehrfunktion von $y = f(x) = 2x - 1$.

Durch Umformung erhalten wir: $y = 2x - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y + 1) = x$. Die Umkehrfunktion lautet daher $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 1)$. Da es üblich ist, das Argument mit x zu bezeichnen, schreiben wir $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$.

Beispiel 4.7

Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Dieses Vertauschen von x und y spiegelt sich auch im Graphen der Umkehrfunktion wieder. Ist nämlich (a, b) ein Punkt des Graphen von f (i.e. $f(a) = b$), dann ist (b, a) ein Punkt des Graphen von f^{-1} . Die beiden Graphen sind also spiegelsymmetrisch bezüglich der 1. Mediane (☞ Abbildung 4.10).

Abbildung 4.10: Graph der Funktion $f(x) = x^3$ und ihrer Inversen

Die Inverse einer Funktion muss nicht immer existieren.

Beispiel 4.8

Besitzt die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ eine Inverse?

Nein! Die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion müsste nämlich $x \mapsto \pm\sqrt{x}$ lauten. Aber diese Vorschrift ist weder eindeutig (das Bild von 4 ist sowohl 2 als auch -2) noch ist es für alle Argumente (z.B. $x = -1$) definiert. (Es reicht natürlich darauf hinzuweisen, dass $f(x) = x^2$ nicht bijektiv ist.)

Bemerkung 4.4

Beachten Sie bitte, dass Definitionsmenge und Wertemenge Teil einer Funktion sind. So ist z.B. die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ bijektiv und besitzt sehr wohl eine Umkehrfunktion, nämlich $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x}$. Beachten Sie bitte den Unterschied zu Beispiel 4.8. Vgl. dazu auch Beispiel 4.5.

4.7 Limiten

Was passiert mit dem Funktionswert einer Funktion f , wenn das Argument x gegen einen bestimmten Wert x_0 strebt?

Wir nehmen eine Folge $\langle x_n \rangle \rightarrow x_0$ von Argumenten, die gegen x_0 konvergiert, und betrachten die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$. Diese Folge kann nun gegen einen Grenzwert a konvergieren, oder auch nicht (☞ §3.2, Seite 37).

Definition 4.1 (Limes)

Wenn für jede Folge von Argumenten $\langle x_n \rangle \rightarrow x_0$ die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ gegen eine Zahl a konvergiert, so heißt a der **Grenzwert** (oder **Limes**) der Funktion f **an der Stelle** x_0 . Wir schreiben dafür

Grenzwert
Limes

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow a \text{ für } x \rightarrow x_0$$

Bemerkung 4.5

x_0 muss nicht in der Definitionsmenge liegen und kann daher auch ∞ sein. Genauso muss a nicht in der Wertemenge der Funktion liegen.

Natürlich können wir nicht *jede* Folge von Argumenten untersuchen. Für „einfache“ Funktionen oder Funktionen mit stückweise unterschiedlichen Zuordnungsvorschriften (wie etwa die Funktion in Beispiel 4.4 auf Seite 54), empfiehlt sich folgende Vorgehensweise (☞ Abb. 4.11):

- (1) Wir zeichnen den Graphen der Funktion (☞ §4.2, Seite 50ff).
- (2) Wir zeichnen den Wert x_0 auf der x -Achse ein.
- (3) Wir setzen den Bleistift auf dem Graphen und führen ihn auf dem Graphen von *rechts* bis zum x_0 -Wert.
- (4) Wir lesen den y -Wert dieses Punktes von y -Achse ab. Dieser Wert heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0 : $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.
- (5) Analog erhalten wir von der *linken* Seite den **linksseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0 : $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$.

rechtsseitiger
Grenzwert

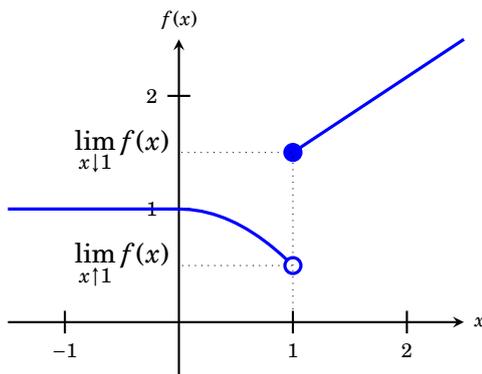
linksseitiger
Grenzwert

Tabelle 4.2: Rechenregeln für Limiten

Seien $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$.

Regel	Gültigkeit
(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x) + d) = c \cdot a + d$	für $c, d \in \mathbb{R}$
(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$	
(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$	
(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$	für $b \neq 0$
(5) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^k = a^k$	für $k \in \mathbb{N}$

(6) Wenn beide Limiten *gleich* sind, so existiert der Grenzwert und es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Abbildung 4.11: Der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ existiert nicht, da $0,5 = \lim_{x \uparrow 1} f(x) \neq \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 1,5$.

Beispiel 4.9

Der Grenzwert der Funktion f in Abb. 4.11 in $x_0 = 1$ existiert nicht, da

$$0,5 = \lim_{x \uparrow 1} f(x) \neq \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 1,5$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ existiert hingegen, da

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

Für Limiten von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzwerte von Folgen (vgl. Tabelle 4.2; vgl. Tabelle 3.3, Seite 39).

Bemerkung 4.6

Falls eine Funktion an der Stelle x_0 stetig ist (☞ §4.8), so ist der Grenzwert gerade der Funktionswert an der Stelle x_0 .

4.8 Stetigkeit

Beim Zeichnen von Graphen fällt auf, dass es Funktionen gibt, die sich *ohne Absetzen des Bleistifts* zeichnen lassen (etwa in Abbildungen 4.2 auf Seite 51). Andere Funktionen besitzen *Sprungstellen* und man muss beim Zeichnen den Bleistift vom Papier heben (etwa an der Stelle $x = 1$ in der Abbildung 4.11 auf Seite 61).

Unstetigkeits-
stelle

Solche *Sprungstellen* heißen **Unstetigkeitsstellen** der Funktion. An allen anderen Punkten ist die Funktion **stetig**. Formal lässt sich das so ausdrücken:

Definition 4.2 (Stetigkeit)

stetig

Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow x_0} = f(x_0)$. Die Funktion heißt **stetig**, falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.

Die elementaren Funktionen in Tabelle 4.1 auf Seite 58 sind stetig.

Funktionen mit stückweise unterschiedlichen Zuordnungsvorschriften (wie etwa die Funktion aus Beispiel 4.4 auf Seite 54) haben meist nur wenige Unstetigkeitsstellen, die sich durch die folgende Vorgangsweise finden lassen:

1. Wir zeichnen den Graphen der Funktion (☞ §4.2, Seite 50ff).
2. In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir beim Zeichnen *nicht* den Bleistift absetzen müssen, ist die Funktion stetig.
3. In allen Punkten des *Definitionsbereichs* in denen wir absetzen müssen ist, die Funktion *nicht* stetig.

Beispiel 4.10

Die Funktion in Abbildung 4.11 auf Seite 61 ist überall stetig, außer im Punkt $x = 1$.

Bemerkung 4.7

Die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. Die *Sprungstelle* bei 0 gehört *nicht* zum Definitionsbereich (☞ Abb. 4.8 (k), Seite 57).

- (e) $x^2, (3x-2)^2+1$;
 (f) $\frac{1}{x^{-3}}, \frac{1}{x^{-2}}, \frac{1}{x^{-1}}, \frac{1}{x^0}, \frac{1}{x^1}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 (g) $\exp(x), \exp(2x), \exp(x/3), \exp(-x), \exp(x-1), \exp(1-x)$.
 (h) $\ln(x), \ln(2x-1), \log_{10}(x), \log_2(x), \log_2(2x-1)$.
 (i) $\sin(x), \sin(\pi x), \sin(2k\pi x), \sin(x+\pi/2), \cos(x)$.

71. Zeichnen Sie die Funktionsgraphen folgender Exponentialfunktionen:

- (a) $f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$ (c) $f(x) = (\sqrt{2})^{-x}$ (d) $f(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
 (e) $f(x) = 1 - e^{-2x}$ (f) $f(x) = e^{2(1-x)}$ (g) $f(x) = (e^{-x})^2$ (h) $f(x) = e^{(x+1)/2}$

72. Zeichnen Sie die Funktionsgraphen folgender Funktionen:

- (a) $f(x) = \ln(x+1)$ (b) $f(x) = \ln(x)$ (c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
 (d) $f(x) = \log_{10}(x+1)$ (e) $f(x) = (\ln(x))^2$ (f) $f(x) = 1 - \ln|x+1|$

73. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = e^{x^4-2x^2}$ im Intervall $[-2, 2]$.

74. Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = |\cos(x)|$ im Intervall $[0, \pi]$.

75. Gegeben ist ein Funktionsterm. Was ist der größtmögliche Definitionsbereich einer reellen Funktion mit diesem Funktionsterm? Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktionen mit den angegebenen Funktionstermen, versuchen Sie dabei zuerst den Graphen ohne Verwendung einer Wertetabelle zu skizzieren.

- (a) $h(x) = \frac{x-1}{x-2}$ (b) $D(p) = \frac{2p+3}{p-1}$ (c) $f(x) = \sqrt{x-2}$
 (d) $F(y) = -\sqrt{3y-2}$ (e) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-3}}$ (f) $G(u) = \frac{2}{\sqrt{3-2u}}$
 (g) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (h) $f(x) = 2 - \sqrt{9-x^2}$ (i) $g(x) = -\sqrt{3-x}$
 (j) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ (k) $f(x) = \frac{1}{x}$ (l) $f(x) = \frac{-3}{x-2}$
 (m) $f(x) = x^3$ (n) $f(x) = 1 - x^3$ (o) $f(x) = 2 - |x|$
 (p) $g(x) = |x| + 3$ (q) $f(x) = |x+3|$ (r) $F(x) = -|x-2|$
 (s) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ (t) $G(x) = \frac{2-x}{|x-2|}$

76. Skizzieren Sie die Graph folgender Funktionen möglichst ohne Verwendung einer Wertetabelle:

- (a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3+1}$ (c) $f(x) = x(1-x)$
 (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ (e) $f(x) = |x(1-x)|$ (f) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$
 (g) $f(x) = x^7$ (h) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ (i) $f(x) = \sqrt{(|x|-1)^2}$

77. Ordnen Sie die Funktionsterme den Funktionsgraphen in Abbildung 4.12 auf Seite 66 zu:

- | | |
|------------------------------|---|
| (a) $f(x) = x^2$ | (b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ |
| (c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ | (d) $f(x) = \sqrt{x}$ |
| (e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ | (f) $f(x) = \sqrt{ 2x - x^2 }$ |
| (g) $f(x) = -x^2 - 2x$ | (h) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)\text{sgn}(1 - x) + 1$ |
| (i) $f(x) = e^x$ | (j) $f(x) = e^{x/2}$ |
| (k) $f(x) = e^{2x}$ | (l) $f(x) = 2^x$ |
| (m) $f(x) = \ln(x)$ | (n) $f(x) = \log_{10}(x)$ |
| (o) $f(x) = \log_2(x)$ | (p) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ |
| (q) $f(x) = 1 - x $ | (r) $f(x) = \prod_{k=-1}^2 (x + k)$ |

78. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie, ob Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität vorliegt.

- (a) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$
 (b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$
 (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
 (d) $f: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - 4)^2 - 1$
 (e) $f: [2, 6] \rightarrow [-1, 3], x \mapsto (x - 4)^2 - 1$
 (f) $f: [4, 8] \rightarrow [-1, 15], x \mapsto (x - 4)^2 - 1$

79. Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -x + 1$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^3$. Berechnen und zeichnen Sie die zusammengesetzte Funktionen $g \circ f$ und $f \circ g$ deren Umkehrfunktionen $(g \circ f)^{-1}$ bzw. $(f \circ g)^{-1}$.

80. Wählen Sie den Definitionsbereich für die folgenden Funktionsterme so, dass die entstehenden Funktionen eine Inverse besitzen (als Wertemenge wird die Bildmenge angenommen).

- | | | |
|-----------------------------|---|---|
| (a) $f(x) = (x + 1)^2 - 2x$ | (b) $f(x) = (3 - 2 x)^2$ | (c) $f(x) = x^2 - 1 $ |
| (d) $f(x) = \ln x - 1 $ | (e) $f(x) = x - 2 $ | (f) $f(x) = \sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 1}$ |
| (g) $f(x) = x^5 + x^3$ | (h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ | |

81. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Funktionen, zeichnen Sie den Funktionsgraphen und den der Inversen.

- | | | |
|-------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| (a) $y = -3x - 4$ | (b) $y = x - 1$ | (c) $p = 4 - \frac{2}{5}x$ |
| (d) $q = 3p + 6$ | (e) $y = \sqrt{3x - 4}$ | (f) $y = \sqrt{\frac{1}{4} + 2x}$ |
| (g) $y = x^5$ | (h) $y = \sqrt{x}$ | (i) $y = \sqrt{4 - x}$ |

82. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ x + 1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ für $x_0 = -2, 0$ und 2 .
 Ist f in diesen Punkten stetig?

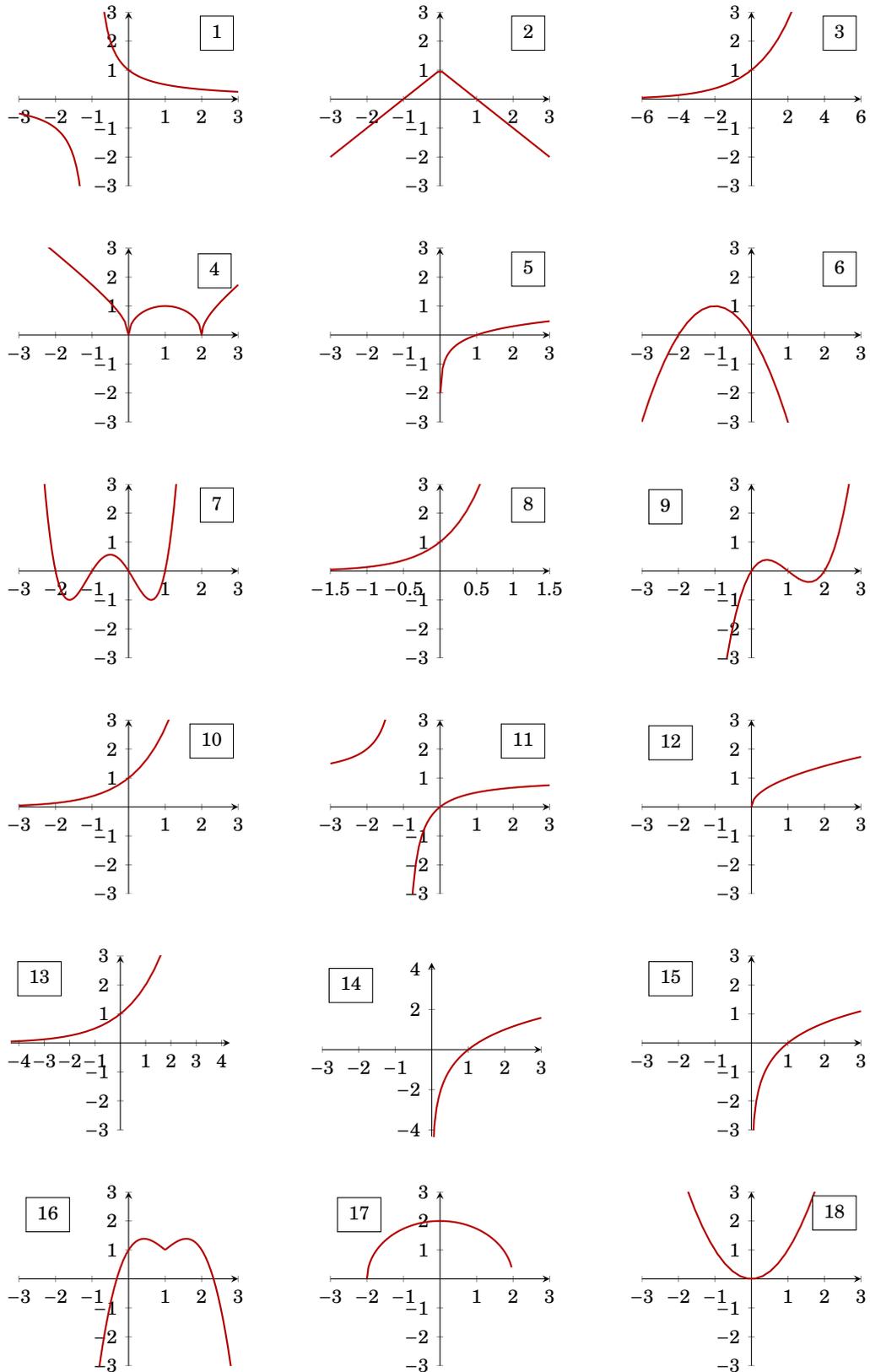


Abbildung 4.12: Funktionsgraphen zu Aufgabe 77.

83. Überlegen Sie sich den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert für

- (a) $\lim_{x \uparrow 0} f(x), \lim_{x \downarrow 0} f(x),$ für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
 (b) $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x}, \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x}$
 (c) $\lim_{x \uparrow 1} x, \lim_{x \downarrow 1} x.$

84. Bestimmen Sie

- (a) $\lim_{x \uparrow 1} \frac{x^{3/2}-1}{x^3-1}$ (b) $\lim_{x \uparrow -2} \frac{\sqrt{|x^2-4|^2}}{x+2}$ (c) $\lim_{x \uparrow 0} |x|$
 (d) $\lim_{x \uparrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (e) $\lim_{x \uparrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$ (f) $\lim_{x \uparrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$
 (g) $\lim_{x \uparrow -2} \frac{|x+2|^{3/2}}{2+x}$ (h) $\lim_{x \uparrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ (i) $\lim_{x \uparrow -7} \frac{2|x+7|}{x^2+4x-21}$

Hinweis: $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x .

85. Geben Sie folgende Grenzwerte an, sofern sie existieren.

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x|$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$

86. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - x + 6}{3x^4 + x^2 + x - 3}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 5 - 3\pi}{5x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$

87. Sind die folgenden Funktionen stetig auf dem Definitionsbereich? Skizzieren Sie die Funktionen.

- (a) $D = \mathbb{R}, f(x) = x$ (b) $D = \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$
 (c) $D = \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - 1$ (d) $D = \mathbb{R}, f(x) = |x|$
 (e) $D = \mathbb{R}^+, f(x) = \ln(x)$ (f) $D = \mathbb{R}, f(x) = [x]$
 (g) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Hinweis: $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x .

88. Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x^2 - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0. Ist f in diesem Punkt stetig bzw. differenzierbar?

89. Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle 1 stetig bzw. differenzierbar? Berechnen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert an den Stellen 1 und -1 .

90. Welchen Wert muss h besitzen, damit die Funktion f stetig ist?

- (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{für } x \neq 1 \\ h & \text{für } x = 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} hx + 3 & \text{für } x \geq 1 \\ 3 - hx & \text{für } x < 1 \end{cases}$
 (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2hx & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - h & \text{für } x > 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + h & \text{für } x \neq 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

Differentialrechnung

Ein neuer Zweig der Mathematik, der bis zu der Kunst vorgedrungen ist, mit unendlich kleinen Größen zu rechnen, gibt jetzt auch in anderen komplizierten Fällen der Bewegung Antwort auf die Fragen, die bisher unlösbar schienen.

Krieg und Frieden

LEO N. TOLSTOI (1817–1875)

5.1 Was ist der Differentialquotient?

Ein Auto fährt von Wien nach Salzburg. Wir können diese Fahrt durch eine Funktion $x \mapsto f(x)$ beschreiben, die zu jedem Zeitpunkt x (Stunden) die Entfernung $f(x)$ (Kilometer) von Wien angibt.

Betrachten wir nun das Auto auf seiner Fahrt. Wenn das Auto zum Zeitpunkt x_0 in St. Pölten ist, so beträgt sein Abstand von Wien gerade $f(x_0)$ Kilometer. Ist es zum Zeitpunkt $x_1 = x_0 + \Delta x$ bereits in Linz, so beträgt seine Entfernung bereits $f(x_1)$ Kilometer. Die gefahrene Strecke zwischen diesen beiden Orten beträgt daher $f(x_1) - f(x_0)$ Kilometer, und dafür hat das Auto $x_1 - x_0$ Stunden gebraucht. Wir verwenden für diese beiden Differenzen die Symbole¹ Δf bzw. Δx . Die mittlere Geschwindigkeit des Autos zwischen St. Pölten und Linz ist nun $\frac{\text{gefahrene Strecke}}{\text{benötigte Zeit}}$, also

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dieser Ausdruck wird als **Differenzenquotient** von f an Stelle x_0 bezeichnet.

Differenzen-
quotient

Wenn wir die Geschwindigkeit des Autos in St. Pölten, d.h. zum Zeitpunkt x_0 , schätzen wollen, so können wir die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten x_0 und $x_1 = x_0 + \Delta x$ bestimmen. Ist Δx sehr groß (etwa 1 Stunde), kann diese Schätzung sehr daneben liegen. Verkleinern wir Δx (etwa auf 1 Minute oder gar 1 Sekunde), so wird dieser Differenzenquotient mit der tatsächlichen Geschwindigkeit

¹spricht: Delta f bzw. Delta x

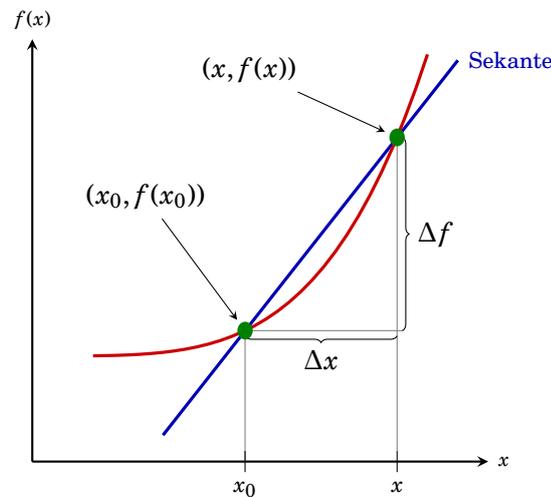


Abbildung 5.1: Graphische Bedeutung des Differenzenquotienten

besser übereinstimmen. Die Momentangeschwindigkeit erhalten wir, wenn wir $\Delta x \rightarrow 0$ streben lassen. Im Grenzübergang (Grenzwert, Limes) wird aus dem Differenzenquotient der Differentialquotient.

Definition 5.1 (Differentialquotient)

Falls der Limes

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

differenzierbar
Differential-
quotient
Ableitung

existiert, so heißt die Funktion f **differenzierbar an der Stelle** x_0 und dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder (**erste**) **Ableitung** an der Stelle x_0 .

Die Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Andere Bezeichnungen:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

Bemerkung 5.1

In der Literatur findet man verschiedene Schreibweisen, um den Limes für den Differenzenquotienten darzustellen.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Sie sollten trotz unterschiedlicher Notation in der Lage sein, das Objekt (in diesem Fall den „Differentialquotienten“) wiederzuerkennen.

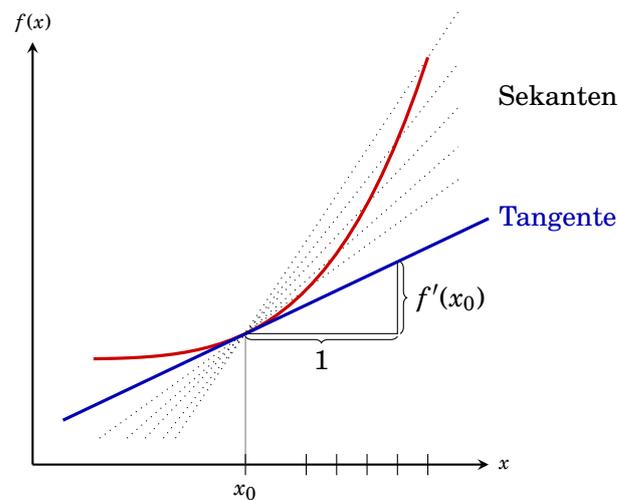


Abbildung 5.2: Graphische Bedeutung des Differentialquotienten

Eine graphische Interpretation

Abbildung 5.1 zeigt den Graphen einer Funktion und die Sekante durch die Funktionswerte von x_0 und $x_0 + \Delta x$. Die Steigung dieser Gerade ist $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, der *Differenzenquotient*. Wir können nun Δx verkleinern. Für jedes Δx erhalten wir eine andere Sekante (☞ Abb. 5.2, gepunktete Linien). Im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ wird die Sekante zur **Tangente**. Der *Differentialquotient* $\frac{df}{dx}$ ist somit die **Steigung der Tangente** (☞ Abb. 5.2).

Tangente

Änderungsrate und Grenzfunktion

Zu Beginn haben wir den Differentialquotienten als **Änderungsrate** einer Kenngröße an einer Stelle x_0 motiviert. Wir wollen uns diese Interpretation des Differentialquotienten näher ansehen.

Wenn wir eine Funktion nur in der Nähe des Punktes x_0 betrachten, so erscheint ihr Graph annähernd wie eine Gerade (☞ Abbildung 5.3). Dieser Effekt wird umso stärker, je kleiner wir den Ausschnitt des Graphen wählen. Wir können daher in diesem Bereich die eigentliche Funktion durch eine *linearen Funktion* mit Anstieg $\frac{df}{dx}$ ersetzen, ohne dabei all zu große Fehler zu machen. Wir finden daher für kleines $\Delta x = x_1 - x_0$,

$$f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

d.h., Δf ist näherungsweise eine lineare Funktion von Δx .

Die Änderungsrate der Funktion können wir daher sehen als die Änderungsrate dieser linearen Funktion. In den Wirtschaftswissenschaften wird diese lineare Funktion (in Abhängigkeit von der Art der betrachteten Funktion als *Grenzerlös*, *Grenzkosten*, *Grenznutzen*, etc. bezeichnet. Die Mathematiker sagen dazu **Differential** von f an der Stelle x_0 und schreiben dafür $df(x_0)$.

Differential

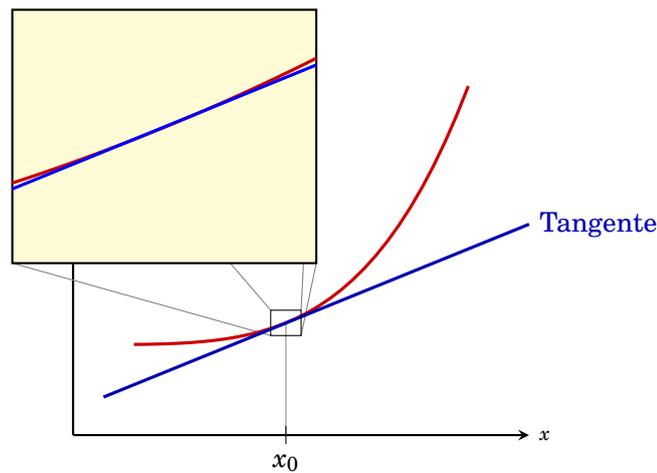


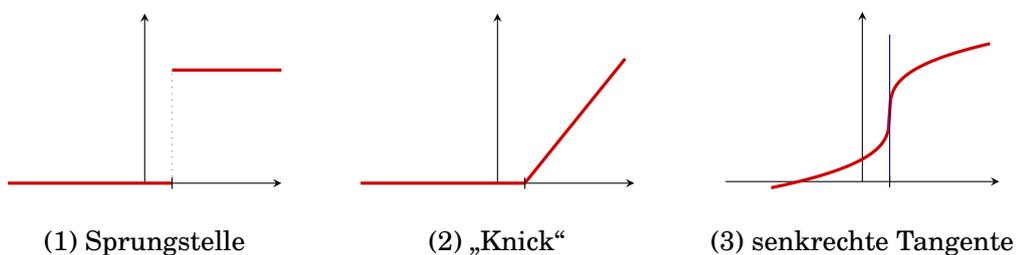
Abbildung 5.3: Interpretation des Differentialquotienten als „Grenzfunktion“

Wann existiert der Differentialquotient?

Wir haben den Differentialquotienten als Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion interpretiert. Es gibt nun Punkte, in denen es keine eindeutig bestimmte Tangente gibt. In all diesen Punkte existiert daher auch kein Differentialquotient und die Funktion ist an solchen Punkten **nicht differenzierbar**. Solche Punkte sind

- (1) *Unstetigkeitsstellen* („Sprungstellen“), und
- (2) „*Knicke*“ im Graph der Funktion, sowie
- (3) senkrechte Tangenten.

In allen anderen Punkten, in denen die Tangente existiert, ist die Funktion differenzierbar.



(1) Sprungstelle

(2) „Knick“

(3) senkrechte Tangente

Abbildung 5.4: Punkte, in denen eine Funktion nicht differenzierbar ist

Rechnerisch können wir uns von der Existenz oder Nichtexistenz des Differentialquotienten durch Berechnung des Grenzwertes in Definition 5.1 überzeugen.

Beispiel 5.1

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

ist differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. In 0 besitzt der Graph einen „Knick“, in 1 ist die Funktion nicht stetig (☞ Abb. 5.5).

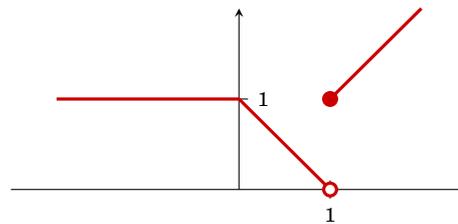


Abbildung 5.5: Die Funktion ist in 0 und 1 nicht differenzierbar.

Wir können uns auch rechnerisch davon überzeugen, dass der Differentialquotient an der Stelle $x = 0$ nicht existiert. Der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten an dieser Stelle sind verschieden:

$$\begin{aligned} \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{(1-h) - 1}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

Genauso existiert der Differentialquotient an der Stelle $x = 1$ nicht:

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-h-1}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \left(-1 - \frac{1}{h}\right) = \infty$$

Die Berechnung des Differentialquotienten

Die Berechnung erfolgt durch Einsetzen in die Definition (☞ Definition 5.1) des Differentialquotienten und Berechnen des entsprechenden Grenzwertes.

Beispiel 5.2

Gesucht ist der Differentialquotient der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 5$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=5} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot h + h^2 - 5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10+h) = 10. \end{aligned}$$

Wir können unser Beispiel auf beliebige Potenzfunktionen mit natürlichzahliger Potenz erweitern.

Tabelle 5.1: Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Beispiel 5.3

Gesucht ist der Differentialquotient der Funktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes (☞ § 2.2.4, Seite 16) finden wir

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

5.2 Die Ableitung einer Funktion

Definition 5.2 (Ableitung)

erste Ableitung

Die Funktion $f': D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x$ heißt die **erste Ableitung** der Funktion f . Die Definitionsmenge D ist die Menge aller Punkte, in denen der Differentialquotient existiert.

Bemerkung 5.2

Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist eine *Zahl*. Die Ableitung einer Funktion f in einem Intervall (a, b) ist eine Funktion.

Differenzieren

Zur Berechnung der Ableitung einer Funktion (wir sagen dazu „**Differenzieren der Funktion**“) ist es notwendig, den Differentialquotienten an jeder Stelle des Definitionsbereichs auszurechnen. In der Praxis wäre das jedoch sehr mühsam. Daher gibt es Tabellen, in denen die Ableitungen von wichtigen Funktionen aufgelistet sind (☞ Tab. 5.1).

Differentiationsregeln

Mit Hilfe von *Rechenregeln* (☞ Tab. 5.2) ist es möglich die Ableitung einer komplexen Funktion auf die Ableitungen einfacher Funktionen zurückzuführen.

Tabelle 5.2: Differentiationsregeln

Bezeichnung	Regel
	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Beispiel 5.4

Durch Anwenden der Regeln aus den Tabellen 5.1 und 5.2) erhalten wir:

$$(3x^3 + 2x - 4)' = 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 9x^2 + 2$$

$$(e^x \cdot x^2)' = (e^x)' \cdot x^2 + e^x \cdot (x^2)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$$

$$((3x^2 + 1)^2)' = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(2^x)' = \left(e^{\ln(2) \cdot x}\right)' = e^{\ln(2) \cdot x} \cdot \ln(2) = 2^x \ln(2)$$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a) \cdot x}\right)' = e^{\ln(a) \cdot x} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

$$\left(\frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^2 + 2}\right)' = \frac{(4x^3 + 8x) \cdot (x^2 + 2) - (x^4 + 4x^2 + 4) \cdot (2x)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\left(\frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^2 + 2}\right)' = \left(\frac{(x^2 + 2)^2}{x^2 + 2}\right)' = (x^2 + 2)' = 2x$$

Auch sehr komplizierte Funktionen lassen sich — die konsequente Anwendung der Differentiationsregeln vorausgesetzt — differenzieren.

Beispiel 5.5

$$\begin{aligned} & \underbrace{(x \cdot e^{-x^2} + \sin(2x^2 - 5) \cdot \ln(x^4))'}_{\text{Additionsregel}} \\ &= \underbrace{(x \cdot e^{-x^2})'}_{\text{Produktregel}} + \underbrace{(\sin(2x^2 - 5) \cdot \ln(x^4))'}_{\text{Produktregel}} \\ &= 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot \underbrace{(e^{-x^2})'}_{\text{Kettenregel}} + \underbrace{(\sin(2x^2 - 5))'}_{\text{Kettenregel}} \cdot \ln(x^4) + \sin(2x^2 - 5) \cdot \underbrace{(\ln(x^4))'}_{\text{Kettenregel}} \\ &= 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} + 4x \cos(2x^2 - 5) \cdot \ln(x^4) + \sin(2x^2 - 5) \cdot 4x^3 \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

Wir haben in Definition 5.2 die Ableitung einer Funktion eingeführt. Diese Funktion kann nun ihrerseits wieder differenzierbar sein, und wir erhalten so die Ableitung der (ersten) Ableitung der Funktion. Wir bezeichnen diese Funktion als die **zweite Ableitung** $f''(x)$ der Funktion f . Lässt sich auch diese Funktion differenzieren erhalten wir die **dritte Ableitung** $f'''(x)$, **vierte Ableitung** $f''''(x)$... **n -te Ableitung** $f^{(n)}(x)$, usw.

Beispiel 5.6

Die ersten 5 Ableitungen der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 3$ sind

$$f'(x) = (x^4 + 2x^2 + 5x - 3)' = 4x^3 + 4x + 5$$

$$f''(x) = (4x^3 + 4x + 5)' = 12x^2 + 4$$

$$f'''(x) = (12x^2 + 4)' = 24x$$

$$f''''(x) = (24x)' = 24$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

5.3 Monotonie und Konvexität

Definition 5.3 (Monotonie)

monoton
steigend

Eine Funktion f heißt **monoton steigend** in einem Intervall $[a, b]$, falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Sie heißt streng monoton steigend falls

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

monoton
fallend

Die Funktion f heißt (streng) **monoton fallend** in einem Intervall $[a, b]$, falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad [\text{bzw. } x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)]$$

In Abbildung 5.6 ist zu erkennen, dass die Steigung der Tangente an den Graphen einer monotonen Funktion entweder immer *positiv* (*steigend*) oder *negativ* (*fallend*) ist. Für *differenzierbare* Funktionen (☞ §5.1, Seite 69) erhalten wir daher folgendes Kriterium für die Monotonie von Funktionen in einem Intervall $[a, b]$:

f monoton steigend	$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$	für alle $x \in [a, b]$
f monoton fallend	$\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$	für alle $x \in [a, b]$

Für streng monotone Funktionen finden wir das (salopp formulierte) Kriterium:

f streng monoton steigend	$\Leftrightarrow f'(x) > 0$	bis auf einzelne Punkte
f streng monoton fallend	$\Leftrightarrow f'(x) < 0$	bis auf einzelne Punkte

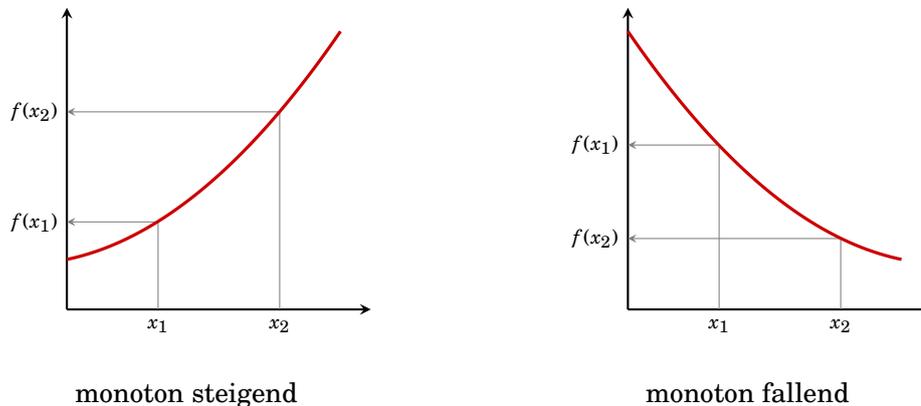


Abbildung 5.6: Monotone Funktionen

Beispiel 5.7

Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ ist auf \mathbb{R} streng monoton steigend:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 5.8

In welchem Bereich ist die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$ monoton steigend (☞ Abb. 4.2, Seite 51)?

Wir müssen dazu die Ungleichung $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ lösen (☞ §2.4, Seite 27).

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$$

f ist im Intervall $[1, \infty)$ monoton steigend.

Für stetige Funktionen, die mehr als eine Nullstelle von $f'(x)$ besitzen, eignet sich das Verfahren aus § 2.4.1 auf Seite 27; vorausgesetzt $f'(x)$ ist stetig.

Beispiel 5.9

In welchen Bereichen ist $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$ monoton steigend? Wir müssen dazu die Ungleichung

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 \geq 0$$

lösen. Dazu berechnen wir zuerst die Nullstellen von $f'(x)$,

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = 3$$

und erhalten 3 Intervalle $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$ und $[3, \infty)$. In jedem dieser Intervalle ist $f'(x)$ entweder überall ≥ 0 oder überall ≤ 0 , da sich das Vorzeichen innerhalb dieser Intervalle nicht ändern kann. Wir können das Vorzeichen durch Einsetzen "geeigneter" Punkte bestimmen:

$$\begin{aligned} (-\infty, 1]: \quad & f'(0) = 3 > 0 \\ [1, 3]: \quad & f'(2) = -1 < 0 \\ [3, \infty): \quad & f'(4) = 3 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist daher monoton steigend in $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

Bemerkung 5.3

Punkte, in denen $f'(x) = 0$ wird, heißen *kritische Punkte* von f (☞ § 5.4.1, Seite 81).

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die **Krümmung**.

Definition 5.4 (Krümmung)

konvex

Eine Funktion f heißt **konvex** in einem Intervall $[a, b]$, falls der Graph der Funktion immer unter der Sekante (☞ Abb. 5.7) liegt, in Formeln: falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und für alle $h \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \leq (1-h)f(x_1) + hf(x_2).$$

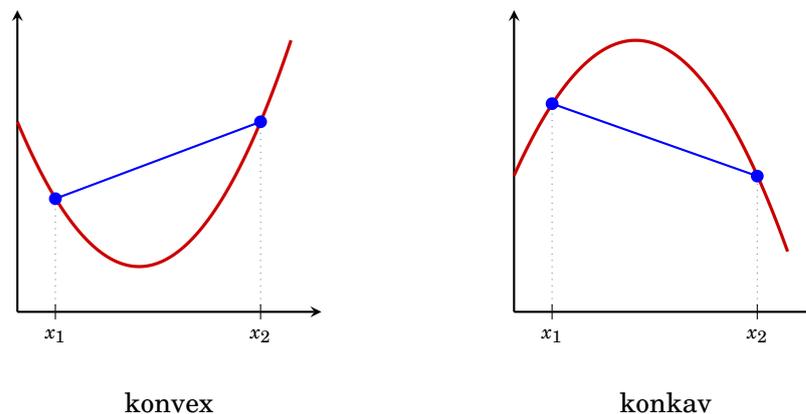
Sie heißt *streng konvex* falls

$$f((1-h)x_1 + hx_2) < (1-h)f(x_1) + hf(x_2) \quad \text{für alle } h \in (0, 1).$$

konkav

Die Funktion heißt **konkav**, falls

$$f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2).$$



konvex

konkav

Abbildung 5.7: Konvexe und konkave Funktion

Bemerkung 5.4

Abbildung 5.8 illustriert die Formel $f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$: Der Term $(1-h)x_1 + hx_2$ gibt den Punkt auf der x -Achse an, der die Strecke zwischen x_1 und x_2 im Verhältnis $(1-h)$ zu h teilt. Die linke Seite der Ungleichung, $f((1-h)x_1 + hx_2)$, ist dann der Funktionswert an diesem Punkt. Die rechte Seite der Ungleichung, $(1-h)f(x_1) + hf(x_2)$, entspricht dem Punkt auf der y -Achse, der die Strecke zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ im Verhältnis $(1-h)$ zu h teilt. Es entspricht daher dem Punkt auf der Sekante, der dem Punkt $(1-h)x_1 + hx_2$ entspricht. Die Ungleichung beschreibt daher formal, dass der Funktionsgraph immer oberhalb der Sekante liegt.

Beim Betrachten von Abbildung 5.7 fällt auf, dass die Steigung der Tangente von konvexen Funktionen immer kleiner wird, je größer x wird. Mit anderen Worten, die erste Ableitungsfunktion ist monoton fallend. Für *differenzierbare* Funktionen erhalten wir daher folgendes Kriterium für die Krümmung von Funktionen in einem Intervall $[a, b]$:

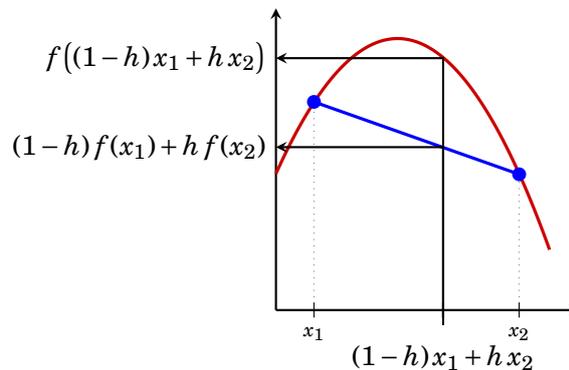


Abbildung 5.8: Illustration zur Formel $f((1-h)x_1 + hx_2) \geq (1-h)f(x_1) + hf(x_2)$

f konvex	\Leftrightarrow	$f''(x) \geq 0$	für alle $x \in [a, b]$
f konkav	\Leftrightarrow	$f''(x) \leq 0$	für alle $x \in [a, b]$

bzw. (wieder salopp formuliert)

f streng konvex	\Leftrightarrow	$f''(x) > 0$	bis auf einzelne Punkte
f streng konkav	\Leftrightarrow	$f''(x) < 0$	bis auf einzelne Punkte

Beispiel 5.10

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist streng konvex (☞ Abb. 4.7 (c), Seite 56), die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ist streng konkav (☞ Abb. 4.7 (d)):

$$(e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$(\ln(x))'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

Beispiel 5.11

Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$ ist streng konvex:

$$(x - \ln(x))'' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

Wie im Beispiel 5.9 können wir auch zum Feststellen der Bereiche, in denen eine Funktion konvex oder konkav ist, das Verfahren aus § 2.4.1 auf Seite 27; vorausgesetzt $f''(x)$ ist stetig.

Beispiel 5.12

In welchem Bereich ist $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$ konkav? Wir müssen dazu die Ungleichung

$$f''(x) = 12x - 24 \leq 0$$

lösen. Dazu berechnen wir zuerst die Nullstellen von $f''(x)$,

$$f''(x) = 12x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

und erhalten 2 Intervalle $(-\infty, 2]$ und $[2, \infty)$. In jedem dieser Intervalle ist $f''(x)$ entweder überall ≥ 0 oder überall ≤ 0 , da sich das Vorzeichen innerhalb dieser Intervalle nicht ändern kann. Wir können das Vorzeichen durch Einsetzen "geeigneter" Punkte bestimmen:

$$\begin{aligned} (-\infty, 2]: \quad f''(0) &= -24 < 0 \\ [2, \infty): \quad f''(4) &= 24 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist daher konkav in $(-\infty, 2]$.

Bemerkung 5.5

Punkte, in denen $f''(x)$ das Vorzeichen ändert, heißen *Wendepunkte* von f .

5.4 Lokale und globale Extremwerte

Bei der Untersuchung einer Funktion will man oft Punkte finden, an denen die Funktion einen größtmöglichen oder kleinstmöglichen Wert annimmt. (Denken Sie etwa an eine Gewinnfunktion oder eine Kostenfunktion.) Solche Punkte werden als **Extremwerte** (oder **Extrema**, **Optima**) bezeichnet. Wir unterscheiden dabei zwischen Punkten, in denen diese Extremwerteigenschaft im gesamten Definitionsbereich gilt (**globale Extrema**), und solchen Punkten, wo diese Eigenschaft zumindest in einem kleinen Bereich gilt (**lokale Extrema**).

Definition 5.5 (globales Extremum)

Ein Punkt $x^* \in D_f$ heißt **globales Maximum** (absolutes Maximum) der Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x) \leq f(x^*)$.

x^* heißt **globales Minimum** (absolutes Minimum), falls $f(x) \geq f(x^*)$.

Definition 5.6 (lokales Extremum)

Ein Punkt $x_0 \in D_f$ heißt **lokales Maximum** (relatives Maximum) der Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle x in einem (hinreichend kleinen) Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.

x_0 heißt **lokales Minimum** (relatives Minimum), falls $f(x) \geq f(x_0)$.

Extremwert
Extrema
globales
Extremum
lokales
Extremum
globales
Maximum
globales
Minimum

lokales
Maximum

lokales
Minimum

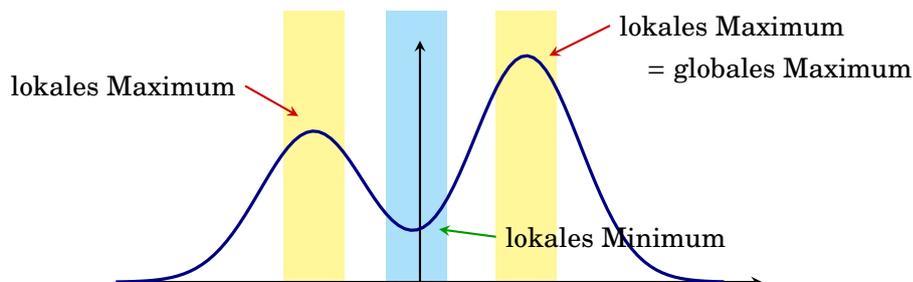


Abbildung 5.9: Lokale und globale Extrema

Jedes *globale* Extremum ist auch ein *lokales* Extremum. Umgekehrt kann ein lokales Minimum ein globales Minimum sein, muss aber nicht.

Es sei an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, dass man aus einem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem machen kann, und umgekehrt (☞ Abb. 5.10):

Der Punkt x_0 ist ein (lokales oder globales) Minimum von $f(x)$,
genau dann wenn x_0 ein (lokales bzw. globales) Maximum von $-f(x)$ ist.

Aus diesem Grund wird im Falle von komplexeren Optimierungsproblem oft nur das Maximierungs- oder Minimierungsproblem ausführlich behandelt.

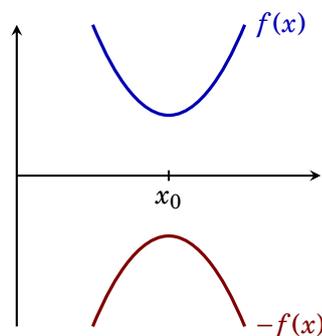


Abbildung 5.10: x_0 ist ein Minimum von f und ein Maximum von $-f(x)$.

5.4.1 Berechnung der lokalen Extrema

Beim Betrachten von Abbildung 5.11 auf Seite 82 fällt auf, dass wir zwei Fälle von lokalen Extrema unterscheiden müssen:

- (1) Lokale Extrema am Rand eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$.
- (2) Lokale Extrema im Inneren des Intervalls, oder $D_f = \mathbb{R}$.

Fall (1):

- a ist ein lokales Minimum von f im Intervall $[a, b]$, falls $f'(a) > 0$ oder $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$.
- b ist ein lokales Minimum von f im Intervall $[a, b]$, falls $f'(b) < 0$ oder $f'(b) = 0$ und $f''(b) > 0$.

Fall (2): x_0 ist ein Extremum von f in \mathbb{R} oder im Inneren eines Intervalls $[a, b]$.

Es fällt hier auf, dass die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion in Abbildung 5.11 an den inneren lokalen Extrema x_1 und x_2 gleich 0 ist, und dass die Funktion in der Nähe dieser lokalen Extrema *konkav* (x_1) bzw. *konvex* (x_2) ist (☞ §5.3).

Ein Punkt, im dem $f'(x_0) = 0$ wird, heißt **stationärer Punkt** (oder auch **sin-**

stationärer
Punkt

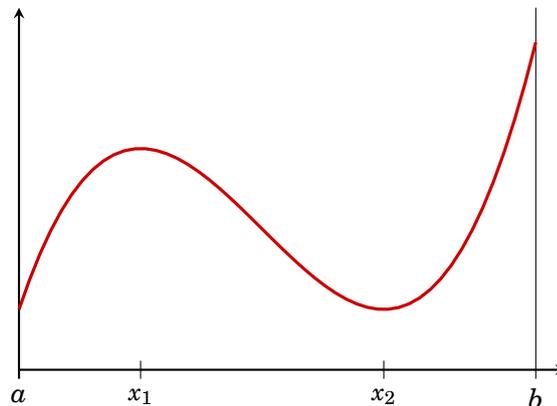


Abbildung 5.11: Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ mit $D_f = [a, b] = [0; 8, 5]$

gulärer Punkt, kritischer Punkt) der Funktion f . Alle lokalen Extrema im inneren des Definitionsbereichs (d.s. alle die nicht am Rand liegen) sind somit stationäre Punkte.

Für *differenzierbare* Funktionen f (☞ §5.1, Seite 69) gilt:

Ein Punkt x_0 ist genau dann ein *lokales* Minimum (Maximum), falls

- (1) $f'(x_0) = 0$ und
- (2) f in einem „geeigneten“ Intervall um x_0 *konvex* (bzw. *konkav*) ist.

Wir erhalten daher für *differenzierbare* Funktionen die folgende Vorgangsweise zur Berechnung der *lokalen Extrema* im Inneren des Definitionsbereichs:

- (1) Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.
- (2) Suche alle Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$. (Stationäre Punkte)
- (3) $f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i$ ist ein *lokales Minimum*
 $f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i$ ist ein *lokales Maximum*
 $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

Beispiel 5.13

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ in \mathbb{R} (☞ Abb. 5.11).

- (1) $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$, $f''(x) = \frac{1}{2}x - 2$.
- (2) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.
- (3) $f''(2) = -1 \Rightarrow x_1$ ist ein lokales Maximum.
 $f''(6) = 1 \Rightarrow x_2$ ist ein lokales Minimum.

$x_1 = 2$ ist ein lokales Maximum und $x_2 = 6$ ist ein lokales Minimum von f .

Im Fall $f''(x_0) = 0$ müssen weitere Untersuchungen angestellt werden, um festzustellen, ob die Funktion in der Nähe von x_i *konvex* (\Rightarrow lokales Minimum), *konkav* (\Rightarrow lokales Maximum) oder keines von beiden (\Rightarrow Sattelpunkt) ist.

Beispiel 5.14

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^4$.

- (1) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.
- (2) $4x^3 = 0$ hat die Lösung $x_1 = 0$.
- (3) $f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

Aber: $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ist konvex und x_1 ist ein lokales Minimum.

Bemerkung 5.6

Man findet gelegentlich die „Schlussfolgerung“ $f''(x) = 0 \Rightarrow$ „ x ist Sattelpunkt“. Das ist aber im Allgemeinen **falsch!** (☹️ Beispiel 5.14)



Im folgenden sei noch die Vorgangsweise demonstriert, wenn der Definitionsbereich der Funktion ein abgeschlossenes oder halboffenes Intervall ist.

Beispiel 5.15

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ im Intervall $[0; 8,5]$ (☹️ Abb. 5.11). Aus Beispiel 5.13 wissen wir bereits, dass $x_1 = 2$ ein lokales Maximum und $x_2 = 6$ ein lokales Minimum ist.

Da $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$, finden wir an den beiden Rändern $f'(0) = 3 > 0$ und $f'(8,5) = 4,0625 > 0$. Daher ist $a = 0$ ein lokales Minimum und $b = 8,5$ ein lokales Maximum von f .

Bemerkung 5.7

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Funktion $f(x) = x$ im offenen Intervall $(0, 1)$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt. Die möglichen Kandidaten $a = 1$ und $b = 1$ gehören nicht zum Definitionsbereich, vgl. Definition 5.6 auf Seite 80.

Bemerkung 5.8

An Beispiel der lokalen Extrema in \mathbb{R} sei kurz zwei wichtige Begriffe aus der mathematischen Argumentation erläutert.

Die Bedingung „ $f'(x_0) = 0$ “ ist eine sogenannte *notwendige Bedingung* dafür, dass x_0 ein lokales Minimum ist. Jedes lokale Minimum muss diese Eigenschaft haben. Die Umkehrung ist allerdings falsch! Nicht jeder stationäre Punkt ist ein lokales Extremum. 0 ist kein Extremum von $f(x) = x^3$, aber $f'(0) = 0$. Die stationären Punkte liefern uns daher nur die Kandidaten für lokale Minima.

Andererseits ist die Bedingung „ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ “ eine sogenannte *hinreichende Bedingung*. Wenn x_0 diese Bedingung erfüllt ist, dass dann ist das hinreichend (ausreichend) um daraus auf ein lokales Minimum in x_0 schließen zu können. Wie Beispiel 5.14 zeigt, gibt es aber auch lokale Minima, die diese Bedingung nicht erfüllen. Falls die hinreichende Bedingung nicht erfüllt ist, so können wir daraus gar nichts schließen (außer, dass wir uns noch nach anderen mathematischen Werkzeugen umsehen müssen).

5.4.2 Berechnung der globalen Extrema

Das *globale* Minimum ist das *kleinste* aller lokalen Minima. Für *differenzierbare* Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ können wir daher aus dem in § 5.4.1 beschriebenen Verfahren die folgende Vorgangsweise zur Bestimmung der *globalen Extrema* herleiten:

- (1) Berechne $f'(x)$
- (2) Suche alle Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$.

- (3) Berechne alle $f(x_i)$ sowie $f(a)$ und $f(b)$.
- (4) Der größte dieser Werte ist das *globale Maximum*, der kleinste dieser Werte ist das *globale Minimum*.

Bemerkung 5.9

Es ist bei diesem Verfahren *nicht* notwendig $f''(x_i)$ zu berechnen.

Beispiel 5.16

Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion $f: [0,5;8,5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ (vgl. Beispiele 5.13 und 5.15, \Leftrightarrow Abb. 5.11).

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

(2) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

(3) $f(0,5) = 2,260$

$f(2) = 3,667$

$f(6) = 1,000 \Rightarrow$ globales Minimum

$f(8,5) = 5,427 \Rightarrow$ globales Maximum

- (4) $x_2 = 6$ ist ein globales Minimum und $b = 8,5$ ist ein globales Maximum von f .

Bemerkung 5.10

Die globalen Extremwerte sind nicht immer eindeutig bestimmt. So hat etwa die Funktion $f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 2x^2$ drei globale Maxima an den Stellen $-2, 0$ und 2 , und zwei globale Minima an den Stellen -1 und 1 (\Leftrightarrow Übungsbeispiel 124).

Im Falle eines *unbeschränkten*, (z.B. \mathbb{R}) oder offenen (z.B. $(0, 1)$) Definitionsbereichs, berechnen wir anstatt der Funktionswerte an den Randpunkten $f(a)$ und $f(b)$ die entsprechenden Grenzwerte, (z.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$). Die Vorgangsweise ist analog zu oben. Das globale Maximum (Minimum) existiert aber in diesem Fall nur, wenn der größte (kleinste) Wert an einem lokalen Extremum angenommen wird, und nicht etwa in a oder ∞ (sie sind nicht Elemente der Definitionsmenge).

Beispiel 5.17

Gesucht sind die globalen Extrema der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$.

1. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

2. $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$ besitzt die einzige Lösung $x_1 = 0$.

3. $f(0) = 1 \Rightarrow$ globales Maximum

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ das globale Minimum existiert nicht

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

4. Die Funktion besitzt das globale Maximum $x_1 = 0$.

In vielen ökonomischen Modellen werden konkave oder konvexe Funktionen (also Funktionen, die im gesamten Definitionsbereich entweder konkav oder konvex sind) verwendet. Man kann dann folgende hinreichende Bedingung zum Bestimmen von globalen Extrema benutzen:

Falls x^* ein stationärer Punkt einer *konvexen* (konkaven) Funktion f ist, dann ist x^* ein *globales Minimum* (bzw. globales Maximum) von f .

Falls f *streng konvex* (streng konkav) ist, dann ist das Extremum sogar eindeutig bestimmt (d.h., nur x^* ist ein globales Extremum).

Beispiel 5.18

Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x - \ln(x)$ ist streng konvex (☞ Beispiel 5.11 und Abb. 4.2 auf Seite 51). Da $x_1 = 1$ ein stationärer Punkt von $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0$ ist, ist $x_1 = 1$ das eindeutig bestimmte globale Minimum von f .

Außerdem besitzt f kein Maximum.

— Übungen

91. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)^3$. Berechnen Sie die Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ für $\Delta x = 3, 1, -1, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$. Bestimmen Sie auch den Differentialquotienten durch Grenzübergang. Zeichnen Sie im Graphen der Funktion die entsprechenden Sekanten und die Tangente ein.

92. Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderung der folgenden Funktionen in den angegebenen Intervallen:

(a) $h(x) = ax^2 + bx + c$ in $[x, x+h]$

(b) $g(x) = \frac{x^2-a}{x-3}$ in $[2; 2,5]$

(c) $G(t) = t^2 + t$ in $[a, a+h]$

(d) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ in $[x, x+h]$

93. Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Sind diese Funktionen differenzierbar, bzw. wo sind sie differenzierbar? Sind die Funktionen stetig?

(a) $f(x) = 2x + 2$

(b) $f(x) = x \mapsto 3$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \leq -1 \\ x & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{für } x \leq -1 \\ x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

94. Zwischen 1950 und 1970 wuchs das BIP (BruttoInlandsProdukt, auch Bruttosozialprodukt) eines Landes nach der Formel $5 + 0,1x + 0,01x^2$, (1950: $x = 0$. x sind die Jahre seit 1950.). Wie groß war das durchschnittliche Wachstum zwischen 1955 und 1960? Wie hoch war die (momentane) Zuwachsrate 1958?

95. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen durch Grenzübergang:

(a) $f(x) = 2 - 5x$

(b) $f(t) = \frac{1}{t+1}$

(c) $g(y) = \frac{1}{y^2}$

(d) $u = \frac{1}{2t+1}$

(e) $x = \frac{y+1}{y^2}$

(f) $g(x) = (x+1)^2$

96. Suchen Sie jene Werte von x , wo f nicht differenzierbar ist.

(a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

(b) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

97. Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x < -1 \\ ax^2 + bx + c, & \text{wenn } -1 \leq x \leq 1 \\ -2x, & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Werte von a , b und c , sodass f stetig und differenzierbar ist.

98. Ein Energieversorgungsunternehmen verlangt 10 Geldeinheiten für jede Verbrauchseinheit bei einem Monatsverbrauch bis zu 50 Verbrauchseinheiten. Für einen darüberhinausgehenden Verbrauch verlangt das Unternehmen 3 Geldeinheiten pro Verbrauchseinheit (über 50). Man diskutiere Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Kostenfunktion des Verbrauchers.

99. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

- (a) $f(x) = 9x^3 - 12x^{\frac{1}{2}}$ (b) $h(x) = 5 - 2x^2 + x^4$ (c) $f(x) = 3x^4 + (2x - 1)^2$
 (d) $f(y) = \frac{2y^2 + 3y - 7}{y}$ (e) $g(t) = \frac{t + \frac{3}{t}}{\sqrt{t}}$ (f) $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$
 (g) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{0,6}}$ (h) $f(x) = x^{-0,4} - x^{0,4}$

100. Differenzieren Sie:

- (a) $3x^2 + 5 \cos(x) + 1$ (b) $(2x + 1)x^2$ (c) $x \ln(x)$
 (d) $(2x + 1)x^{-2}$ (e) 2^x (f) $\ln(\exp(x))$
 (g) $(3x - 1)^2$ (h) $\sin(3x^2)$

101. Differenzieren Sie:

- (a) $\frac{(2x + 1)(x^2 - 1)}{x + 1}$ (b) $\frac{3x^2 - 1}{x + 1}$
 (c) $2e^{3x+1}(5x^2 + 1)^2 + \frac{(x + 1)^3}{x - 1} - 2x$

102. Differenzieren Sie:

- (a) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ (b) $g(x) = \frac{3 - x}{x^2 - 3}$ (c) $y = \frac{t^2 - 7t}{t - 5}$
 (d) $y = \frac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1}$ (e) $x = \frac{\sqrt{u} + 1}{\sqrt{u} - 1}$ (f) $t = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

103. Differenzieren Sie:

- (a) $y = (3x + 5)^7$ (b) $y = \sqrt{5 - 2t}$ (c) $h(t) = \sqrt{t^2 + a^2}$
 (d) $x = (y^3 + 7)^6$ (e) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^4}$ (f) $g(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$
 (g) $u = (2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ (h) $F(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$ (i) $v = (u^2 + 1)^3(2u + 1)$

104. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ (b) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ (c) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
 (d) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ (e) $f(x) = e^{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ (f) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$
 (g) $f(x) = x(\ln(x))^2$ (h) $f(x) = \ln(e^x - 1)$ (i) $f(x) = e^{(\ln(x))^2}$
 (j) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ (k) $f(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ (l) $f(x) = \log_a(x)$
 (m) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (n) $f(x) = a^x$ (o) $f(x) = x\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3}$

105. Bestimmen Sie die Tangente an $f(x)$ in $x = x_0$:

- (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $x_0 = 0$ (b) $f(x) = x \ln(x)$ $x_0 = 1$
 (c) $f(x) = e^{-x}$ $x_0 = 0$ (d) $f(x) = e^{-x^2}$ $x_0 = 0$
 (e) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $x_0 = 1$ (f) $f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$ $x_0 = -1$

106. Berechnen Sie die lineare Funktion, die $f(x)$ in $x = x_0$ berührt:

- (a) $f(x) = \ln(x+1)$ $x_0 = 0$ (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $x_0 = 1$
 (c) $f(x) = (x-1)^2 + 2(x+1)$ $x_0 = -1$ (d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $x_0 = 2$
 (e) $f(x) = \ln(1+x^2)$ $x_0 = 0$ (f) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ $x_0 = -1$

107. Berechnen Sie die lineare Funktion, die $f(x)$ in $x = x_0$ berührt:

- (a) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ $x_0 = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x_0 = 1$
 (c) $f(x) = x(1-x)$ $x_0 = \frac{1}{2}$ (d) $f(x) = x(1-x)$ $x_0 = 0$
 (e) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ $x_0 = 0$ (f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$ $x_0 = 0$

108. Es seien $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = e^{2x} + 1$ und $h(x) = (f \circ g)(x)$. Wie lautet $h'(x)$?

109. Bestimmen Sie die zweiten Ableitungen:

- (a) $y = \ln(\ln(x))$ (b) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$ (c) $y = \ln((x+1)(x+2))$
 (d) $y = x3^{\frac{1}{x}}$ (e) $y = (\frac{x^2}{2} + x)e^{-x}$ (f) $y = e^{-x^2}$

110. Bilden Sie die Ableitungen

- (a) $f'''(x)$ für $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
 (b) $f''(x)$ für $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
 (c) $f''(x)$ für $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$
 (d) $f'''(x)$ für $f(x) = x \ln(x)$
 (e) $f'''(x)$ für $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$
 (f) $f''(x)$ für $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \ln(x)$

111. Bilden Sie die Ableitungen

- (a) $f''(x)$ für $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
 (b) $f'''(x)$ für $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
 (c) $f''(x)$ für $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$
 (d) $f''(x)$ für $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}$
 (e) $f''(x)$ für $f(x) = (x-1)\left(\frac{1}{x+1} - x^2\right)$
 (f) $f'''(x)$ für $f(x) = (x-2)(x^2+3)$
 (g) $f''(x)$ für $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

112. Bestimmen Sie den marginalen Erlös für folgende Erlösfunktionen:

- (a) $R(x) = x - 0,01x^2$ (b) $R(x) = 0,1x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{\frac{5}{2}}$
 (c) $R(x) = 5x - 0,01x^{\frac{5}{2}}$ (d) $R(x) = 100x - \ln(5)x^3(1+\sqrt{x})$

(Hinweis: Der marginale Erlös (auch: *Grenzerlös*) ist die erste Ableitungen $R'(x)$ der Erlösfunktion $R(x)$.)

113. Bestimmen Sie die marginalen Kosten und die Änderungsrate der marginalen Kosten für folgende Kostenfunktionen:

(a) $C(x) = 500 + 30x - 0,1x^2 + 0,002x^3$

(b) $C(x) = 500 + 20x - 2x \ln(x) + 0,01x^2$

Wie lautet die zweite Ableitung der durchschnittlichen Kosten?

(Hinweis: Die marginalen Kosten (auch: *Grenzkosten*) sind die erste Ableitung $C'(x)$ der Kostenfunktion $C(x)$.)

114. Bestimmen Sie die mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung (d.h. Konkavität oder Konvexität) folgender Funktionen. Welche Fälle sind möglich?

(a) $\exp(x)$

(b) $\ln(x)$

(c) $\log_{10}(x)$

(d) x^α für $x > 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

115. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die folgenden Funktionen monoton steigend bzw. fallend und konkav bzw. konvex ist.

(a) $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 24x^2 + 8$

(b) $g(x) = \frac{x-3}{x^2}$

116. In welchem Bereich ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 19$ monoton steigend bzw. fallend? In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

117. Für welche Werte von x sind die folgenden Funktionen wachsend, fallend, konkav oder konvex?

(a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$

(b) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^4$

(c) $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$

(d) $f(x) = -2x^2 + 9x - 4$

(e) $f(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

(f) $f(x) = x e^{x^2}$

118. Die Funktion

$$f(x) = b x^{1-a} \quad 0 < a < 1, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine *Produktionsfunktion*, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

(a) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.

(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion streng monoton steigend und streng konkav ist.

(c) Wie kann man diese beiden Eigenschaften interpretieren?

119. Die Funktion

$$f(x) = b \ln(ax + 1) \quad a, b > 0, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine *Nutzenfunktion*. Konsumenten haben einen Nutzen $f(x)$, wenn sie x Einheiten eines Gutes konsumieren.

(a) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.

(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion streng monoton steigend und streng konkav ist.

(c) Wie kann man diese beiden Eigenschaften interpretieren?

120. Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und stellen Sie fest, ob es sich um lokale Extremwerte handelt.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = 3 - 2x - 4x^2 & \text{(b)} f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 & \text{(c)} f(x) = x^2 e^{3x} \\ \text{(d)} f(x) = 2x^2 - \ln(x) & \text{(e)} f(x) = \sqrt{|x|} & \text{(f)} f(x) = x^{\frac{2}{5}}(1-x)^2 \end{array}$$

121. Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktionen

$$\text{(a)} f(x) = (x-3)^6 \quad \text{(b)} g(x) = \frac{x^2+1}{x} \quad \text{(c)} h(x) = e^{-x^2}$$

122. Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktionen

$$\begin{array}{l} \text{(a)} f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + x \\ \text{(b)} f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} - x \\ \text{(c)} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x} + 2x \\ \text{(d)} f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x) \end{array}$$

123. Berechnen Sie die globale Maxima und Minima der Funktionen

$$\begin{array}{l} \text{(a)} f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{5}{4}x^2 + 4x - \frac{1}{2} \text{ im Intervall } [1, 12] \\ \text{(b)} f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2 \text{ im Intervall } [-2, 6] \\ \text{(c)} f(x) = -\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} + 20 \text{ in } \mathbb{R} \end{array}$$

124. Berechnen Sie die globalen Extremwerte der Funktion

$$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 2x^2$$

125. Gegeben sei die Funktion f durch $f(x) = \ln(1+(x-1)^2)$. Bestimmen Sie die Extremwerte im Intervall $[0, 3]$. Ist $f(x)$ in diesem Intervall konvex oder konkav?

126. Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der folgenden Funktionen in den gegebenen Intervallen.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = x(x-1) & x \in [-1, 2] \\ \text{(b)} f(x) = x^3 + 7x & x \in [-3, 4] \\ \text{(c)} f(x) = \frac{1}{x(2-x)} & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ \text{(d)} f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-x}} & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \text{(e)} f(x) = \frac{x-2}{x\sqrt{4-x}} & x \in \left[\frac{1}{4}, 2\right] \end{array}$$

127. Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der folgenden Funktionen in den gegebenen Intervallen.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = x \ln(x) - x & x \in [0, 3] \\ \text{(b)} f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} & x \in [0, 3] \\ \text{(c)} f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} & x \in [0, 2] \\ \text{(d)} f(x) = \ln(x^2 - 7x + 13) & x \in [1, 5] \\ \text{(e)} f(x) = (x+1) \ln(x) - x & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \end{array}$$

- 128.** Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion setzen sich aus fixen Kosten von 100 Geldeinheiten und variablen Kosten von fünf Geldeinheiten pro produzierter Einheit x zusammen. Der Erlös pro Einheit hängt von der verkauften Menge ab. Für Mengen größer als 0 und kleiner als 5001 Stück ist er durch folgende Funktion gegeben: $P(x) = 9 - \ln(x)$. Berechnen Sie die Stückzahl x , die den Gewinn $xP(x) - K(x)$ maximiert ($x \in [1, 5000]$). Handelt es sich dabei um ein globales Maximum?

- 129.** Der Gewinn eines Unternehmers für gegebene Preise p und einen Lohn w ist

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$p \cdot f(x)$ gibt an, wieviel der Unternehmer aus dem Verkauf der Güter zum Preis p einnimmt. $w \cdot x$ gibt an, wieviel der Unternehmer an Löhnen zahlen muss.

Sei $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ die Produktionsfunktion aus Beispiel 118 mit $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.

- Zeichnen Sie $\pi(x)$ und $\pi'(x)$ für $p = 1$ und $w = 1$.
- Lesen Sie aus der Zeichnung ab, wieviel der Unternehmer produzieren muss, um seinen Gewinn $\pi(x)$ zu maximieren.
- Lösen sie das Optimierungsproblem auch ohne Zeichnung.
- Was passiert, wenn der Lohn auf $w = 2$ verdoppelt wird? (Zeichnung, Maximumberechnung)

Stammfunktion und Integral

Doch eben aus diesem Verfahren, aus dieser willkürlichen
Zergliederung einer fortdauernden Bewegung in abgerissene
Einzelteile entspringen die meisten aller menschlichen Irrtümer.

Krieg und Frieden

LEO N. TOLSTOI (1817–1875)

6.1 Was ist eine Stammfunktion?

Definition 6.1 (Stammfunktion)

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Stammfunktion

Das Auffinden von Stammfunktion stellt die umgekehrte Operation zum Differenzieren dar. Es gibt jedoch — im Gegensatz zum Differenzieren — kein allgemein anwendbares Verfahren, das Stammfunktion liefert. Wir sind daher auf folgende Vorgangsweise angewiesen:

Vermuten und Verifizieren

Beispiel 6.1

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

Vermuten: $F(x) = x(\ln(x) - 1)$

Verifizieren: $F'(x) = (x(\ln(x) - 1))' = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x)$

Wir hätten in Beispiel 6.1 auch $F(x) = x(\ln(x) - 1) + 5$ schreiben können, oder allgemeiner $F(x) = x(\ln(x) - 1) + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl sein kann. Jedesmal erhalten wir eine Stammfunktion von $\ln(x)$.

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\int f(x) dx + c$$

Tabelle 6.1: Grundintegrale

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
0	c
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Tabelle 6.2: Integrationsverfahren (Teil 1)

Bezeichnung	Verfahren
Summenregel	$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$
Partielles Integrieren	$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$
Substitution	$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(z) dz$ mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x) dx$

unbestimmtes
Integral
Integrations-
konstante

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Das Suchen der Stammfunktion heißt daher auch **Integrieren** der Funktion f . Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine „Kochrezepte“, sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann.

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen** (↔ Tab. 6.1). Man erhält Tabelle 6.1 leicht aus Tabelle 5.1 auf Seite 74 in dem man die beiden Spalten vertauscht.

Zum Auffinden von Stammfunktionen komplexerer Funktionen stehen eine Reihe von sogenannten *Integrationsverfahren* zur Verfügung. Diese erlauben es uns, die Stammfunktionen komplizierterer Funktionen auf Grundintegrale zurückzuführen. Tabelle 6.2 listet die drei wichtigsten Verfahren auf.

Beispiel 6.2

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 5$.
Mittels *Summenregel* erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int 4x^3 - x^2 + 3x - 5 dx \\
 &= 4 \int x^3 dx - \int x^2 dx + 3 \int x dx - 5 \int dx \\
 &= 4 \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + 3 \frac{1}{2} x^2 - 5x + c \\
 &= x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 5x + c
 \end{aligned}$$

Beispiel 6.3

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.

Partielles Integrieren ergibt

$$\int \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_f \cdot \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$f = x \quad \Rightarrow \quad f' = 1$$

$$g' = e^x \quad \Rightarrow \quad g = e^x$$

Beispiel 6.4

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

Durch *Substitution* erhalten wir

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} dx = \int \exp(z) dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad dz = g'(x) dx = 2x dx$$

Es kann auch sein, dass diese Integrationsverfahren mehrmals angewendet werden müssen.

Beispiel 6.5

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cdot e^x$. *Partielles Integrieren*:

$$\int \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x^2}_f \cdot \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g dx$$

Durch nochmaliges *partielles Integrieren* erhalten wir (☞ Beispiel 6.3)

$$\int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g dx = 2(x \cdot e^x - e^x) + c$$

und somit insgesamt

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + c$$

Bemerkung 6.1

Es sei nochmals erwähnt, dass es für das Suchen von Stammfunktionen keine „Kochrezepte“ gibt. Welches Integrationsverfahren zum Ziel führt, erkennt man oft erst am Ziel. Es erfordert daher einige Übung, diese „Werkzeuge“ zu verwenden.

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen. Sie können daher auch nicht durch die Integrationsverfahren aus Tabelle 6.2 in Grundintegrale überführt werden.

Beispiel 6.6

Die Stammfunktion von $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken¹.

¹Diese Funktion ist aber trotzdem in der Statistik von großer Bedeutung.

6.2 Was ist ein Integral?

Integral

Wir suchen eine Funktion, die uns den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse innerhalb eines Intervalls $[a, b]$ wiedergibt. Die Fläche unterhalb der x -Achse wird dabei negativ gezählt. Diese Funktion heißt das **Integral**

$$\int_a^b f(x) dx$$

der Funktion f .

Das Integral kann durch Approximation der Funktion f durch Treppenfunktionen näherungsweise berechnet werden (→ Abb. 6.1). Die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke lassen sich gemäß der bekannten Formel *Grundlinie* \times *Höhe* leicht berechnen. Die Gesamtfläche unter der Treppenfunktion ergibt sich dann als Summe dieser Teilflächen. Diese Approximation wird umso genauer sein, je mehr Rechtecke verwendet werden. Im Grenzübergang zu unendlich vielen Rechtecken wird der Fehler dann 0. Tatsächlich ist das sogenannte *Riemann-Integral* auf diese Weise definiert.

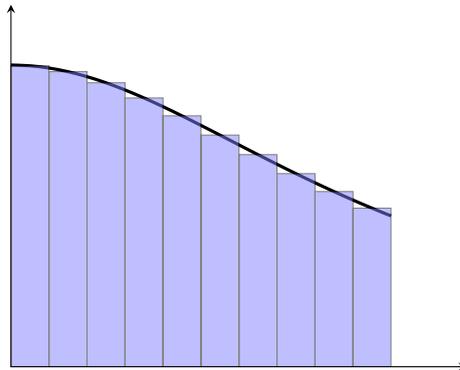


Abbildung 6.1: Approximation des Integrals durch eine Treppenfunktion

Für praktische Zwecke ist dieser Zugang jedoch nicht geeignet. Für *stetige* Funktionen gibt es jedoch folgenden wichtigen Zusammenhang mit Stammfunktionen:

Sei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt für das *Integral*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel 6.7

Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

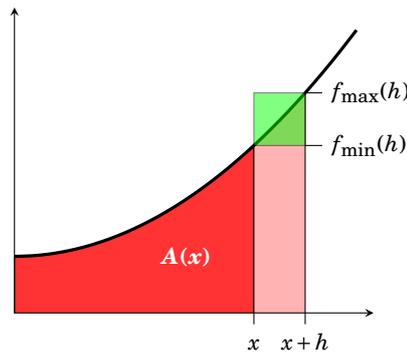
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \frac{1}{3}$$

Bemerkung 6.2

Dieser Zusammenhang zwischen *Stammfunktion* (Umkehrung des Differenzierens) und *Integral* (Fläche unter einer dem Graphen) ist eine Konsequenz des sogenannten *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*. Er besagt, dass wir zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen genauso vorgehen dürfen, wie wir es in Schule gelernt haben.

Dieser Zusammenhang kann folgendermaßen plausibel gemacht werden:

Wir bezeichnen mit $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse zwischen 0 und x .



Die Fläche zwischen x und $x+h$ unter dem Graphen ist gerade $A(x+h) - A(x)$ und kann durch $f_{\min} \cdot h$ und $f_{\max} \cdot h$ abgeschätzt werden:

$$f_{\min}(h) \cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq f_{\max}(h) \cdot h$$

Dividieren durch h ergibt

$$f_{\min}(h) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f_{\max}(h)$$

Durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ erhalten wir wegen der Stetigkeit von f ,

$$\underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} f_{\min}(h)}_{=f(x)} \leq \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}}_{=A'(x)} \leq \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} f_{\max}(h)}_{=f(x)}$$

und somit

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Bemerkung 6.3

Dieser Satz ist der Grund, warum die Stammfunktion auch als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet wird. Das Integral selbst heißt dann das *bestimmte Integral*.

Wir können die Integrationsverfahren für die Stammfunktionen (☞ Tab. 6.2) direkt zur Berechnung von Integralen verwenden (☞ Tab. 6.3).

Beispiel 6.8

Gesucht ist das Integral von $f(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$ im Intervall $[e, 10]$:

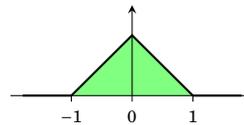
$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z} dz = \ln(z) \Big|_1^{\ln(10)} = \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0,834$$

$$z = \ln(x) \Rightarrow dz = \frac{1}{x} dx$$

Tabelle 6.3: Integrationsverfahren (Teil 2)	
Bezeichnung	Verfahren
Summenregel	$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
Partielles Integrieren	$\int_a^b f \cdot g' dx = f \cdot g \Big _a^b - \int_a^b f' \cdot g dx$
Substitution	$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$ mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x) dx$

Beispiel 6.9
 Gesucht ist $\int_{-2}^2 f(x) dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \geq 1 \end{cases}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 0 dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 0 dx \\ &= \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-1}^0 + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

6.3 Was ist ein uneigentliches Integral?

uneigentliches
Integral

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen

- das Integrationsintervall unbeschränkt ist (☞ Abb. 6.2, links), oder
- die Funktion unbeschränkt ist (☞ Abb. 6.2, rechts), d.h. die Funktion wird unendlich, oder
- die Intervallgrenzen nicht im Definitionsbereich der Funktion liegen.

In diesem Fall müssen wir das Integral mit Hilfe eines Grenzwertes berechnen. Falls f in b nicht definiert ist, oder $b = \infty$, so ist das entsprechende Integral definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} (F(t) - F(a))$$

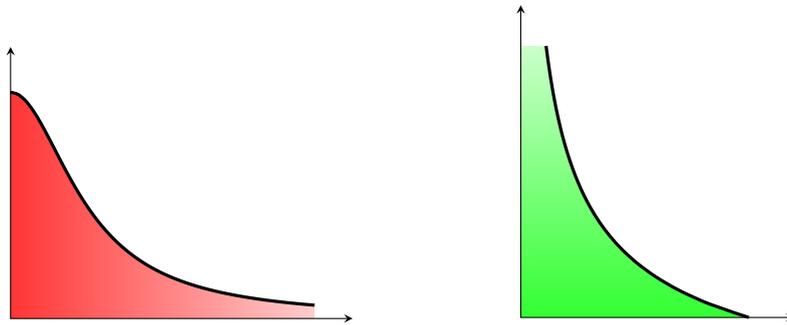


Abbildung 6.2: Die uneigentlichen Integrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ (links) und $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (rechts)

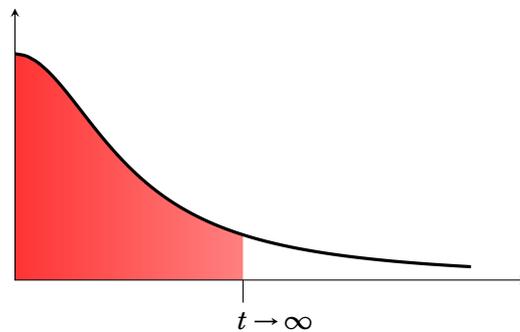


Abbildung 6.3: $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx$

Beispiel 6.10

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist in $x = 0$ nicht definiert. Wir fassen daher $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ als

Abkürzung für $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ auf.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{t}) = 2$$

Beispiel 6.11

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} - (-1) = 1$$

Uneigentliche Integrale existieren nur, falls der entsprechende Grenzwert existiert.

Beispiel 6.12

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) - \ln(1) = \infty$$

Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ existiert somit nicht.

— Übungen

130. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

- | | | | |
|-------------------|---------------------|--------------------|--------------------------|
| (a) x^3 | (b) $\frac{3}{x^2}$ | (c) $\sqrt{x^3}$ | (d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| (e) e^{2x} | (f) 2^{3x} | (g) $\frac{1}{2x}$ | (h) 5 |
| (i) $\sin(\pi x)$ | (j) $\cos(2\pi x)$ | | |

131. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

- | | | |
|----------------------------|--|-------------------------|
| (a) $x^4 + 2x^2 - x + 3$ | (b) $x^3 + 7x + \frac{6}{x+1}$ | (c) $e^x + x^e + e + x$ |
| (d) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ | (e) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ | |

132. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| (a) $\int x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} dx$ | (b) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$ |
| (c) $\int \frac{2}{x} dx$ | (d) $\int \sin(x) - 3\cos(x) dx$ |

133. Ermitteln Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen durch partielle Integration:

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) $f(x) = 2x e^x$ | (b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ | (c) $f(x) = x \ln(x)$ |
| (d) $f(x) = x^3 \ln x$ | (e) $f(x) = x(\ln(x))^2$ | (f) $f(x) = x^2 \sin(x)$ |

134. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen durch Anwendung der Substitutionsregel:

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\int x e^{x^2} dx$ | (b) $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$ | (c) $\int \frac{x}{3x^2 + 4} dx$ |
| (d) $\int x \sqrt{x+1} dx$ | (e) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ | (f) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ |
| (g) $\int \sqrt{x^3 + 1} x^2 dx$ | (h) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx$ | (i) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x-3} dx$ |
| (j) $\int x(x-8)^{\frac{1}{2}} dx$ | | |

135. Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\int \frac{3x^2 + 4}{x} dx$ | (b) $\int e^{2x} \ln(e^x) dx$ | (c) $\int (2x+1)e^{3x} dx$ |
| (d) $\int x^3 e^{-\frac{x}{2}} dx$ | (e) $\int e^{3x+2} dx$ | (f) $\int \frac{2x+3}{9-4x^2} dx$ |
| (g) $\int \frac{e^{2x}}{e^{5-x}} dx$ | (h) $\int t e^{t^2} dt$ | (i) $\int \frac{1}{x} (\ln x)^3 dx$ |
| (j) $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy$ | | |

136. Suchen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

(c) $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}}{x}$

(d) $f(x) = \frac{(x + \sqrt{x})(2x + \frac{1}{x})}{x^2}$

(e) $f(x) = x^2(x^2 + x^4 + 1)$

(f) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

137. Berechnen Sie:

$\int \tan(x) dx$ (Hinweis: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

138. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 30 - 0,05x$. Wie lautet die Kostenfunktion, wenn die Fixkosten 2000 GE betragen?

(Hinweis: Gesucht ist jene Stammfunktion $C(x)$ von $C'(x)$ mit $C(0) = 2000$.)

139. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 24 - 0,03x + 0,006x^2$. Die Gesamtkosten von 200 Stück sind 22 700 GE. Wie lautet die Kostenfunktion, wie groß sind die Fixkosten, und wie hoch sind Gesamtkosten von 500 Stück?

140. Der Grenzertrag eines Produktionsunternehmens ist $R'(x) = 4 - 0,01x$. Wie lautet die Erlösfunktion?

141. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 10 - 0,1x + 0,003x^2$. Die Gesamtkosten von 100 Stück betragen 2500 GE. Bestimmen Sie $C(x)$. Wie groß sind die Fixkosten?

142. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$, wobei die Funktion $f(x)$ stückweise konstant ist (Treppenfunktion) und gegeben ist durch

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 0,2 \\ 0,5 & \text{für } 0,2 \leq x < 0,5 \\ 2,5 & \text{für } 0,5 \leq x < 0,6 \\ 3,5 & \text{für } 0,6 \leq x < 0,7 \\ -3,5 & \text{für } 0,7 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } 0 \leq x < 0,3 \\ 0,5 & \text{für } 0,3 \leq x < 0,5 \\ -1,5 & \text{für } 0,5 \leq x < 0,8 \\ 1,5 & \text{für } 0,8 \leq x < 0,9 \\ 2,5 & \text{für } 0,9 \leq x \leq 1 \end{cases}$

143. Die Funktion f sei stetig und linear in den Intervallen $[0, 2]$, $[2, 6]$ und $[6, 10]$. Außerdem sei $f(0) = 0$, $f(2) = 5$, $f(6) = 2$ und $f(10) = -5$.

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{10} f(x) dx$.

144. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_1^4 2x^2 - 1 dx$

(b) $\int_0^2 3e^x dx$

(c) $\int_1^4 3x^2 + 4x dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(x)}{3} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{3x+2}{3x^2+4x+1} dx$

145. Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx & \text{(b)} \int_0^1 x(x^2+3)^4 dx & \text{(c)} \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx \\
 \text{(d)} \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx & \text{(e)} \int_0^2 x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx & \text{(f)} \int_0^3 (x-1)^2 x dx \\
 \text{(g)} \int_0^1 x \exp(x) dx & \text{(h)} \int_0^2 x^2 \exp(x) dx & \text{(i)} \int_1^2 x^2 \ln x dx
 \end{array}$$

146. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^\infty -e^{-3x} dx & \text{(b)} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} dx & \text{(c)} \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} dx
 \end{array}$$

147. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx & \text{(b)} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx & \text{(c)} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
 \text{(d)} \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx
 \end{array}$$

Hinweis zu (d): $\int \ln(x) \cdot (1+x)^{-2} dx$ partiell integrieren; beachte, dass $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$.

148. Existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx & \text{(b)} \int_1^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx & \text{(c)} \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \\
 \text{(d)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx & \text{(e)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{(f)} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx
 \end{array}$$

149. Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden uneigentlichen Integral? Wie lautet das Ergebnis?

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^1 x^\alpha dx & \text{(b)} \int_1^\infty x^\alpha dx & \text{(c)} \int_0^\infty x^\alpha dx
 \end{array}$$

150. Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ ist eine Erweiterung der Fakultätsfunktion auf alle positiven reellen Zahlen. Sie ist definiert als

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Zeigen Sie mittels partiellem Integrieren, dass

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

Kleines Wörterbuch

Deutsch

A

- 1 **Abbildung**
- 2 **wird abgebildet auf**
- 3 **abgeschlossen**
- 4 **abhängig** (Variable)
- 5 **ableiten** (differenzieren)
- 6 **Ableitung**
- 7 **Absolutbetrag**
- 8 **addieren**

- 9 **Addition**
- 10 **algebraische Gleichung**

- 11 **alternierende Folge**

- 12 **Anstieg (Steigung)**
- 13 **Äquivalenz**

- 14 **äquivalent**

- 15 **Argument**
- 16 **arithmetische Folge**
- 17 **arithmetische Reihe**

- 18 **arithmetisches Mittel**

- 19 **Assoziativgesetz**

- 20 **Aufzinsungsfaktor**

- 21 **Aussage**
- 22 **Aussagenlogik**

- 23 **Axiom**

B

- 24 **Barwert** (einer Rente)
- 25 **Basis** (einer Potenz)
- 26 **beschränkt**

English

- mapping
maps to
closed
dependent
differentiate
derivative
absolute value
add
- addition
algebraic equation
- alternating sequence
- slope
equivalence
- equivalent
- argument
arithmetic sequence
arithmetic series
- arithmetic mean
- associative law
- growth factor
- sentence, proposition
propositional calculus
- axiom
- cash equivalent, net present value
base, radix
bounded, limited

Français

- application
- fermé
dépendante
dériver
dérivée
valeur absolue
addier
- addition
équation algébrique
- séquence alternée
- équivalence
- équivalent
- argument
suite arithmétique
séri arithmétique
- moyenne arithmétique
- permutabilité de deux lois externes
facteur $(1+r)$ ou r est le taux
- proposition
calcul des propositions
- axiome
- base

Русский

- отображение
отображать
замкнутый
зависимый
дифференцировать
производная
абсолютная величина
адаптированный базис
прибавлять
сложение
алгебраическое уравнение
чередующаяся последовательность
наклон
равнозначность, эквивалентность
равноценный, эквивалентный
аргумент
арифметический ряд
арифметическая прогрессия
среднее арифметическое
закон ассоциативности
множитель $(1+r)$ в формуле $A = P(1+r)^n$
высказывание
исчисление высказываний
аксиома
- базис, основание
ограниченный

Deutsch	English	Français	Русский
27 beschränkte Folge	bounded sequence	suite borné	ограниченная последовательность
28 bestimmt divergente Folge	properly divergent sequence	suite simplement divergente	собственно расходящаяся последовательность
29 bestimmtes Integral	definite integral	intégrale définie	определенный интеграл
30 Beweis	proof	démonstration	доказательство
31 beweisen	prove, demonstrate, verify, show	démontrer	доказывать
32 bijektiv	one-to-one	bijective	биективный
33 Bild (einer Funktion)	image	image	образ
34 Bildungsgesetz	law of formation	loi de formation	закон образования
35 Billiarde	quadrillion		квадрильон
36 Billion	trillion	billion	триллион
37 Binomialkoeffizient	binomial coefficient	coefficient binomial	биномиальный коэффициент
38 binomischer Lehrsatz	binomial theorem	formule du binôme	формула бинома
39 Bruch	fraction	fraction	дробь
40 Bruchstrich	fraction bar	barre de fraction	черта дроби
41 Bruchzahl	fractional number, fraction	nombre fractionnaire	дробиное число
D			
42 definieren	define	définir	определять
43 Definition	definition	définition	определение
44 Definitionsbereich	domain	domaine	область определения
45 Definitionsmenge	domain	domaine	множество определения
46 dekadischer Logarithmus	common logarithm	logarithme décimal	десятичный логарифм
47 Dezimaldarstellung	decimal representation	notation décimale	представление в десятичной системе
48 Dezimalpunkt	decimal point	virgule (décimale)	(десятичная) запятая
49 Dezimalzahl	decimal (number)	nombre décimal	десятичное число
50 diagonal	diagonal	diagonal	диагональ
51 Differentialquotient	differential quotient	quotient différentiel	производная
52 Differentialrechnung	calculus	calcul différentiel	дифференциальное исчисление
53 Differenz	difference	différence	разность
54 Differenzenquotient	difference quotient	quotient des différences	разностное отношение
55 differenzierbar	differentiable	dérivable	дифференцируемый
56 differenzieren (einer Funktion)	differentiate	dériver	дифференцировать
57 disjunkt	disjoint	disjoint	дисъюнктивный
58 diskontieren	discount	escompter	дисконтировать
59 Distributivgesetz	distributive law	loi distributive	дистрибутивный закон
60 divergent	divergent	divergent	расходящаяся
61 divergente Folge	divergent sequence	suite divergente	расходящаяся последовательность
62 Dividend	dividend	dividende	делимое
63 dividieren	divide	diviser	делить
64 Division	division	division	деление
65 Divisor	divisor	diviseur	делитель
66 Doppelbruch	compound (complex) fraction	fraction complexe (double)	сложная дробь
67 dreidimensional	three-dimensional	à trois dimensions (tridimensionnel)	трехмерный
68 Dreieck	triangle	triangle	треугольник
69 dreieckig	triangular	triangulaire	треугольный

Deutsch

- 70 a durch b ($\frac{a}{b}$)
 71 **Durchschnitt** (von Zahlen)
 72 **Durchschnitt** (von Mengen)

E

- 73 **Ebene**
 74 **Eckpunkt** (eines Vielecks)
 75 **Eigenschaft**
 76 **eindeutig**
- 77 **Einheitsfunktion**
 78 **Einheitskugel**
 79 **Element** (einer Menge)
 80 **elementar**
 81 **Ellipse**
 82 **endlich**
 83 **Endwert** (einer Rente)
- 84 **erste Ableitung**
 85 **erweitern** (eines Bruches)
- 86 **Eulersche Zahl**
 87 **ewige Rente**
 88 **existieren**
 89 **Exponent**
 90 **Exponentialfunktion**
- 91 **Extremum**
 92 **Extremwert**

F

- 93 **Faktor**
 94 **faktorisieren**
 95 **Fakultät** (einer Zahl)
 96 **Festkommaformat**
 97 **Fläche**
 98 **Flächeninhalt**
 99 **Folge**
 100 **Fünfeck**
 101 **Funktion**

G

- 102 **ganze Zahl**
 103 **Geometrie**
 104 **geometrische Folge**
- 105 **geometrische Reihe**
 106 **geometrisches Mittel**
 107 **Gerade**
 108 **gerade (Zahl)**
 109 **gleich**
 110 **Gleichheitszeichen**

English

- a over b
 average
 intersection
- plane
 vertex, corner
 property
 unique, single-valued
- identity function
 unit sphere
 element
 elementary
 ellipse
 finite
 accumulation
- first derivative
 reduce a fraction in higher terms
 Euler's constant
 perpetual annuity
 exist
 exponent
 exponential function
- extremum
 extreme value
- factor
 factor, factorize
 factorial
 fixed point representation
 surface
 area
 sequence
 pentagon
 function
- integer
 geometry
 geometric progression
- geometric series
 geometric mean
 (straight) line
 even (number)
 equal, equivalent
 equals sign

Français

- moyenne
 intersection
- plan
 sommet, coin
 propriété
- fonction identité
 sphère unitaire
 élément
 élémentaire
 ellipse
 fini
- dérivée première
- constante d'Euler
- exposant
 fonction exponentielle
- extrémum
 valeur extrême
- facteur
- factorielle
- surface
 aire
 suite
- fonction
- nombre entier
 géométrie
 progression (suite)
 géométrique
 série géométrique
 moyenne géométrique
 droite
 (nombre) paire
 égal
 signe d'égalité

Русский

- a разделить на b
 среднее
 пересечение
- плоскость
 вершина
 свойство
 единственый, однозначный
 тождественная функция
 единичный шар
 элемент
 элементарный
 эллипс
 конечный
 накопительная стоимость
 первая производная
- постоянная Эйлера
- существовать
 показатель степени
 показательная функция,
 экспоненциальная функция
 экстремум
 экстремальное значение
- фактор
- факториал
- поверхность
 площадь
 последовательность
 пятиугольник
 функция
- целое число
 геометрия
 геометрическая прогрессия
 геометрический ряд
 среднее геометрическое
 прямая
 четное число
 равный
 знак (символ) равенства

Deutsch

- 111 **gleichseitiges Dreieck**
 112 **gleichsetzen**
 113 **Gleichung**
 114 **Gleichungssystem**
 115 **Gleitkommaformat**
 116 **Glied** (einer Folge)
 117 **global**
 118 **globales Maximum**
 119 **Grad**
 120 **Graph**
 121 **graphisch**
 122 **Grenzkosten**
 123 **Grenznutzen**
 124 **Grenzübergang**
 125 **Grenzwert**
 126 **Grundfläche, Basis**
 127 **Grundmenge**

H

- 128 **herausheben** (eines Faktors)
 129 **herleiten**
 130 **Hilfsvariable**
 131 **hinreichende Bedingung**
 132 x **hoch** n (x^n)
 133 **Hyperbel**

I

- 134 **identisch**
 135 **Implikation**
 136 **implizit**
 137 **injektiv**
 138 **Integral**
 139 **Integralrechnung**
 140 **Integralzeichen**
 141 **Integrationskonstante**
 142 **Integrationsverfahren**
 143 **integrieren**
 144 **Intervall**
 145 **inverse Funktion**
 146 **irrationale Zahl**

K

- 147 **Kehrwert**
 148 **Klammer**
 149 **Kommutativgesetz**
 150 **Komplement** (einer Menge)
 151 **Komplementärmenge**

English

- equilateral triangle
 equate
 equation
 system of equations
 floating point representation
 term (of a sequence)
 global
 global maximum
 degree
 graph, diagram
 graphic(al)
 marginal cost
 marginal utility
 take the limit, limiting process
 limit
 base
 fundamental set

factor out

derive, deduce
 auxiliary variable

sufficient condition
 x (raised) to the power n , x to the n -th power
 hyperbola

identical
 implication
 implicit
 one-to-one
 integral
 integral calculus

integral sign
 integration constant

method of integration
 integrate
 interval
 inverse function
 irrational (number)

reciprocal (value)
 bracket, parenthesis, brace
 commutative law
 complement
 complementary set

Français

triangle équilatéral
 poser égal
 équation
 système d'équations

terme
 global
 maximum global
 degré
 graphe
 graphique

passage à la limite

limite
 base
 ensemble fondamental

variable auxiliaire

condition suffisante
 x puissance n , puissance n -e de x
 hyperbole

identique
 implication
 implicite
 injective
 intégral
 calcul intégral

signe d'intégration
 constante d'intégration

intervalle
 fonction inverse
 nombre irrationnel

valeur inverse
 parenthèse
 loi commutative
 complémentaire
 ensemble complémentaire

Русский

равносторонний
 треугольник
 приравнять
 уравнение
 система уравнений

член
 глобальный
 глобальный максимум
 степень; градус
 график
 графический
 предельные издержки
 предельная полезность
 предельный переход

предел
 основание
 основное множество

выводить
 вспомогательная
 переменная
 достаточное условие
 x в степени n
 гипербола

тождественный
 импликация
 неявный
 инъективный
 интеграл
 интегральное
 исчисление
 знак интегрирования
 постоянная
 интегрирования

интегрировать
 интервал
 обратная функция
 иррациональное число

обратное значение
 скобка
 закон коммутативности
 дополнение
 дополнительное
 множество

Deutsch

- 152 **komplexe Zahl**
 153 **Konjunktion**
 154 **konkav**
 155 **Konstante**
 156 **konvergent**
 157 **konvergente Folge**
- 158 **konvergieren**
 159 **konvex**
 160 **Koordinate**
 161 **Koordinatenachse**
 162 **Kostenfunktion**
 163 **Kredit**
 164 **Kreis**
 165 **Kreisscheibe**
 166 **kritischer Punkt**
 167 **Krümmung**
 168 **Kugel**
 169 **Kugeloberfläche**
- 170 **Kurve**
 171 **kürzen** (eines Bruches)

L

- 172 **leere Menge**
- 173 **Limes**
 174 **linear**
 175 **lineare Funktion**
 176 **lineare Gleichung**
 177 **lineare Ungleichung**
 178 **Linearfaktor**
 179 **linksseitiger Grenzwert**
 180 **logarithmieren**
 181 **Logarithmus**
 182 **Logarithmusfunktion**
- 183 **Logik**
 184 **lokal**
 185 **lokales Maximum**
 186 **Lösung**
 187 **Lösungsmenge**

M

- 188 **Mantisse**
 189 **a mal b** ($a \cdot b$)
 190 **marginale Kosten**
 191 **Mathematik**
 192 **Maximum**
 193 **Mediane**
 194 **Menge**
 195 **Mengenlehre**
 196 **Milliarde**
 197 **Million**

English

- complex number
 conjunction
 concave
 constant
 convergent
 convergent sequence
- converge, be convergent
 convex
 coordinate
 coordinate axis
 cost function
 credit
 circle
 disk
 critical point
 curvature
 sphere
 spherical surface
- curve
 reduce, cancel
- empty set, null set
- limit
 linear
 linear function
 linear equation
 linear inequality
 linear factor
 limit on the left
 take the logarithm
 logarithm
 logarithmic function
- logic
 local
 local maximum
 solution
 solution set
- mantissa
 a times b
 marginal cost
 mathematics
 maximum
 median
 set
 set theory
 billion (Am.)
 million

Français

- nombre complexe
 conjonction
 concave
 constante
 convergente
 suite convergente
- converger
 convexe
 coordonnée
 axe coordonnées
 fonction coût
- cercle
 disque
 point critique
 courbure
 sphère, boule
 surface sphérique
- courbe
- ensemble vide
- limite
 linéaire
 fonction linéaire
 équation linéaire
 inéquation linéaire
- limite à gauche
- logarithme
 fonction logarithmique
- local
 maximum local
 solution
 ensemble des solutions
- mantisse
- maximum
 médiane
 ensemble
 théorie des ensembles

Русский

- комплексное число
 конъюнкция
 вогнутый
 постоянная, константа
 сходящийся
 сходящаяся
 последовательность
 сходиться
 выпуклый
 координата
 координатная ось
 функция издержек
- окружность
 круг
 особая точка
 кривизна
 шар
 сфера, поверхность
 шара
 кривая
 сокращать (дробь)
- пустое множество,
 нуль-множество
 предел
 линейный
 линейная функция
 линейное уравнение
 линейное неравенство
- предел слева
- логарифм
 логарифмическая
 функция
 логика
 локальный
 локальный максимум
 решение
 множество решений
- мантисса
 a умножить на b
- математика
 максимум
 медиана
 множество
 теория множеств
 миллиард
 миллион

Deutsch

- 198 **Minimum**
 199 **minus**
 200 **Mittel**
 201 **Mittelwert**
 202 **Monom**
 203 **monoton fallend**
 204 **monoton steigend**
- 205 **Multiplikation**
 206 **multiplizieren (mit)**
- N**
- 207 **natürliche Zahl**
 208 **natürlicher Logarithmus**
 209 **Nebenrechnung**
- 210 **Negation**
 211 **Nenner** (eines Bruches)
 212 **notwendige Bedingung**
 213 **Nullfolge**
- 214 **Nullstelle**
- O**
- 215 **Obermenge**
 216 **offen**
- P**
- 217 **Parabel**
 218 **parallel**
 219 **Parallelepiped**
 220 **Parallelogramm**
 221 **Parameter**
 222 **Parameterdarstellung**
- 223 **Partialsomme**
 224 **partielle Integration**
- 225 **periodische Zahl**
- 226 **plus**
 227 **Polynom**
 228 **Potenz**
 229 **Potenzfunktion**
 230 **Potenzieren**
- 231 **Probe** (einer Gleichung)
 232 **Produkt**
 233 **Produktmenge**
- 234 **Punkt**
 235 **Pyramide**
- Q**
- 236 **Quader**

English

- minimum
 minus
 mean
 mean (value), average
 monomial
 monotonically decreasing
 monotonically increasing
- multiplication
 multiply (by)
- natural number
 natural logarithm
 auxiliary calculation
- negation
 denominator
 necessary condition
 null sequence
- root, zero
- including set, superset
 open
- parabola
 parallel
 parallelepiped
 parallelogram
 parameter
 parametric representation
- partial sum
 integration by parts
- periodical decimal
- plus
 polynomial
 power
 power function
 raising to a power,
 exponentiation
- check
 product
 product set
- point
 pyramid
- rectangular solid

Français

- minimum
 moyenne
 valeur moyenne
 monôme
 monotone décroissante
 monotone croissante
- multiplication
 (par)
- (nombre) entier naturel
 logarithme naturel
 calcul auxiliaire
- négation
 dénominateur
 condition nécessaire
 suite convergeant vers zéro
- zéro
- sur-ensemble
 ouverte
- parabole
 parallèle
 parallélépipède
 parallélogramme
 paramètre
 représentation paramétrique
- somme partielle
 intégration par parties
- nombre décimal périodique
- plus
 polynôme
 puissance
 fonction puissance
 élévation à une puissance,
 exponentiation
- preuve
 produit
 ensemble produit
- point
- cuboïd

Русский

- минимум
 минус
 среднее
 среднее значение
 одночлен, моном
 монотонно убывающий
 монотонно
 возрастающий
 умножение
 умножать (на)
- натуральное (число)
 натуральный логарифм
 вспомогательное
 вычисление
 отрицание
 знаменатель
 необходимое условие
 нулевая
 последовательность
 нуль
- надмножество
 открытый
- парабола
 параллельный
 параллелепипед
 параллелограмм
 параметр
 параметрическое
 представление
 частичная сумма
 интегрирование по
 частям
 периодическая
 десятичная дробь
 плюс
 многочлен, полином
 степень
 степенная функция
 возведение в степень,
 потенцирование
 проверка
 произведение
 множество-
 произведение
 точка
 пирамида
- кубоид, кирпич, брус

Deutsch	English	Français	Русский
237 Quadrat (Viereck)	square		квадрат
238 Quadrat (Potenz)	square, second power		квадрат, вторая степень
239 quadratische Gleichung	quadratic (equation)	équation quadratique	квадратичное уравнение
240 Quadratwurzel	square root	racine carrée	квадратный корень
241 quadrieren	square, raise to the second power	élever au carré, carrer	возводить в квадрат
242 Quotient	quotient	quotient	частное
R			
243 Radius	radius	rayon	радиус
244 rationale Funktion	rational function	fonction rationnel	рациональная функция
245 rationale Zahl	rational (number)	(nombre) rationnel	рациональное число
246 rationaler Ausdruck	rational term		
247 Raum	space	espace	пространство
248 rechnen	calculate, compute		считать, вычислять
249 Rechteck	rectangle	rectangle	прямоугольник
250 rechtsseitiger Grenzwert	limit on the right	limite à droite	предел справа
251 reell	real	réelle	действительный
252 reelle Funktion	real-valued function	fonction réelle	действительная функция, вещественная функция
253 reelle Zahl	real (number)	(nombre) réel	действительное число, вещественное число
254 Regel	rule	règle, loi	правило
255 Reihe	series	série	ряд
256 Rekursion	recursion	réursion	рекурсия
257 Rente	annuity, rent		
258 Rentenrechnung	calculus of annuity		
S			
259 Sattelpunkt	saddle point	point (de) col	точка перевала
260 Satz	proposition, theorem	proposition, théorème, loi	теорема, предложение, положение
261 Seitenfläche	face	face	грань
262 Seitenkante	(lateral) edge	arête latérale	боковое ребро
263 Sekante	secant line, intersection line	sécante	секущая
264 senkrecht	normal, perpendicular	perpendiculaire	ортогональный
265 singulärer Punkt	singular point	singularité	особая точка
266 Sprungstelle	jump discontinuity	point de (discontinuité à) saut	точка скачка
267 Stammfunktion	antiderivative, primitive	primitive, antiderivée	первообразная
268 stationärer Punkt	stationary point	point stationnaire	стационарная точка
269 Steigung	slope		наклон
270 stetig	continuous	continue	непрерывный
271 Stetigkeit	continuity	continuité	непрерывность
272 Strecke	line segment	segment linéaire	отрезок прямой
273 streng monoton fallend	strictly monotonically decreasing	strictement décroissante	строго убывающий
274 substituieren	substitute		подставлять
275 Substitution	substitution	substitution	подстановка, подставление
276 subtrahieren	subtract		вычитать
277 Subtraktion	subtraction	soustraction	вычитание

Deutsch

- 278 **Summe**
279 **surjektiv**
280 **Symbol**

T

- 281 **Tangente**
282 **Taschenrechner**
283 **Teiler**
284 **Teilmenge**
285 **Teilsumme**
286 **Term**
287 **Tilgungsformel**
288 **Treppenfunktion**

U

- 289 **Umfang**
290 **Umkehrfunktion**
291 **unabhängig** (Variable)
292 **unbestimmt**
293 **unbestimmt divergente Folge**

- 294 **unbestimmtes Integral**

- 295 **uneigentliches Integral**

- 296 **unendlich**
297 **ungerade (Zahl)**
298 **Ungleichung**
299 **Unstetigkeitsstelle**
300 **Urbild**

V

- 301 **Variable**
302 **Vektor**
303 **Vektorrechnung**
304 **Venn-Diagramm**

- 305 **Vereinigung** (von Mengen)
306 **Vereinigungsmenge**
307 **Verzinsung**
308 **Vieleck**
309 **Viereck**
310 **Volumen**
311 **voraussetzen**
312 **Voraussetzung**
313 **Vorzeichen**

W

- 314 **Wahrheitswert**
315 **Wendepunkt**
316 **Wertebereich**
317 **Wertemenge**
318 **Wertetabelle**
319 **Widerspruch**

English

- sum
onto
symbol, sign

- tangent (line)
calculator
divisor, factor
subset
partial sum
term
repayment formula
step function

- perimeter
inverse function
independent
indefinite, indetermined
improperly divergent
sequence

- indefinite integral

- improper integral

- infinite
odd (number)
inequality
(point of) discontinuity
inverse image, pre-image

- variable
vector
vector calculus
Venn diagram

- join, union (of sets)
(set) union
yield of interest
polygon
quadrangle
volume
assume, suppose
assumption
(algebraic) sign

- truth value
point of inflexion
range
range
table of values
contradiction

Français

- somme
surjective
symbole, signe

- tangente

diviseur
sous-ensemble
somme partielle
terme, membre
formule de remboursement
fonction en escalier

- périmètre
fonction inverse
indépendante
indéfinie
suite impropre divergente

- intégrale indéfinie

- intégrale impropre

- infinie
(nombre) impair
inéquation, inégalité
point de discontinuité
image inverse

- variable
vecteur
calcul vectoriel
diagramme de Venn

- réunion
réunion (d'ensembles)

polygone
quadrangle
volume

prémisse, assumption
signe

- valeur logique
point d'inflexion
ensemble d'arrivée
ensemble d'arrivée
table des valeurs
contradiction

Русский

- сумма
сюрьективный
символ, знак

- касательная
калькулятор
делитель
подмножество
частичная сумма
член
формула погашения
ступенчатая функция

- периметр
обратная функция
независимый
неопределенный
несобственно
расходящаяся
последовательность
неопределенный
интеграл
несобственный
интеграл
бесконечный
нечетное число
неравенство
точка разрыва
прообраз

- переменная
вектор
векторное исчисление
диаграмма
Эйлера-Венна

- сложение
объединение

- многоугольник, полигон
четыреугольник
объем
предполагать
предположение
знак

- значение истинности
точка перегиба
область значений
множество значений
таблица значений
противоречие

Deutsch

320 **Winkel**
 321 **Würfel**
 322 **Wurzel**
 323 **Wurzelfunktion**

324 **Wurzelgleichung**

325 **Wurzelzeichen**

326 **Wurzelziehen**

X

327 **x -Achse**

328 **xy -Ebene**

Z

329 **Zahl**

330 **Zahlenebene**

331 **Zähler** (eines Bruches)

332 **Ziffer**

333 **Zins**

334 **Zinsertrag**

335 **Zinsenrechnung**

336 **Zinssatz**

337 **Zuordnungsvorschrift**

338 **zusammengesetzte
Funktion**

English

angle
 cube
 root, radix
 root function

radical equation

radical sign
 taking the root

x -axis
 xy -plane

number
 number plane
 numerator
 figure
 interest
 interest
 interest calculation
 interest rate
 rule of assignment
 composite function

Français

angle
 cube
 racine
 fonction de racines

équation irrationnelle

signe radical
 extraction de racine

axe des x
 plan des xy

nombre
 plan numérique
 numérateur
 chiffre
 intérêt
 produit de l'intérêt
 calcul des intérêts
 intérêt
 loi de correspondance
 fonction composée

Русский

угол
 куб
 корень
 степенная функция с
 дробным показателем
 иррациональное
 (алгебраическое)
 уравнение
 знак корня
 извлечение корня

ось абсцисс
 плоскость

число
 числовая плоскость
 числитель
 цифра
 процент
 взнос
 исчисление процентов
 процентная ставка
 правило сопоставления
 сложная функция

Register zum kleinen Wörterbuch

Die Zahlen beziehen sich auf die Einträge im kleinen Wörterbuch (☞ Seite 103).

A	
absolute value	7
accumulation	83
add	8
addition	9
algebraic equation	10
(algebraic) sign	313
alternating sequence	11
angle	320
annuity	257
antiderivative	267
area	98
argument	15
arithmetic mean	18
arithmetic sequence	16
arithmetic series	17
associative law	19
assume	311
assumption	312
auxiliary calculation	209
auxiliary variable	130
average	71, 201
axiom	23

B	
base	25, 126
be convergent	158
billion (Am.)	196
binomial coefficient	37
binomial theorem	38
bounded	26
bounded sequence	27
brace	148
bracket	148

C	
calculate	248
calculator	282
calculus	52
calculus of annuity	258
cancel	171
cash equivalent	24
check	231

circle	164
closed	3
common logarithm	46
commutative law	149
complement	150
complementary set	151
complex number	152
composite function	338
compound (complex) fraction	66
compute	248
concave	154
conjunction	153
constant	155
continuity	271
continuous	270
contradiction	319
converge	158
convergent	156
convergent sequence	157
convex	159
coordinate	160
coordinate axis	161
corner	74
cost function	162
credit	163
critical point	166
cube	321
curvature	167
curve	170

D	
decimal (number)	49
decimal point	48
decimal representation	47
deduce	129
define	42
definite integral	29
definition	43
degree	119
demonstrate	31
denominator	211
dependent	4
derivative	6
derive	129

diagonal	50
diagram	120
difference	53
difference quotient	54
differentiable	55
differential quotient	51
differentiate	5, 56
(point of) discontinuity	299
discount	58
disjoint	57
disk	165
distributive law	59
divergent	60
divergent sequence	61
divide	63
dividend	62
division	64
divisor	65, 283
domain	44, 45

E	
element	79
elementary	80
ellipse	81
empty set	172
equal	109
equals sign	110
equate	112
equation	113
equilateral triangle	111
equivalence	13
equivalent	14, 109
Euler's constant	86
even (number)	108
exist	88
exponent	89
exponential function	90
exponentiation	230
extreme value	92
extremum	91

F	
face	261

factor 93, 94, 283
 factor out 128
 factorial 95
 factorize 94
 figure 332
 finite 82
 first derivative 84
 fixed point representation 96
 floating point representation 115
 fraction 39, 41
 fraction bar 40
 fractional number 41
 function 101
 fundamental set 127

G

geometric mean 106
 geometric progression 104
 geometric series 105
 geometry 103
 global 117
 global maximum 118
 graph 120
 graphic(al) 121
 growth factor 20

H

hyperbola 133

I

identical 134
 identity function 77
 image 33
 implication 135
 implicit 136
 improper integral 295
 improperly divergent sequence 293
 including set 215
 indefinite 292
 indefinite integral 294
 independent 291
 indetermined 292
 inequality 298
 infinite 296
 integer 102
 integral 138
 integral calculus 139
 integral sign 140
 integrate 143
 integration by parts 224
 integration constant 141
 interest 333, 334
 interest calculation 335
 interest rate 336
 intersection 72
 intersection line 263
 interval 144
 inverse function 145, 290
 inverse image 300
 irrational (number) 146

J

join 305
 jump discontinuity 266

L

(lateral) edge 262
 law of formation 34
 limit 125, 173
 limit on the left 179
 limit on the right 250
 limited 26
 limiting process 124
 (straight) line 107
 line segment 272
 linear 174
 linear equation 176
 linear factor 178
 linear function 175
 linear inequality 177
 local 184
 local maximum 185
 logarithm 181
 logarithmic function 182
 logic 183

M

mantissa 188
 mapping 1
 maps to 2
 marginal cost 122, 190
 marginal utility 123
 mathematics 191
 maximum 192
 mean 200
 mean (value) 201
 median 193
 method of integration 142
 million 197
 minimum 198
 minus 199
 monomial 202
 monotonically decreasing 203
 monotonically increasing 204
 multiplication 205
 multiply (by) 206

N

natural logarithm 208
 natural number 207
 necessary condition 212
 negation 210
 net present value 24
 normal 264
 null sequence 213
 null set 172
 number 329
 number plane 330
 numerator 331

O

odd (number) 297
 one-to-one 32, 137
 onto 279
 open 216
 a over b 70

P

parabola 217
 parallel 218

parallelepiped 219
 parallelogram 220
 parameter 221
 parametric representation 222
 parenthesis 148
 partial sum 223, 285
 pentagon 100
 perimeter 289
 periodical decimal 225
 perpendicular 264
 perpetual annuity 87
 plane 73
 plus 226
 point 234
 point of inflection 315
 polygon 308
 polynomial 227
 power 228
 power function 229
 x (raised) to the power n 132
 x to the n -th power 132
 pre-image 300
 primitive 267
 product 232
 product set 233
 proof 30
 properly divergent sequence 28
 property 75
 proposition 21, 260
 propositional calculus 22
 prove 31
 pyramid 235

Q

quadrangle 309
 quadratic (equation) 239
 quadrillion 35
 quotient 242

R

radical equation 324
 radical sign 325
 radius 243
 radix 25, 322
 raise to the second power 241
 raising to a power 230
 range 316, 317
 rational (number) 245
 rational function 244
 rational term 246
 real 251
 real (number) 253
 real-valued function 252
 reciprocal (value) 147
 rectangle 249
 rectangular solid 236
 recursion 256
 reduce 171
 reduce a fraction in higher terms 85
 rent 257
 repayment formula 287
 root 214, 322
 root function 323
 rule 254
 rule of assignment 337

S	
saddle point	259
secant line	263
second power	238
sentence	21
sequence	99
series	255
set	194
set theory	195
show	31
sign	280
single-valued	76
singular point	265
slope	12, 269
solution	186
solution set	187
space	247
sphere	168
spherical surface	169
square	237, 238, 241
square root	240
stationary point	268
step function	288
strictly monotonically decreasing	273
subset	284
substitute	274

substitution	275
subtract	276
subtraction	277
sufficient condition	131
sum	278
superset	215
suppose	311
surface	97
symbol	280
system of equations	114

T	
table of values	318
take the limit	124
take the logarithm	180
taking the root	326
tangent (line)	281
term	286
term (of a sequence)	116
theorem	260
three-dimensional	67
a times b	189
triangle	68
triangular	69
trillion	36
truth value	314

U	
(set) union	306
union (of sets)	305
unique	76
unit sphere	78

V	
variable	301
vector	302
vector calculus	303
Venn diagram	304
verify	31
vertex	74
volume	310

X	
x -axis	327
xy -plane	328

Y	
yield of interest	307

Z	
zero	214

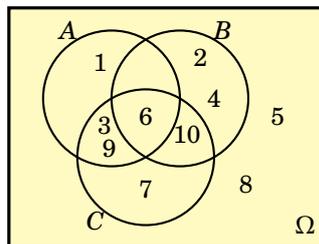
Lösungen

Das Verstehen ist ein Sport wie ein anderer. Ein sehr vornehmer Sport und ein sehr kostspieliger.

Der Weg ins Freie

ARTHUR SCHNITZLER (1862–1931)

1. (a) {1, 3, 6, 7, 9, 10}; (b) {6}; (c) {1}; (d) {2, 4, 5, 7, 8, 10}; (e) {6, 10}; (f) {2, 4, 5, 8}; (g) {2, 4}; (h) {5, 8}; (i) {3, 6, 9}.



2. Obermenge Ω ist die Menge aller Einwohner des Wahlbezirks. (a) alle männlichen Wahlberechtigten; (b) alle weiblichen Wahlberechtigten; (c) alle unselbständig beschäftigten Männer; (d) alle nicht pensionierten Wahlberechtigten; (e) alle nicht wahlberechtigten Frauen; (f) alle Männer (= B); (g) alle pensionierten Frauen; (h) alle Frauen, die pensioniert oder unselbständig beschäftigt sind.
3. A .
4. (a) $\bar{A} \cap \bar{B}$; (b) A ; (c) \emptyset ; (d) C .
5. (a) keine Teilmenge; (b) keine Teilmenge; da Menge = $\{-11, 11\}$; (c) Teilmenge; (d) keine Teilmenge.
6. (a) keine Abbildung; (b) bijektive Abbildung; (c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv; (d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.
7. (a) 1.493×10^0 , 1.493 E0; (b) -1.372×10^2 , -1.372 E2; (c) -9.729×10^1 , -9.729 E1; (d) 1.635×10^5 , 1.635 E5; (e) 6.504×10^1 , 6.504 E1; (f) 6.263×10^0 , 6.263 E0; (g) 1.539×10^3 , 1.539 E3; (h) 2×10^{-3} , 2 E-3; (i) 1×10^2 , 1 E2; (j) -1×10^{-3} , -1 E-3; (k) 2.841×10^2 , 2.841 E2.
8. (a) 89300; (b) -0,000893; (c) 2,932; (d) -0,002255; (e) 0,0000011; (f) 11,409468, (g) 156250...0; (h) -2,13; (i) -108450000000; (j) 0,0199; (k) 960,1; (l) 132550000000.

146 Nullen

9. (a) $b^5 + ab^4 + a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b + a^5$; (b) $(-2)^{1+2+3+4+5} = (-2)^{15} = -32768$.
10. (a) 2 und 4; (b) 2.
11. (a) $\sum_{i=1}^n 2a_i b_i$; (b) 0; (c) $2\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$; (d) $x_0 - x_n$; (e) 0.
12. (a) $4xh$; (b) $a(c-1)$; (c) $\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{xy(x-y)}$; (d) $\frac{2x}{x^2-1}$; (e) $\frac{2}{1-x^2}$; (f) $\frac{1}{xyz}$.
13. (a) $A^3 - B^3$; (b) $2(A^2 + x^2)$; (c) xy ; (d) $\frac{1}{st}$; (e) $\frac{(x^2+y)(2x+y)}{(2x+1)2xy}$; (f) $\frac{x(a-b)+a}{x(a+b)+b}$; (g) x .
14. (a) 96; (b) 15; (c) 24; (d) 96; (e) 216; (f) -27.
15. (a) $8xy(x^2 + y^2)$; (b) $2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$; (c) $x^3(1 - 3x\sqrt{y} + 3x^2y - x^3\sqrt{y^3})$; (d) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$; (e) $27x^3 + 54xy + 36\frac{y^2}{x} + 8\frac{y^3}{x^3}$; (f) $x^4(1 + 4rx + 6r^2x^2 + 4r^3x^3 + r^4x^4)$.
16. $a = 1, b = 2, c = -1$.
17. (a) $a = 1, b = 0, c = 1$; (b) $a = 3, b = 1, c = 3$; (c) $a = 1, b = 0, c = 1$; (d) $a = 2, b = -2, c = 1$.
18. (a) $x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}$; (b) $x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{6}}$; (c) $x^{\frac{1}{4}} + 2$; (d) $x^{\frac{3}{4}}$; (e) $2x^{\frac{5}{14}}$; (f) $|x|$.
19. (a) $(1 + \frac{y}{\sqrt{x}})^{\frac{1}{3}}$; (b) $\frac{1}{3x - \frac{1}{3}}$; (c) $\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{6}} + 3}$; (d) $x + \sqrt{xy} + y$.
20. (a) 1, 2, 4, nicht definiert, 0, $-2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, nicht reell; (b) 2, 47712, 4, 7712.
21. (a) 10000; (b) -4; (c) 27; (d) $-\frac{\log_{10}(2)}{4} - \frac{1}{2}$; (e) -3; (f) -4.
22. (a) $y = \frac{1}{10}e^{x \ln 10}$; (b) $y = 16e^{x \ln 4}$; (c) $y = e^{x(\ln 3 + \ln 25)}$; (d) $y = e^{x \ln \sqrt{1,08}}$; (e) $y = 0,9e^{x \frac{1}{10} \ln 1,1}$; (f) $y = \sqrt{q}e^{x \ln \sqrt{2}}$.
23. (a) $g_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$; (b) $g_2(x) = -x^2 + 7x + 8$; (c) $g_3(x) = -3x^3 + x + 8$; (d) $g_4(x) = 7x^2 - 8x + 2$.
24. Alle Polynome 4. Grades mit diesen Nullstellen haben die Form $c(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)$ mit $c \neq 0$. Ein Polynom 4. Grades kann nicht mehr als 4 Nullstellen haben.
25. (a) $(x+1)(x-1)(x+7)$; (b) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$; (c) $2(x + \frac{1}{2})(x-2)(x+5)$.
26. (a) $3\left(x - \frac{9+\sqrt{57}}{6}\right)\left(x - \frac{9-\sqrt{57}}{6}\right)$; (b) $2\left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$; (c) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1+\sqrt{97}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{97}}{2}\right)$; (d) $(x+1)(x+3)$; (e) $5\left(x - \frac{5+\sqrt{145}}{10}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{145}}{10}\right)$; (f) $4\left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$.
27. Die meisten Lösungen erhalten wir durch Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen (S. 25) oder durch Umformen (Faktorisieren) der Gleichungen (in eckigen Klammern [...]).
- (a) $x = \frac{y}{y+1}, y = \frac{x}{1-x}, [x(y+1) = y \text{ bzw. } y(x-1) = -x]$;
- (b) $x = \frac{4y+1}{3y+2}, y = \frac{1-2x}{3x-4}, [x(3y+2) = 1+4y \text{ bzw. } y(3x-4) = 1-2x]$;
- (c) $x = y-1$ und $x = -y$, bzw. $y = x+1$ und $y = -x$, $[(x-y+1)(x+y) = 0]$;
- (d) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$, $[(x+y) \cdot (xy-1) = 0]$;
- (e) $x = 2-y$ und $x = -2-y$, bzw. $y = 2-x$ und $y = -2-x$, $[(x+y)^2 = 4]$;
- (f) $x = -\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$, bzw. $y = 5-3x$ und $y = -5-3x$, $[(3x+y)^2 = 25]$;
- (g) $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}, y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$;
- (h) $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}, y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$;
- (i) $x = y - 2\sqrt{y} + 1, y = x - 2\sqrt{x} + 1$.

- 28.** Die meisten Lösungen erhalten wir durch Umformen der Gleichungen und Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen (S. 25). In eckigen Klammern [...] stehen Ausdrücke, die durch Umformungen (Faktorisieren) erhalten werden können.
- (a) $x = -\frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2y} \sqrt{y^4 + 24y}$, $y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2x} \sqrt{x^4 + 24x}$;
 (b) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$, $[(x+y) \cdot (xy-1) = 0]$;
 (c) $x = (1 \pm \sqrt{2})y$, $y = \frac{1}{1 \pm \sqrt{2}}x$, or equivalently $y = (-1 \pm \sqrt{2})x$, $[x^2 - 2xy - y^2 = 0]$;
 (d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-y, \pm\sqrt{-y}\}$ beliebig falls $y = -1$ und $x = 0$ sonst, $y \in \mathbb{R} \setminus \{-x, -x^2\}$ beliebig falls $x = 0$ und $y = -1$ sonst, $[x^2(1+y) = 0]$;
 (e) $x = \frac{1+3y-y^2}{y-1}$, $y = \frac{1}{2}(3-x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + 4(x+1)}$, $[y^2 - 3y + xy - x - 1 = 0]$;
 (f) $x = \frac{y}{y^2-1}$, $y = \frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}$, $[x(y^2-1) = y$ bzw. $xy^2 - y - x = 0]$;
 (g) $x = -\frac{1}{8}(y+4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}(y+4)^2 - \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{y}\right)}$, $y = -2x \pm \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x+1}}$,
 $[4x^2y + 4xy + xy^2 + y^2 - 1 = 0]$;
 (h) $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ und $x = y - 1$, bzw. $y = 2x - 1$ und $y = y + 1$, $[(2x - y - 1) \cdot (x - y + 1) = 0]$;
 (i) $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}y$ und $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}y$, bzw. $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}x$ und $y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}x$,
 $[2x^2 + 3xy - y^2 = 0]$.
- 29.** (a) $x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \approx 2,710$; (b) $x = \frac{\ln 9}{\ln 3 + \ln 2} \approx 1,2263$; (c) $x = \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2,861$;
 (d) $x = \frac{\ln 50}{4 \ln 10} \approx 0,425$; (e) $x = -\frac{\ln 2 + 4 \ln 10}{\ln 0,4} \approx 10,808$; (f) $x = \frac{\ln 4}{\ln 9 - \ln 125} \approx -0,527$.
- 30.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{27}{32} + \frac{\sqrt{217}}{32} \approx 1,304$, $x_3 = \frac{27}{32} - \frac{\sqrt{217}}{32} \approx 0,383$.
- 31.** $x_1 = 2,9$, $x_2 = 2,892$, $x_3 = 2,89195$.
- 32.** (a) $L = [-1, 0] \cup [3, \infty)$; (b) $L = (-1, 0) \cup (3, \infty)$; (c) $L = \{1\}$; (d) $L = \mathbb{R}$; (e) $L = \emptyset$; (f) $L = \mathbb{R}$.
- 33.** (a) $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$; (b) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$; (c) $(-\infty, \frac{22}{5}) \cup (5, \infty)$;
 (d) $[\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{25}{2}}, -1] \cup (4, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{2}}]$; (e) $(-\frac{13}{2}, -4] \cup [3, \frac{11}{2})$; (f) $[-14, -9] \cup [1, 6]$.
- 34.** (a) $[-\frac{2}{3}, 0]$; (b) $[\frac{1}{4}, 2]$; (c) \emptyset ; (d) $(-2, -1]$.
- 35.** (a) $\langle 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \rangle$; (b) $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12} \rangle$;
 (c) $\langle 2,718; 4,113; 5,652; 7,389; 9,356; 11,582; 14,094; 16,919; 20,086; 23,624 \rangle$;
 (d) $\langle 0,368; 0,243; 0,177; 0,135; 0,1069; 0,0863; 0,0710; 0,0591; 0,0498; 0,0423 \rangle$;
 (e) $\langle 1; 1,260; 1,442; 1,587; 1,710; 1,817; 1,913; 2; 2,080; 2,154 \rangle$;
 (f) $\langle 1; 1,414; 1,442; 1,414; 1,380; 1,348; 1,320; 1; 297; 1,277; 1,259 \rangle$;
 (g) $\langle -0,368; 0,243; -0,177; 0,135; -0,107; 0,086; -0,071; 0,0591; -0,0498; 0,0423 \rangle$;
 (h) $\langle 0,667; 0,846; 1,193; 1,778; 2,743; 4,340; 6,996; 11,448; 18,963; 31,733 \rangle$.
- 36.** (a) $\langle 2, 6, 12, 20, 30 \rangle$; (b) $\langle 0,333; 0,583; 0,783; 0,95; 1,093 \rangle$;
 (c) $\langle 1,072; 2,220; 3,452; 4,771; 6,185 \rangle$; (d) $\langle 0,368; 0,611; 0,788; 0,923; 1,030 \rangle$;
 (e) $\langle 1; 2,260; 3,702; 5,290; 7,000 \rangle$; (f) $\langle -1; -0,5; -0,833; -0,583; -0,783 \rangle$;
 (g) $\langle -0,368; -0,125; -0,302; -0,166; -0,273 \rangle$;
 (h) $\langle 0,667; 1,067; 1,289; 1,407; 1,467 \rangle$.
- 37.** (a) 565; (b) -36; (c) 35; (d) 210.
- 38.** (a) 7; (b) $\frac{2}{7}$; (c) unbestimmt divergent; (d) bestimmt divergent gegen ∞ ; (e) 0.
- 39.** (a) unbestimmt divergent; (b) 0; (c) $e^2 \approx 7,38906$; (d) $e^{-2} \approx 0,135335$; (e) 0; (f) 1;
 (g) bestimmt divergent gegen $+\infty$; (h) 0.
- 40.** (a) 0; (b) $\frac{29}{6}$; (c) 0.
- 41.** (a) e^x ; (b) e^x ; (c) $e^{1/x}$.
- 42.** $a_n = 2 \cdot 1,1^{n-1}$; $a_7 = 3,543$.

43. $a_1 = 12 \cdot 0,7^{-6} = 102$; $a_n = 102 \cdot 0,7^{n-1}$.
44. $\langle s_n \rangle = \left\langle \frac{n(n-1)}{2} \right\rangle = \langle 0, 1, 3, \dots, 45 \rangle$ bzw. $\langle s_n \rangle = \langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, \dots, 100 \rangle$.
45. (a) $s_7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^7-1}{3-1} = 364,33$; (b) $s_7 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1/4)^7-1}{-1/4-1} = -0,400$; (c) $s_{10} = 110 \cdot \frac{1,1^{10}-1}{1,1-1} = 1753,12$;
(d) $s_\infty = 0,95 \cdot \frac{1}{1-0,95} = 19$.
46. Relative Wachstumsrate $q = \sqrt[15]{\frac{5}{4}} = 1,015$, verdoppelt im Jahre 2007.
47. (a) $180\,000 \cdot \frac{1,06^{21}-1}{1,06-1} = 7\,198\,690,77$; (b) $\frac{21}{2}(2 \cdot 180\,000 + 20 \cdot 12\,000) = 6\,300\,000$.
48. $12\,000 \cdot 1,06^5 = 16\,058,71$.
49. $p = q - 1 = \sqrt[15]{3} - 1 = 7,6\%$.
50. $q^8 = 1,05^{10} \Rightarrow p = q - 1 = 1,05^{\frac{10}{8}} - 1 = 6,29\%$, Endwert = $1,629 \times$ Startkapital.
51. 1982: $73\,792,43 \cdot 1,03^{-7} = 60\,000$, 2000: $73\,792,43 \cdot 1,03^{11} = 102\,145,98$.
52. $100\,000 \leq R \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10}-1}{1,05-1} \Rightarrow R \geq 75\,71,86$.
53. (a) $B_n = 18\,215,83$, $E_n = 50\,258,04$; (b) 28 571,43; (c) 20 Jahre.
54. (a) 17 529,42; (b) 10 Jahre; (c) 18 273,24.
55. $100\,000 \cdot 1,07^3 \cdot 1,035^{-3} = 110\,491,86$
56. $100\,000 \cdot (1 + (0,05 - 0,25 \cdot 0,05))^{10} \cdot 1,0375^{-10} = 100\,000$.
57. $n \geq (\ln(18\,000) - \ln(18\,000 - 100\,000(1,1125 - 1)))/\ln(1,1125) = 9,2$. Die Laufzeit muss mindestens 10 Jahre betragen.
58. 1 Verzinsungsperiode: $(1+p)^1 = 1,2 \Rightarrow p = 20\%$, 2 Verzinsungsperioden: $(1+\frac{p}{2})^2 = 1,2 \Rightarrow p = 19,1\%$, 12 Verzinsungsperioden: $(1+\frac{p}{12})^{12} = 1,2 \Rightarrow p = 18,4\%$ (n Verzinsungsperioden: $(1+\frac{p}{n})^n = 1,2$).
59. Der Barwert konvergiert für $n \rightarrow \infty$.
60. 1. Angebot: $B = 1\,000\,000$, $E = 1\,000\,000 \cdot 1,08^{10} = 2\,158\,925$,
2. Angebot: $B = 2\,000\,000 \cdot 1,08^{-10} = 926\,387$, $E = 2\,000\,000$,
3. Angebot: $B = 939\,411$, $E = 2\,028\,119$.
61. $400\,000 = R \cdot \frac{1,05^{10}-1}{1,05-1} \cdot 1,03^{10} + R \cdot \frac{1,03^{10}-1}{1,03-1} \Rightarrow R = 14\,100,64$.
62. $B_\infty = \frac{4500}{1,045-1} = 100\,000$.
63. (a) injektiv, nicht surjektiv; (b) injektiv, nicht surjektiv.
64. (a) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(9) = 98$; (b) $(f \circ g)(-9) = f(g(-9)) = f(28) = 839$;
(c) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 2$; (d) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) \approx 3,828$.
65. (a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $(f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2(x-1)$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$;
(b) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, \infty)$; $(f+g)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$, $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$,
 $(f \circ g)(x) = x + 1$;
(c) $D_f = [1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+2}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{x-1}(x+2)$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}} - 1$;
(d) $D_f = [0, \infty)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $(f+g)(x) = 1 + \sqrt{x} + \frac{2x+1}{x+2}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(2x+1)}{x+2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(x+2)}{2x+1}$, $(f \circ g)(x) = 1 + \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$;

$$(e) D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; (f + g)(x) = (x + 1)^2 + \frac{1}{x^2 - 1}, (f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{x-1}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1, (f \circ g)(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right)^2.$$

66. (a) $(f \circ g)(x) = (1 + x)^2$, $(g \circ f)(x) = 1 + x^2$, $D_f = D_g = D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$;
 (b) $(f \circ g)(x) = |x| + 1$, $(g \circ f)(x) = (\sqrt{|x| + 1})^2$, $D_f = D_{g \circ f} = [0, \infty)$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;
 (c) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+2|}}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{|x+1|}} + 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $D_g = D_{f \circ g} = [0, \infty)$, $D_{g \circ f} = (-1, \infty)$;
 (d) $(f \circ g)(x) = 2 + |x - 2|$, $(g \circ f)(x) = |x|$, $D_f = D_{g \circ f} = [0, \infty)$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;
 (e) $(f \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 2$, $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$, $D_f = D_g = D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$;
 (f) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2}$, $(g \circ f)(x) = 1 + x^2$, $D_f = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 (g) $(f \circ g)(x) = x^2$, $(g \circ f)(x) = \exp(\ln(x)^2) = x^{\ln x}$, $D_f = D_{g \circ f} = (0, \infty)$, $D_g = D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;
 (h) $(f \circ g)(x) = \ln(x^3)$, $(g \circ f)(x) = (\ln(x - 1))^3 + 1$, $D_f = D_{g \circ f} = (1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_{f \circ g} = (0, \infty)$.

67. $h(12) = f(g(12)) = f(1,5764) = 3,8059$.

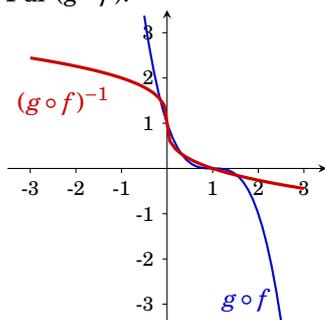
68. (a) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; (b) $(0, 2) \cup (2, \infty)$; (c) $[0, \infty)$; (d) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$;
 (e) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$; (f) $(-\infty, \infty)$; (g) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; (h) $(-\infty, \infty)$; (i) $(-\infty, \infty)$.

75. (a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; (b) $D_D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; (c) $D_f = [2, \infty)$; (d) $D_F = [\frac{2}{3}, \infty)$; (e) $D_g = (\frac{3}{2}, \infty)$;
 (f) $D_G = (-\infty, \frac{3}{2})$; (g) $D_f = [-2, 2]$; (h) $D_f = [-3, 3]$; (i) $D_g = (-\infty, 3)$; (j) $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$;
 (k) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; (l) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; (m) $D_f = \mathbb{R}$; (n) $D_f = \mathbb{R}$; (o) $D_f = \mathbb{R}$; (p) $D_g = \mathbb{R}$;
 (q) $D_f = \mathbb{R}$; (r) $D_F = \mathbb{R}$; (s) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; (t) $D_G = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

77. (a) $\boxed{18}$; (b) $\boxed{11}$; (c) $\boxed{1}$; (d) $\boxed{12}$; (e) $\boxed{9}$; (f) $\boxed{4}$; (g) $\boxed{6}$; (h) $\boxed{16}$; (i) $\boxed{10}$; (j) $\boxed{3}$; (k) $\boxed{8}$; (l) $\boxed{13}$;
 (m) $\boxed{15}$; (n) $\boxed{5}$; (o) $\boxed{14}$; (p) $\boxed{17}$; (q) $\boxed{2}$; (r) $\boxed{7}$.

78. (a) injektiv, nicht surjektiv, (b) injektiv, nicht surjektiv, (c) bijektiv, (d) nicht injektiv, nicht surjektiv, (e) nicht injektiv, surjektiv, (f) bijektiv. Beachten Sie, dass Definitionsmenge Bestandteil der Funktion sind.

79. Für $(g \circ f)$:



$$(g \circ f)(x) = (1 - x)^3,$$

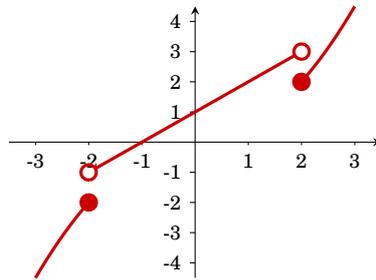
$$(g \circ f)^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$$

80. Hier sind die größtmöglichen Intervalle angegeben. Gültige Definitionsmengen sind aber auch alle Teilmengen. (Durch Vereinigung geeigneter Teilmengen entstehen unter Umständen auch gültige Definitionsmengen.)

- (a) $D = (-\infty, 0]$ oder $D = [0, \infty)$; (b) $D = (-\infty, -\frac{3}{2}]$ oder $D = [-\frac{3}{2}, 0]$ oder $D = [0, \frac{3}{2}]$ oder $D = [\frac{3}{2}, \infty)$; (c) $D = (-\infty, -1]$ oder $D = [-1, 0]$ oder $D = [0, 1]$ oder $D = [1, \infty)$; (d) $D = (1, \infty)$ oder $D = (-\infty, 1)$; (e) $D = (-\infty, 2]$ oder $D = [2, \infty)$; (f) $D = [0, \infty)$; (g) $D = \mathbb{R}$;
 (h) $D = (-\infty, 0]$ oder $D = [0, \infty)$.

81. (a) $x = -\frac{1}{3}(y + 4)$; (b) $x = y + 1$; (c) $x = -\frac{5}{2}(p - 4)$; (d) $p = \frac{1}{3}q - 2$; (e) $x = \frac{1}{3}(y^2 + 4)$;
 (f) $x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}$; (g) $x = \sqrt[5]{y}$; (h) $x = y^2$; (i) $x = 4 - y^2$.

82.



$$\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -1, \quad \lim_{x \uparrow -2} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ existiert nicht};$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1;$$

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = 2, \quad \lim_{x \uparrow 2} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ existiert nicht};$$

f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2 .

83. (a) $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$; (b) $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$;
(c) $\lim_{x \uparrow 1} x = \lim_{x \downarrow 1} x = 1$.

84. (a) $\frac{1}{2}$; (b) -4 ; (c) -1 ; (d) 0 ; (e) 5 ; (f) -5 ; (g) 0 ; (h) $-\infty$; (i) $-\frac{1}{5}$.

85. (a) 0 ; (b) 0 ; (c) ∞ ; (d) $-\infty$; (e) 1 .

86. (a) -2 ; (b) 0 .

87. Die Funktion sind stetig in

(a) D ; (b) D ; (c) D ; (d) D ; (e) D ; (f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; (g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

88. $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -1$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$. Nicht stetig an der Stelle 0. (Daher auch nicht differenzierbar.)

89. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$. Stetig im Punkt 1, aber nicht differenzierbar.

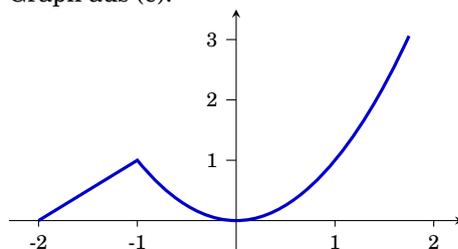
90. (a) $h = 2$; (b) $h = 0$; (c) $h = \frac{2}{5}$; (d) $h = 2$.

Δx	3	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	21	7	1	4,75	3,31

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 h + 3h^2 + h^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 + 3h + h^2 = 3.$$

92. Differenzenquotient: (a) $2ax + ah + b$; (b) $2a - 17$; (c) $2a + h + 1$;
(d) $-\frac{6}{(2(x+h)+1)(2x+1)}$.

93. differenzierbar in (a) \mathbb{R} ; (b) \mathbb{R} ; (c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; (e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Graph aus (e):

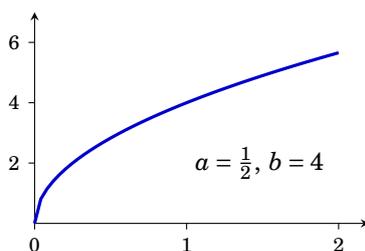


94. Durchschnittliche Wachstumsrate (Differenzenquotient): 0,25,
momentane Wachstumsrate 1958 (Differentialquotient, $x = 8$): 0,26.

95. (a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-5(x+h))-(2-5x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h}{h} = -5$;
 (b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(t+h)+1} - \frac{1}{t+1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{t+1-(t+h+1)}{(t+h+1)(t+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{(t+h+1)(t+1)} = -\frac{1}{(t+1)^2}$;
 (c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(y+h)^2} - \frac{1}{y^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2y-h}{y^2(y+h)^2} = -\frac{2y}{y^4} = -\frac{2}{y^3}$;
 (d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2(t+h)+1} - \frac{1}{2t+1} \right) = \dots = \frac{-2}{(2t+1)^2}$;
 (e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{y+h+1}{(y+h)^2} - \frac{y+1}{y^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{y^2+yh+2y+h}{y^2(y+h)^2} = -\frac{y^2+2y}{y^4} = -\frac{y+2}{y^3}$;
 (f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((x+h+1)^2 - (x+1)^2) = \dots = 2(x+1)$.
96. (a) 0; (b) 1 (die Funktion ist am Rand des Definitionsbereichs nicht differenzierbar);
 (c) 0; (d) überall differenzierbar.
97. Funktion und erste Ableitung müssen an den Stellen 1 (und -1) für beide Terme übereinstimmen: $a = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{4}$.
98. Die Kostenfunktion ist stetig. Sie ist in 50 nicht differenzierbar.
99. (a) $f'(x) = 27x^2 - 6x^{-\frac{1}{2}}$; (b) $h'(x) = 4x^3 - 4x$; (c) $f'(x) = 12x^3 + 8x - 4$;
 (d) $f'(y) = 2 + \frac{7}{y^2}$ (Kürzen!); (e) $g'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}t^{-\frac{5}{2}}$; (f) $g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;
 (g) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 0,6x^{-1,6}$; (h) $f'(x) = -0,4x^{-1,4} - 0,4x^{-0,6}$.
100. (a) $6x - 5 \sin(x)$; (b) $6x^2 + 2x$; (c) $1 + \ln(x)$; (d) $-2x^{-2} - 2x^{-3}$; (e) $\ln(2) \cdot 2^x$; (f) 1; (g) $18x - 6$;
 (h) $6x \cos(3x^2)$.
101. (a) $4x - 1$ (Kürzen!); (b) $\frac{3x^2+6x+1}{(x+1)^2}$;
 (c) $6e^{3x+1}(5x^2+1)^2 + 40e^{3x+1}(5x^2+1)x + \frac{3(x-1)(x+1)^2-(x+1)^3}{(x-1)^2} - 2$.
102. (a) $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$; (b) $\frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$;
 (c) $y'(t) = \frac{t^2-10t+35}{(t-5)^2}$; (d) $y'(u) = \frac{2(u^2-1)}{(u^2+u+1)^2}$;
 (e) $x'(u) = -\frac{1}{(\sqrt{u}-1)^2\sqrt{u}}$; (f) $t'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
103. (a) $y'(x) = 21(3x+5)^6$; (b) $y'(t) = -(5-2t)^{-\frac{1}{2}}$; (c) $h'(t) = t(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$;
 (d) $x'(y) = 18y^2(y^3+7)^5$; (e) $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+1)^6}$; (f) $g'(x) = \frac{-6x-3}{(x^2+x+1)^4}$; (g) $u'(x) = 6x(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}$;
 (h) $F'(x) = (x^2+1)(x^3+3x)^{-\frac{2}{3}}$; (i) $v'(u) = 2(1+u^2)^2(1+3u+7u^2)$.
104. (a) $f'(x) = \frac{(2-x)x}{e^x}$; (b) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$; (c) $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$; (d) $f'(x) = -\frac{1}{x+1}$;
 (e) $f'(x) = (3ax^2+2bx+c)e^{ax^3+bx^2+cx+d}$; (f) $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$;
 (g) $f'(x) = 2 \ln(x) + (\ln(x))^2$; (h) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$; (i) $f'(x) = \frac{2e^{(\ln(x))^2} \ln(x)}{x}$; (j) $f'(x) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$;
 (k) $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2+1} + 2x \ln(x^2+1)$; (l) $f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$; (m) $f'(x) = \left(-2 \left(\frac{3}{2} \right)^{x-2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right) x^{-3}$;
 (n) $f'(x) = \ln(a)a^x$; (o) $f'(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{x^3} \left(1 + 3x^3 \ln \left(\frac{1}{3} \right) \right)$.
105. Gleichung der Tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
 (a) $y = 1 - \frac{1}{2}x$; (b) $y = x - 1$; (c) $y = 1 - x$; (d) $y = 1$; (e) $y = 1 + \frac{3}{2}(x - 1)$;
 (f) $x = -1$ (Achtung: $f'(-1)$ ist existiert nicht (∞)).
106. Gleichung der Tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
 (a) $y = x$; (b) $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}(x - 1)$; (c) $y = 4 - 2(x + 1)$; (d) $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x - 2)$; (e) $y = 0$;
 (f) $y = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x + 1)$.
107. Gleichung der Tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
 (a) $y = \frac{5}{2} + 2(x - 1)$; (b) $y = 2$; (c) $y = \frac{1}{4}$; (d) $y = x$;
 (e) $x = 0$ (Achtung: $f'(-1)$ ist existiert nicht (∞)); (f) $y = \frac{1}{\ln(\frac{1}{2})}x$.

108. $h'(x) = 4e^{2x}(e^{2x} + 1)$.
109. (a) $y' = -\frac{1+\ln(x)}{x^2 \ln(x)^2}$; (b) $y' = -\frac{e^{-1/(x+1)}(2x+1)}{(x+1)^4}$; (c) $-\frac{2x^2+6x+5}{(x+1)^2(x+2)^2}$; (d) $y' = \frac{3^{1/x}(\ln 3)^2}{x^3}$;
 (e) $y' = e^{-x}(\frac{1}{2}x^2 - x - 1)$; (f) $y' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.
110. (a) $f'''(x) = -x(x^4 - 9x^2 + 12)e^{-x^2/2}$; (b) $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$; (c) $f''(x) = -\frac{x^4+16x^2-16}{4x^{11/2}}e^{-1/x^2}$;
 (d) $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$; (e) $f'''(x) = \frac{3\ln(x)-2}{8x^{5/2}}$; (f) $f''(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$.
111. (a) $f''(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^{5/2}(x+1)^{3/2}}$; (b) $f'''(x) = -\frac{12}{(x-1)^4}$; (c) $f''(x) = \frac{3x^2+18x+11}{4(x-1)^3(x+1)^{3/2}}$;
 (d) $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$; (e) $f''(x) = -\frac{6x^4+16x^3+12x^2+2}{(x+1)^3}$; (f) $f'''(x) = 6$; (g) $f''(x) = \frac{6x^2-6x+2}{x^3(x-1)^3}$.
112. (a) $R'(x) = 1 - 0,02x$; (b) $R'(x) = 0,1 - 0,002x - 0,000025x^3$;
 (c) $R'(x) = 5 - 0,025x^3$; (d) $R'(x) = 100 - 3 \ln(5)x^2 - \frac{7}{2} \ln(5)x^{5/2}$.
113. Durchschnittliche Kosten: $\frac{C(x)}{x}$.
 (a) $C'(x) = 30 - 0,2x + 0,006x^2$, $C''(x) = -0,2 + 0,012x$, $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = 0,004 + \frac{1000}{x^3}$;
 (b) $C'(x) = 18 + 0,02x - 2 \ln(x)$, $C''(x) = 0,02 - \frac{2}{x}$, $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{2}{x^2} + \frac{1000}{x^3}$.
114. (a) konvex; (b) konkav; (c) konkav; (d) konvex falls $\alpha \geq 1$ und $\alpha \leq 0$, konkav falls $0 \leq \alpha \leq 1$.
115. (a) $f(x)$: monoton fallend in $(-\infty, -4] \cup [0, 3]$, monoton steigend in $[-4, 0] \cup [3, \infty)$. Konvex in $(-\infty, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{37}}{3}] \cup [-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{37}}{3}, \infty)$, konkav in $[-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{37}}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{37}}{3}]$;
 (b) $g(x)$: monoton fallend in $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$, monoton steigend in $[0, 6]$. Konvex für $x \geq 9$, konkav für $x \leq 9$.
116. Monoton fallend in $[-1, 3]$, monoton steigend in $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$;
 Konkav in $(-\infty, 1]$, konvex in $[1, \infty)$.
117. (a) fallend in $[2, 4]$, steigend in $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$,
 konkav in $(-\infty, 3]$, konvex in $[3, \infty)$;
 (b) fallend in $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$, steigend in $[-2, 0] \cup [2, \infty)$,
 konkav in $[-\sqrt{\frac{12}{5}}, \sqrt{\frac{12}{5}}]$, konvex in $(-\infty, -\sqrt{\frac{12}{5}}] \cup [\sqrt{\frac{12}{5}}, \infty)$;
 (c) fallend in $[-1, 1]$, steigend in $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$,
 konkav in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}] \cup [0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$, konvex in $[-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0] \cup [\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$;
 (d) fallend in $[\frac{9}{4}, \infty)$, steigend in $(-\infty, \frac{9}{4}]$, konkav in \mathbb{R} , nirgendwo konvex;
 (e) fallend in $(-\infty, 0]$, steigend in $[0, \infty)$,
 konkav in $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, konvex in $[-1, 1]$;
 (f) steigend in \mathbb{R} , konkav in $(-\infty, 0]$, konvex in $[0, \infty)$.

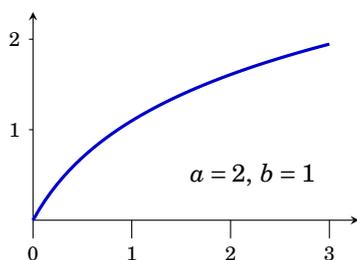
118.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:

$$f''(x) = \underbrace{ba}_{>0} \underbrace{(a-1)}_{<0} \underbrace{x^{-a-1}}_{>0} < 0.$$

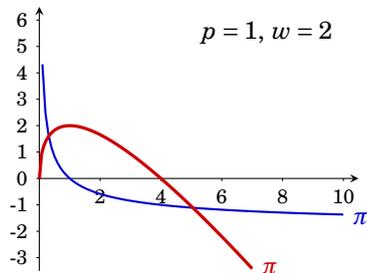
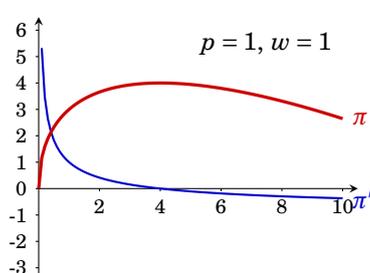
119.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:
 $f''(x) = -a^2 b (ax + 1)^{-2} < 0$,
 da $a, b, x > 0$.

120. (a) $x = -\frac{1}{4}$ ist lokales Maximum; (b) $x = 0$ ist lokales Maximum, $x = 1$ ist lokales Minimum; (c) $x = 0$ ist lokales Minimum, $x = -\frac{2}{3}$ ist lokales Maximum; (d) $x = \frac{1}{2}$ ist Minimum ($D = (0, \infty)$); (e) keine stationären Punkte, f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar; (f) $x = \frac{1}{6}$ ist lokales Maximum, $x = 1$ ist lokales Minimum.
121. (a) Lokales Minimum in $x = 3$; (b) Lokales Minimum in $x = 1$, lokales Maximum in $x = -1$; (c) Lokales Maximum in $x = 0$.
122. (a) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum; (b) globales Maximum in $x = \frac{1}{4}$, kein globales Minimum; (c) globales Minimum in $x = 0$, kein globales Maximum; (d) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum.
123. (a) Globales Maximum in $x = 12$, globales Minimum in $x = 8$; (b) globales Maximum in $x = 6$, globales Minimum in $x = 3$; (c) globales Maximum in $x = 0$, kein globales Minimum.
124. Globale Maxima in -2 und 2 , globale Minima in -1 und 1 .
125. Globales Maximum in 3 , globales Minimum in 1 ; die Funktion ist in $[0, 3]$ weder konvex noch konkav.
126. (a) globale Maxima in -1 und 2 , globales Minimum in $\frac{1}{2}$; (b) globales Maximum in 4 , globales Minimum in -3 ; (c) globale Maxima in $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$, globales Minimum in 1 ; (d) globales Maximum in $\frac{1}{2}$, globales Minimum in 1 ; (e) globales Minimum in $\frac{1}{4}$, globales Maximum in 2 .
127. (a) globales Maximum in 3 , globales Minimum in 1 ; (b) globales Maximum in 1 , globales Minimum in 0 ; (c) globales Maximum in $\sqrt{2}$, globales Minimum in 0 ; (d) globales Maximum in 1 , globales Minimum in $\frac{7}{2}$; (e) globales Maximum in $\frac{3}{2}$, globales Minimum in 1 .
128. Globales Maximum bei 20 Einheiten.

129.



(c) $\pi(x) = 4p\sqrt{x} - wx$. kritische Punkte: $x_0 = 4\frac{p^2}{w^2}$, $\pi''(x) < 0$, $\Rightarrow x_0$ ist Maximum, für $p = 1$ und $w = 1$: $x_0 = 4$; (d) analog, das Maximum ist bei $x = 1$.

130. (a) $\frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $-\frac{3}{x} + c$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$; (d) $2\sqrt{x} + c$; (e) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$; (f) $\frac{1}{3\ln(2)}2^{3x} + c$; (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + c$; (h) $5x + c$; (i) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$; (j) $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + c$.

- 131.** (a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$; (b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 6\ln|x+1| + c$; (c) $e^x + \frac{1}{e+1}x^{e+1} + ex + \frac{1}{2}x^2 + c$;
 (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$; (e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + c$.
- 132.** (a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$; (b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$; (c) $2\ln|x| + c$; (d) $-\cos(x) - 3\sin(x) + c$.
- 133.** (a) $2(x-1)e^x + c$; (b) $-(x^2+2x+2)e^{-x} + c$; (c) $\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$; (d) $\frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c$;
 (e) $\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + c$; (f) $2x\sin(x) + (2-x^2)\cos(x)$.
- 134.** (a) $z = x^2: \frac{1}{2}e^{x^2} + c$; (b) $z = x^2 + 6: \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + c$; (c) $z = 3x^2 + 4: \frac{1}{6}\ln|3x^2+4| + c$;
 (d) $z = x+1: \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$; (e) $z = \ln(x): \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$ (f) $z = \ln(x): \ln|\ln(x)| + c$;
 (g) $z = x^3 + 1: \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + c$; (h) $z = 5-x^2: -\sqrt{5-x^2} + c$;
 (i) $z = x+3: 7\ln|x-3| + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$; (j) $z = x-8: \frac{2}{5}(x-8)^{5/2} + \frac{16}{3}(x-8)^{3/2} + c$.
- 135.** (a) $\frac{3}{2}x^2 + 4\ln|x| + c$; (b) $e^{2x}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) + c$; (c) $\frac{1}{9}(6x+1)e^{3x}$; (d) $-(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}} + c$; (e) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + c$;
 (f) $-\frac{1}{2}\ln|3-2x| + c$; (g) $\frac{1}{3}e^{3x-5} + c$; (h) $\frac{1}{2}e^{t^2} + c$; (i) $\frac{1}{4}(\ln(x))^4 + c$; (j) $\sqrt{1+y^2} + c$.
- 136.** (a) $4\sqrt{x} + 2x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + c$; (b) $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + c$; (c) $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$;
 (d) $-\frac{2}{3}x^{-3/2} - \frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + 2x + c$; (e) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + c$; (f) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + c$.
- 137.** $-\ln|\cos(x)| + c$.
- 138.** $C(x) = 2000 + 30x - 0,025x^2$.
- 139.** Kostenfunktion: $C(x) = 2500 + 24x - 0,015x^2 + 0,002x^3$;
 Fixkosten: $C(0) = 2500$; Gesamtkosten von 500 Stück: $C(500) = 260750$.
- 140.** $R(x) = 4x - 0,005x^2$.
- 141.** $C(x) = 1000 + 10x - 0,05x^2 + 0,001x^3$; Fixkosten: $C(0) = 1000$.
- 142.** (a) $\int_0^1 f(x)dx = 1 \cdot (0,2-0) + 0,5 \cdot (0,5-0,2) + 2,5 \cdot (0,6-0,5) + 3,5 \cdot (0,7-0,6) + (-3,5) \cdot (1-0,7) = -0,1$; (b) $\int_0^1 f(x)dx = \dots = -0,55$.
- 143.** $\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}(5+0) \cdot (2-0) + \frac{1}{2}(2+5) \cdot (6-2) + \frac{1}{2}(-5+2) \cdot (10-6) = 13$.
- 144.** (a) 39; (b) $3e^2 - 3 = 19,17$; (c) 93; (d) $-\frac{1}{6}$ (Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten!);
 (e) $\frac{1}{2}\ln(8) \approx 1,0397$.
- 145.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{781}{10}$; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0,4581$; (e) $1 - e^{-2} \approx 0,8647$; (f) $\frac{27}{4}$; (g) 1;
 (h) $2e^2 - 2 \approx 12,778$; (i) $\frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9} \approx 1,07061$.
- 146.** (a) $\int_0^\infty -e^{-3x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -e^{-3x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$;
 (b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{2}{\sqrt{x^3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} 8 - 8t^{1/2} = 8$;
 (c) $= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^{t^2+1} \frac{1}{z} dz = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\ln(t^2+1) - \ln(1)) = \infty$,
 das uneigentliche Integral existiert nicht.
- 147.** (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{1+t} + 1 = 1$; (b) $\lim_{t \rightarrow \infty} -(2+2t+t^2)e^{-t} + 2 = 2$;
 (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t^2/2} + 1 = 1$;
 (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) - \ln(1+t) - \frac{\ln(t)}{1+t} + \ln(2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \frac{\ln(t)}{1+t} + \ln(2) = \ln(2)$.
- 148.** (a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2)) = \infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
 (b) $\lim_{t \rightarrow 1} \ln(\ln(2)) - \ln(\ln(t)) = -\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
 (c) $\lim_{t \rightarrow 0} -1 + \frac{1}{t} = \infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
 (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} + 1 = 1$; (e) $\lim_{t \rightarrow 0} 2 - 2\sqrt{t} = 2$;
 (f) $\lim_{t \rightarrow \infty} 2\sqrt{t} - 2 = \infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht.

149. (a) Es müssen drei Fälle unterschieden werden:

$$\alpha < -1: \int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right) = \infty, \text{ da } \alpha+1 < 0 \text{ ist;}$$

$$\alpha = -1: \int_0^1 x^{-1} dx = \lim_{t \rightarrow 0} (\ln(1) - \ln(t)) = \infty;$$

$$\alpha > -1: \int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha+1};$$

Das uneigentliche Integral existiert genau dann, wenn $\alpha > -1$;

$$(b) \text{ analog: } \int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha} \text{ falls } \alpha < -1 \text{ und } \infty \text{ sonst;}$$

$$(c) \int_0^\infty x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 x^\alpha dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s x^\alpha dx = \infty \text{ f\"ur alle } \alpha.$$

Symbolverzeichnis

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε oder ϵ	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ oder ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	ϕ oder φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

1. Mengen und Abbildungen

$a \in A$	a ist Element von A	1
$a \notin A$	a ist nicht Element von A	1
\emptyset	leere Menge	2
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen	2
\mathbb{N}_0	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$	2
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen	2
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen	2
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	2

$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	2
(a, b)	offenes Intervall	2
$[a, b)$	halboffenes Intervall	2
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen	2
$\{x \mid P(x)\}$	Menge aller Elemente x mit Eigenschaft $P(x)$	2
$A \cap B$	Durchschnittsmenge	3
$A \cup B$	Vereinigungsmenge	3
$A \setminus B$	Mengendifferenz	3
\overline{A}	Komplementärmenge	3
$A \times B$	Produktmenge	3
$f: D \rightarrow W$	Abbildung f von D nach W	6
$f: x \mapsto y$	Abbildung f , x wird abgebildet auf y	6
$f(x)$	Funktionsterm der Funktion f in der Variable x	6
$g \circ f$	zusammengesetzte Funktion	7

2. Terme, Gleichungen und Ungleichungen

$\sum_{i=1}^n a_i$	Summensymbol, Summe über a_i von $i = 1$ bis $i = n$	13
$\prod_{i=1}^n a_i$	Produktsymbol, Produkt über a_i von $i = 1$ bis $i = n$	13
$ x $	(Absolut-)Betrag von x	14
x^n	x hoch n , x zur n -ten Potenz	14
\sqrt{x}	(Quadrat-)Wurzel von x	14
$\sqrt[n]{x}$	n -te Wurzel von x	14
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient, n über k	16
$n!$	Fakultät von n	16

$\log_a(x)$	Logarithmus zur Basis a von x	19
e	Eulersche Zahl	19
$\ln(x)$	natürlicher Logarithmus	19
$a = b$	a ist gleich b	20
$a \leq b$	a ist kleiner (oder) gleich b	27
$a < b$	a ist kleiner b	27
$a > b$	a ist größer b	27
$a \geq b$	a ist größer (oder) gleich b	27

3. Folgen und Reihen

$\langle a_i \rangle_{i=1}^n$	Folge	35
$\langle a_n \rangle \rightarrow a$	$\langle a_n \rangle$ konvergiert (gegen a)	37
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Grenzwert (Limes) der Folge $\langle a_n \rangle$	37

4. Reelle Funktionen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Grenzwert von f an der Stelle x_0	60
$\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$	rechtsseitiger Grenzwert von f an der Stelle x_0	60

$\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$	linksseitiger Grenzwert von f an der Stelle x_0	60
--------------------------------	---	----

5. Differentialrechnung

Δx	Änderung in der Variable x	69
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	Differenzenquotient	69
$\left. \frac{df}{dx} \right _{x_0}$	Differentialquotient an der Stelle x_0	70
$\frac{df(x_0)}{dx}$	Differentialquotient an der Stelle x_0	70
$f'(x_0)$	Ableitung an der Stelle x_0	70
$f'(x)$	erste Ableitung(sfunktion) von f	74
$f''(x)$	zweite Ableitung von f	76
$f'''(x)$	dritte Ableitung von f	76
$f^{(n)}(x)$	n -te Ableitung von f	76

6. Stammfunktion und Integral

$\int_a^b f(x) dx$	Integral von a bis b von f	96
$F(x) \Big _a^b$	$= F(b) - F(a)$	96

Index

- Abbildung, *siehe* Funktion
Abbildung, **6**, 6–8, **35**
abgeschlossenes Intervall, *siehe* Intervall
abhängige Variable, **6**
Ableitung, **26**, **70**, **74**, 69–76
 n-te, **76**
 erste, **74**
 höhere, **76**
 wichtiger Funktionen (Tab. 5.1), **74**
 zweite, **76**
Absolutbetrag, **14**, **23**, **29**
Abzinsung, **41**
algebraische Gleichung, *siehe* Gleichung
alternierend, *siehe* Folge
Änderungsrate einer Kenngröße, **71**
Anstieg, **58**
Äquivalenzumformung, **21**, **27**
Argument, *siehe* Funktion
arithmetische Folge, *siehe* Folge
arithmetische Reihe, *siehe* Reihe
arithmetisches Mittel, *siehe* Mittel
Aufzinsungsfaktor, **41**

Barwert, *siehe* Rente, **43**
beschränkt, *siehe* Folge oder Funktion
bestimmtes Integral, **97**
bijektiv, **6**, **8**, **55**, 55–58, **60**
Bild, *siehe* Funktion
Bildmenge, **49**
Binomialkoeffizient, **16**
binomischer Lehrsatz, **16**
Bleistift, **60**, **62**
Bruchterm, **18**, **28**
 Addieren, **18**
 Dividieren, **18**
 Doppelbruch, **18**
 Erweitern, **18**
 Kürzen, **18**
 Multiplizieren, **18**
 Nenner, **18**
 Rechenfehler, **19**
 Rechenregeln (Tab. 2.2), **18**
 Zähler, **18**
Bruchzahlen, *siehe* rationale Zahlen, **11**
Bruttoinlandsprodukt, **86**

Cartesisches Produkt, **4**
Cosinus, **58**

Definitionsmenge, **6**
Definitionsbereich, **18**, **54**, **62**, **80**, **82**, **84**, **98**
 einer Gleichung, *siehe* Gleichung
 einer Ungleichung, *siehe* Ungleichung
 eines Terms, *siehe* Term
Definitionsmenge, **7**, **49**, **50**, **58**, **60**, **74**
dekadischer Logarithmus, *siehe* Logarithmus
Dezimaldarstellung, *siehe* Zahlen
Dezimalpunkt, **12**
Dezimalzahlen, *siehe* Zahlen
Differential, **71**
Differentialquotient, **70**, 69–74, **74**
Differentiationsregeln (Tab. 5.2), **75**
Differenzenquotient, **69**
differenzierbar, **26**, **70**, **76**, **78**, **82**, **83**
 nicht differenzierbar, **72**

- Differenzieren einer Funktion, **74**
 Differenzmenge, *siehe* Mengenverknüpfungen
 disjunkt, **3**
 Diskontierung, **41**
 divergente Folge, *siehe* Folge
 Division
 von Polynomen, *siehe* Polynom
 Durchschnitt zweier Mengen, *siehe* Mengenverknüpfungen

e (Eulersche Zahl), **11**, **19**
 echte Teilmenge, **3**
 EDV, **12**
 Einheitsfunktion, **7**
 Element, **1**
 elementare Funktionen (Tab. 4.1), **58**
 Endwert, *siehe* Rente
 Erlösfunktion, **88**
 Eulersche Zahl, **19**
 Exponent, **19–20**
 Rechenregeln (Tab. 2.3), **20**
 Exponentialfunktion, **58**
 Exponent, *siehe auch* Zahlen, Dezimaldarstellung
 Exponent, *siehe auch* Potenz
 Extremum, **80**, **80–85**
 globales, **80**
 lokales, **51**, **80**
 Extremwerte, *siehe* Extremum

 Faktor, **16**
 Faktorisieren, *siehe* Polynom
 Fakultät, **16**
 Festkommaformat, *siehe* Zahlen, Dezimaldarstellung
 Finanzmathematik, **40**
 Flächeninhalt, **96**
 Folge, **26**, **35**, **35–40**, **60**
 alternierend, **36**
 arithmetische (Tab. 3.4), **40**
 beschränkt, **36**
 Definition
 aufzählendes Verfahren, **35**
 Bildungsgesetz, **35**
 Rekursion, **35**
 divergent, **38**
 bestimmt, **38**
 unbestimmt, **38**
 Eigenschaften (Tab. 3.1), **36**
 geometrische, **41**
 (Tab. 3.4), **40**
 graphische Darstellung, **36**
 Grenzwert, **37**, **37–40**, **60**, **61**
 Rechenregeln (Tab. 3.3), **39**
 Grenzwerte (Tab. 3.2), **39**
 konvergent, **37**
 konvergieren, **26**, **37**, **60**
 Limes, **37**
 monoton fallend, **36**
 monoton steigend, **36**
 Partialsumme, **36**
 reelle, **49**
 Teilsumme, **36**, **36**
 Folgeglied, **35**
 Fundamentalsatz der Algebra, **17**
 Funktion, **6**, **6–8**, **59**, **60**, **62**, **70**, **74**,
 76, **80**, **80**
 Ableitung, *siehe* Ableitung
 Argument, **6**, **59**, **60**
 bijektiv, *siehe* bijektiv
 Bild, **6**, **59**
 Definitionsmenge, *siehe* Definitionsmenge
 differenzierbar, *siehe* differenzierbar
 Graph, *siehe* Graph
 Skizze, **52**
 Grenzwert, **60**, **60–62**, **84**
 linksseitiger, **60**
 Rechenregeln (Tab. 4.2), **61**
 rechtsseitiger, **60**
 identische, *siehe* Einheitsfunktion
 injektiv, *siehe* injektiv
 konkav, *siehe* konkav
 konvex, *siehe* konvex
 Limes, **60**
 monoton fallend, **76**, **76–78**, **78**
 monoton steigend, **76**, **76–78**
 rationale, *siehe* rationale Funktion
 reelle, **7**
 stetig, *siehe* stetig
 surjektiv, *siehe* surjektiv
 Urbild, **6**, **6**, **8**, **55**

- Wertemenge, *siehe* Wertemenge
 Zuordnungsvorschrift, *siehe* Zuordnungsvorschrift
 zusammengesetzte, **7**
- Funktionen, 49–62
 Funktionsterm, **6**
- ganze Zahlen, *siehe* Zahlen, **11**
 geometrische Folge, *siehe* Folge
 geometrische Reihe, *siehe* Reihe
 geometrisches Mittel, *siehe* Mittel
- Gleichung, **20**, 20–26
 algebraische, **25**
 Definitionsbereich, **20**, **24**
 Grundmenge, **20**
 Lösungsmenge, **20**
 lineare, **22**
 mit Absolutbetrag, **23**
 mit Exponenten, **23**
 mit Logarithmus, **24**
 Probe, **21**, **24**
 quadratische, **25**
 Wurzelgleichung, **24**
- Gleichungssystem, **21**
- Gleitkommaformat, *siehe* Zahlen, Dezimaldarstellung
- globales Maximum, *siehe* Maximum
 globales Minimum, *siehe* Minimum
- Grad, **15**
- Graph, **50**, 50–53, **55**, **59**, **60**, **62**, **76**, **78**, **81**, **96**
 „Knick“, **72**
- Grenzübergang, **42**
- Grenzkosten, **89**
- Grenzwert, **70**, **98**
 einer Folge, *siehe* Folge
 einer Funktion, *siehe* Funktion
- Grundintegral, **94**
- Grundintegrale (Tab. 6.1), **94**
- Grundmenge, *siehe* Gleichung
- halboffenes Intervall, *siehe* Intervall
- Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, **97**
- hinreichende Bedingung, **83**
- Horizontalentest, **55**
- Index, **12**
- Inflation, **41**
- injektiv, **6**, **55**, 55–58
- Integral, **96**, 96–99
 bestimmtes, **97**
 unbestimmtes, *siehe* Stammfunktion
 uneigentliches, **98**, 98–99
- Integrationskonstante, **94**
- Integrationsverfahren, **94**
- Integrationsverfahren (Tab. 6.2), **94**
- Integrationsverfahren (Tab. 6.3), **98**
- Integrieren, **94**
 durch Substitution, **94**, **98**
 partielles, *siehe* partielles Integrieren
- Intervall, **7**, **82**
 abgeschlossenes, **2**
 halboffenes, **2**
 offenes, **2**
- inverse Funktion, **8**, **58**, 58–60
 Existenz, **59**
 Graph, **59**
- irrationale Zahlen, **11**
- Komma, **12**
- Komplementärmenge, *siehe* Mengenverknüpfungen
- konkav, **78**, 78–80, **81**, **82**
- Konstante, **12**
- konvergente Folge, *siehe* Folge
- konvergieren, *siehe* Folge
- Konversion, **43**
- konvex, **78**, 78–80, **81**, **82**
- Kostenfunktion, **49**, **80**, **86**
- Kredit, **23**, **43**
- Kreis, **12**, **22**
- kritischer Punkt, **78**, **82**
- Krümmung, **78**
- Kurve, **50**
- leere Menge, *siehe* Menge
- Limes, *siehe* Grenzwert
- lineare Funktion, **53**, **58**, **71**
 Anstieg, **58**
- linearer Term, **18**
- Linearfaktor, *siehe* Polynom
- Logarithmus, **19**, 19–20, **23**, **58**

- Basis, **19**
- dekadischer, **19**
- natürlicher, **19**
- Rechenregeln (Tab. 2.3), **20**
- Logarithmusfunktion, **58**
- lokales Maximum, *siehe* Maximum
- lokales Minimum, *siehe* Minimum

- Mantisse, *siehe* Zahlen, Dezimaldarstellung
- marginale Kosten, **89**
- Maximum, 80–85
 - globales, **80, 84**
 - lokales, **80, 82**
- 1. Mediane, **59**
- Menge, **1, 1–5**
 - Definition
 - aufzählendes Verfahren, **1**
 - beschreibendes Verfahren, **2**
 - leere, **2, 25**
 - Obermenge, **2**
 - Verknüpfungen, *siehe* Mengenverknüpfungen
 - wichtige Mengen (Tab. 1.1), **2**
- Mengen
 - Gesetz von de Morgan, **5**
 - Venn-Diagramm, **2**
- Mengenverbindungen
 - Rechenregeln (Tab. 1.3), **5**
- Mengenverknüpfungen
 - Differenz, **3**
 - Durchschnitt, **3**
 - Komplement, **3**
 - Produkt, **3**
 - Vereinigung, **3**
- Mengenverknüpfungen (Tab. 1.2), **3**
- Minimum, 80–85
 - globales, **80, 84**
 - lokales, **80, 82**
- Mittel
 - arithmetisches, **40**
 - geometrisches, **40**
- Monom, **15, 18**
 - Grad, **15**
- monoton fallend, *siehe* Folge oder Funktion
- monoton steigend, *siehe* Folge oder Funktion
- de Morgan
 - Gesetz von, **5**
- \mathbb{N} (natürliche Zahlen), **2, 11**
- natürliche Zahlen, *siehe* Zahlen, **11**
- natürlicher Logarithmus, *siehe* Logarithmus
- Newtonverfahren, **26**
- notwendige Bedingung, **83**
- Nullstelle
 - eines Polynoms, *siehe* Polynom
- \emptyset (leere Menge), **2**
- Obermenge, *siehe* Menge
- offenes Intervall, *siehe* Intervall

- Partialsumme, *siehe* Folge
- partiell integrieren, **94, 98**
- π , **11**
- Polynom, **15, 15–17, 18, 25, 27, 58**
 - Division, **17, 25**
 - Faktorisieren, **16**
 - Grad, **15, 25**
 - Linearfaktor, **17, 17, 25**
 - Multiplikation, **16**
 - Nullstelle, **17, 18, 25, 58**
- Potenz, **12, 14, 19, 24**
 - Basis, **14, 19**
 - Exponent, **14, 23**
 - Rechenregeln (Tab. 2.1), **15**
- Potenzfunktion, **58**
- Potenzieren, **14, 24**
- Probe, *siehe* Gleichung
- Produktmenge, *siehe* Mengenverknüpfungen
- Produktsymbol, **13**

- \mathbb{Q} (rationale Zahlen), **2, 11**
- quadratische Gleichung, *siehe* Gleichung
- Quadratwurzel, **14**

- \mathbb{R} (reelle Zahlen), **2, 11**
- rationale Funktion, **58**
- rationale Zahlen, *siehe* Zahlen, **11**
- rationaler Term, *siehe* Bruchterm

- reelle Funktion, *siehe* Funktion, *siehe* Funktion, reelle
- reelle Zahlen, *siehe* Zahlen, **11**
- Reihe, **36**, 36–37
- arithmetische, **40**
 - geometrische, **40**, **42**
- Rekursion, *siehe* Folge, Definition
- Rente, **42**
- Barwert, **12**, **42**
 - Endwert, **42**
 - ewige, **42**
 - nachschüssig, **42**
 - vorschüssig, **42**
- Rentenrechnung, 42–43, **43**
- Restschuld, **44**
- Riemann-Integral, **96**
- Σ (Summensymbol), **13**
- Sekante, **71**, **78**
- singulärer Punkt, **82**
- Sinus, **58**
- Sprungstelle, **62**, **72**
- Stammfunktion, **93**, 93–95, **96**
- stationärer Punkt, **81**
- stetig, **28**, **62**, **62**, **62**, **96**
- Stetigkeit, **62**
- Substitution, *siehe* Integrieren durch Substitution
- Summenregel
- Integration, **94**, **98**
- Summensymbol, **13**, **13**
- surjektiv, **6**, **55**, 55–58
- Tangente, **71**, **76**, **78**, **81**
- Steigung, **71**
- Taschenrechner, **12**
- Teilmenge, **2**, **7**
- Teilsumme, *siehe* Folge
- Term, **12**, **20**
- Definitionsbereich, **12**, **20**, **27**
- Tilgungsplan, **44**
- Tilgungsrechnung, 43–44
- Treppenfunktion, **96**
- Umkehrabbildung, *siehe* inverse Funktion
- unabhängige Variable, **6**
- unbestimmtes Integral, **94**, *siehe* Stammfunktion, **97**
- uneigentliches Integral, *siehe* Integral
- Ungleichheitszeichen, **27**
- Ungleichung, **27**
- Definitionsbereich, **27**
 - Lösungsmenge, **27**
 - lineare, **27**
 - mit Absolutbetrag, **29**
 - mit Exponenten, **27**
 - Polynomungleichung, **27**
- Unstetigkeitsstelle, **62**, **72**
- Urbild, *siehe* Funktion
- Variable, **12**
- Venn-Diagramm, *siehe* Mengen
- Vereinigung von Mengen, *siehe* Mengenverknüpfungen
- Verzinsung, **41**
- Verzinsungsperiode, **41**
- Wendepunkt, **51**, **80**
- Wertemenge, **6**, **7**, **49**, **58**, **60**
- Wertetabelle, **50**, **51**
- Winkelfunktion, **58**
- Wurzel, **14**
- Rechenregeln (*Tab. 2.1*), **15**
- Wurzelfunktion, **58**
- Wurzelgleichung, *siehe* Gleichung
- Wurzelziehen, **14**, **24**
- x -Achse, **50**, **60**
- xy -Ebene, **50**
- \mathbb{Z} (ganze Zahlen), **2**, **11**
- Zahlen, 11–12, **12**
- Dezimaldarstellung, **11**, **12**
 - endliche, **11**
 - Exponent, **12**
 - Festkommaformat, **12**
 - Gleitkommaformat, **12**
 - Mantisse, **12**
 - periodische, **11**
 - unendliche, **11**
- Dezimalzahlen, **11**
- ganze, **2**, **11**
 - irrationale, **11**
 - komplexe, **17**

- natürliche, 2, 11
- rationale, 2, 11
- reelle, 2, 11
- Zahlenebene, 50
- Zinsenrechnung, 41
- Zinssatz, 41–43
- Zuordnungsvorschrift, 6
- Zuordnungsvorschrift, 49, 54, 58
- zusammengesetzte Funktion, *siehe* Funktion