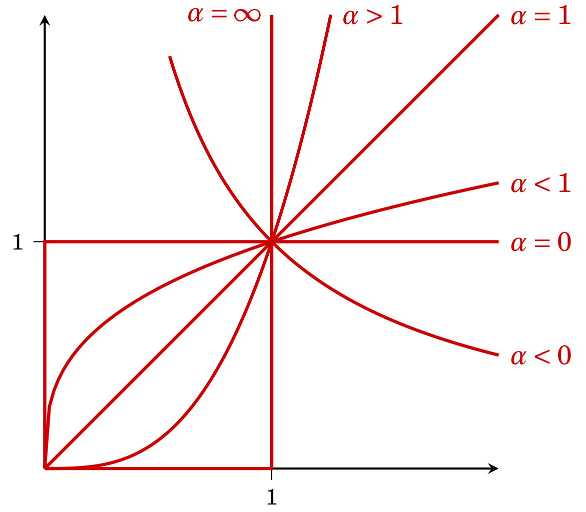
Mathematik Grundlagen

Josef Leydold



8. September 2020
Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien

Danksagung

Ich danke allen Personen, die mich auf Fehler im Skriptum aufmerksam gemacht haben.

Insbesondere danke ich Frau Ursula Doleschal und Frau Kira Zatsepina für Korrektoren und Ergänzungen im russischen Teil des Kleines Wörterbuchs.

© 2012 Josef Leydold · Institute for Statistics and Mathematics · WU Wien

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/at/ or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Geiz lehrte mich zu rechnen.
Seneca, um 4 v.Chr. bis 65 n.Chr.

Mathematik ist die Sprache zur Beschreibung quantitativer und qualitativer Zusammenhänge in der Ökonomie. Die Aufgabe der von uns angebotenen Lehrveranstaltungen ist es, die für Ihr Studium wichtigsten Elemente dieser Sprache zu vermitteln. Wir müssen dabei jedoch gewisse mathematische Grundkenntnisse voraussetzen. Diese Grundfertigkeiten sollten Sie bereits in Ihrer Schulzeit, spätestens aber in den Einführungslehrveranstaltungen Ihres Studiums, erworben haben. Aus verschiedensten Gründen (exogene Faktoren sind etwa unterschiedliche Lehrpläne an verschiedenen höheren Schulen, unterschiedliche Gewichtung des Lehrstoffes in einzelnen Schulen) variieren diese Vorkenntnisse jedoch sehr stark.

Dieses Skriptum gibt einen Überblick über diese Voraussetzungen. Der hier beschriebende Stoff wird in den weiteren Lehrveranstaltungen in Mathematik und Statistik als bekannt vorausgesetzt und ist somit auch prüfungsrelevant. Das Skriptum bietet daher der oder dem Studierenden die Möglichkeit, anhand der vielen Übungsbeispiele eine Standortbestimmung ihrer bzw. seiner Vorkenntnisse zu machen. Es enthält außerdem eine Zusammenfassung des notwendigen Wissens zum Lösen der Übungsbeispiele. Es bietet somit auch die Möglichkeit, eventuell vorhandene Wissenslücken zu beheben.

Der Lehrstoff in diesem Skriptum wurde in Themenbereiche zusammengefasst. Der dadurch bedingte Verzicht auf einen linearen Aufbau wird durch zahlreiche Querverweise — die allerdings auch Vorgriffe sein können — kompensiert.

Ich möchte an dieser Stelle noch auf einige Defizite hinweisen, die in meiner Lehrtätigkeit immer wieder auftreten. Während das Durchrechnen prozeduraler Verfahren oft leicht eingeübt und reproduziert werden kann (wie z.B. das Bestimmen von lokalen Extremwerten einer Funktion), so stellt eine Aufgabe, bei der der erfolgversprechende Lösungsweg nicht sofort evident ist, weitaus größere Probleme dar. So eine Aufgabe wäre etwa das Lösen nichtlinearer Gleichungen. Versuch und Irrtum gehört durchaus zum Alltag beim Arbeiten mit mathematischen Problemen. Die Anzahl der notwendigen Versuche, bis die richtige Lösung gefunden wird, sollte sich aber durch Erfahrung („Übung“) reduzieren lassen. Lassen Sie sich also nicht sofort (also nach ein paar Minuten) entmutigen, falls Sie die Lösung noch nicht sehen können.

Besondere Probleme bereiten erfahrungsgemäß folgende Aufgaben:

- das Zeichen (oder Skizzieren) von Funktionsgraphen,
- Äquivalenzumformungen von Gleichungen,
- das Arbeiten mit Ungleichungen,
- die korrekte Handhabung von Bruchtermen,
- das Rechnen mit Exponenten und Logarithmen,
- das Verwenden der mathematischen Notation.

Die präsentierten „Lösungen" derartiger (Teil-) Aufgaben sind überraschend oft falsch.

Viele Übungsbeispiele wurden dankenswerterweise von Michael Hauser, Georg Lenneis und Klaus Pötzelberger zur Verfügung gestellt, bzw. stammen aus alten Klausuraufgaben des Instituts.

Umfangreiche Sammlungen weiterer Übungsaufgaben finden Sie außerdem in den Büchern aus der Reihe *Schaum's Outline*. Hier sei insbesondere das Buch

– Elliot Mendelson, *Beginning Calculus*, Schaums' Outline Series, 3rd ed., McGraw Hill, 2003

hervorgehoben.

Als Hilfestellung für Studentinnen und Studenten, für die die deutschen mathematischen Fachausdrücke noch ungewohnt sind, finden Sie auf Seite 98 ein kleines Wörterbuch für Englisch, Französisch und Russisch.

Trotz sorgfältiger Zusammenstellung befinden sich in diesem Skriptum wahrscheinlich noch einige Fehler. Das gilt insbesondere für die Lösungen der Übungsbeispiele.

Wien, im Juli 2012 Josef Leydold

1

Mengen und Abbildungen

Denke dir die Mengenlehre wäre als eine Art Parodie auf die Mathematik von einem Satiriker erfunden worden. – Später hätte man dann einen vernünftigen Sinn gesehen und sie in die Mathematik einbezogen.
Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik
LUDWIG WITTGENSTEIN (1889–1951)

1.1 Was sind Mengen?

Der Begriff der *Menge* ist fundamental für die moderne Mathematik. Wir begnügen uns hier mit einer höchst einfachen Definition.

Definition 1.1 (Mengen)
*Eine **Menge** ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten. Ein Objekt einer Menge A heißt **Element** dieser Menge. Mengen werden üblicherweise mit lateinischen Großbuchstaben, deren Elemente mit lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnet. Die Tatsache, dass ein Objekt a Element der Menge A ist (bzw. nicht ist) bezeichnen wir mit* Menge Element

$$\boxed{a \in A \quad (\text{bzw. } a \notin A)}$$

Bei dieser Definition muss natürlich eindeutig bestimmbar sein, ob ein Objekt zu einer Menge gehört oder nicht. Die „Menge" aller reichen Österreicher ist daher in unserem Sinn gar keine Menge. (Es sei denn, wir definieren ganz genau wer *reich* ist und wer nicht.)

Kleine Mengen können definiert werden, indem man einfach die Elemente, durch Kommata getrennt, auflistet und in *geschwungene* Klammern setzt. Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an (**aufzählendes Verfahren**). aufzählendes Verfahren

Beispiel 1.1
Die Menge aller Buchstaben des Wortes *„Wirtschaftswissenschaften"* besteht aus den Buchstaben $\{a,c,e,f,h,i,n,r,s,t,w\}$.
Die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner 4 ist $\{1,2,3\}$.

Tabelle 1.1: Einige wichtige Mengen

Symbol	Beschreibung
$\emptyset$	*leere Menge*[a]
$\mathbb{N}$	*natürliche Zahlen*[b] $\{1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	*natürliche Zahlen mit Null* $\{0,1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	*ganze Zahlen*
$\mathbb{Q}$	*rationale Zahlen, Bruchzahlen* $\{\frac{n}{m} \mid n,m \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{R}$	*reelle Zahlen*
$[a,b]$	*abgeschlossenes Intervall* $\{x \mid a \le x \le b\}$
(a,b)	*offenes Intervall*[c] $\{x \mid a < x < b\}$
$[a,b)$	*halboffenes Intervall*[d] $\{x \mid a \le x < b\}$
$\mathbb{R}^+$	*positive reelle Zahlen* $(0,\infty)$

[a] In der Schule ist das Symbol {} üblich.
[b] In der Schule: $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$ bzw. $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$.
[c] auch $]a,b[$
[d] auch $[a,b[$

Bei größeren Mengen (insbesondere solchen mit unendlich vielen Elementen), ist diese Methode unbrauchbar. Stattdessen beschreiben wir die Menge durch jene Eigenschaften, die von allen ihren Elementen und nur von diesen erfüllt werden (**beschreibendes Verfahren**). Wir schreiben dafür

beschreibendes Verfahren

$$\boxed{M = \{x \mid x \text{ hat charakteristische Eigenschaft}\}}$$

und sagen „Die Menge aller Elemente x für die gilt ...“.

Beispiel 1.2

Die Menge aller geraden Zahlen ist

$\{x \mid x$ ist eine natürliche Zahl und durch 2 teilbar$\}$.

Die Menge aller WU Studentinnen und Studenten ist

$\{x \mid x$ ist im Untersuchungszeitraum an der WU Wien immatrikuliert$\}$.

Beim Arbeiten mit Mengen nimmt man meist an, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vorgegebenen **Obermenge** Ω sind.

Obermenge

Beispiel 1.3

Für eine Wahlanalyse betrachten wir verschiedene Mengen, etwa die Menge der Wählerinnen und Wähler der Partei X, die Menge aller Wahlberechtigten mit Hochschulbildung, die Menge der Wähler, etc. Als Obermenge werden wir hier sicherlich die Menge aller Wahlberechtigten heranziehen.

Mengen können durch sogenannte **Venn-Diagramme** dargestellt werden. Dabei wird die Obermenge durch ein Rechteck, die einzelnen Mengen durch Kreise oder Ovale dargestellt (☞ Abb. 1.1).

Venn-Diagramm

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von B, falls jedes Element von A auch Element

Teilmenge

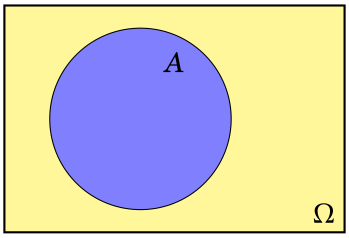


Abbildung 1.1: Venn Diagramm

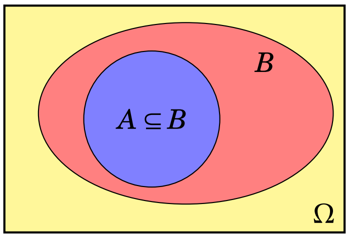


Abbildung 1.2: Teilmenge

Tabelle 1.2: Mengenverknüpfungen

Symbol	Definition	Bezeichnung	
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	**Durchschnitt**	*A geschnitten B*
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	**Vereinigung**	*A vereinigt B*
$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	**Mengendifferenz**	*A ohne B*
$\overline{A}$	$\Omega \setminus A$	**Komplement**	*A komplement*
$A \times B$	$\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$	**Produktmenge**	

von B ist. Wir schreiben $A \subseteq B$. Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** von B, $A \subset B$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$. echte Teilmenge

1.2 Mengenverknüpfungen

Mengen können miteinander verknüpft werden (☞ Tabelle 1.2). In Abb. 1.3 sind diese Mengenoperationen als Venn-Diagramme dargestellt. Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** falls $A \cap B = \emptyset$. disjunkt

Beispiel 1.4

Seien $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5\}$ und $C = \{2,4,6,8,10\}$. Aus dem Venn-Diagramm in Abb. 1.4 erkennen wir leicht:
$A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,5\}$, $\overline{C} = \{1,3,5,7,9\}$, $A \setminus C = \{1,3\}$,
$B \cap C = \emptyset$ (i.e., B und C sind disjunkt).

Für diese Mengenverknüpfungen gibt es — genauso wie für Addition und Multiplikation von Zahlen — Rechenregeln (☞ Tabelle 1.3). Mittels Venn-Diagrammen kann man sich diese Regeln plausibel machen. Abbildung 1.5 zeigt dies am Beispiel

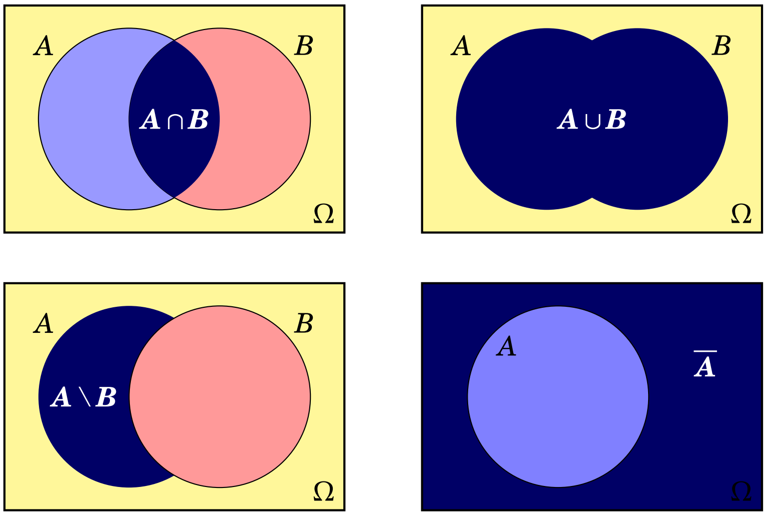


Abbildung 1.3: Venn-Diagramme von Mengenverknüpfungen

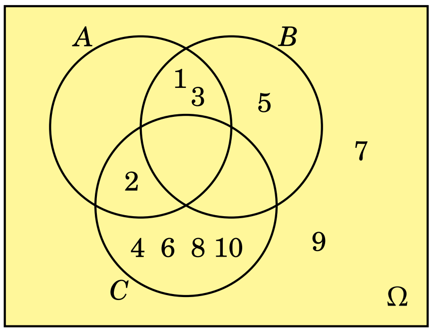
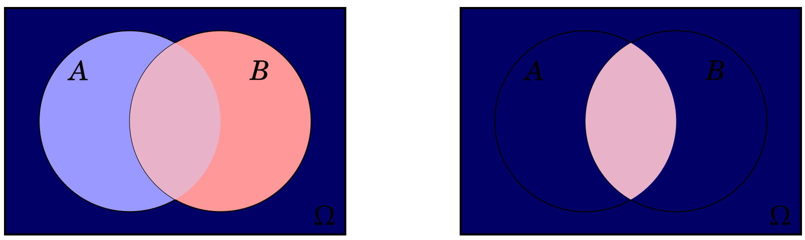


Abbildung 1.4: Venn Diagramm zu Beispiel 1.4

des Gesetzes von de Morgan. Diese Regeln erlauben es, komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen.



$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Abbildung 1.5: Gesetz von de Morgan

Beispiel 1.5

$$(A \cap B) \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \stackrel{(6)}{=} (A \cap B) \cup (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) \stackrel{(8)}{=} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \stackrel{(5)}{=} A \cap (B \cup \overline{B}) \stackrel{(7)}{=} A \cap \Omega = A$$

Das **Cartesische Produkt** (die *Produktmenge*) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ Cartesisches Produkt

Tabelle 1.3: Rechenregeln für Mengenverbindungen

	Regel	Bezeichnung
(1)	$A \cup A = A \cap A = A$	*Idempotenz*
(2)	$A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$	*Identität*
(3)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	*Assoziativität*
(4)	$A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$	*Kommutativität*
(5)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*Distributivität*
(6)	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	*Gesetz von de Morgan*
(7)	$\overline{A} \cup A = \Omega$ und $\overline{A} \cap A = \emptyset$	
(8)	$\overline{\overline{A}} = A$	

zweier Mengen A und B erlaubt es „zwei-dimensionale" Mengen zu bilden.

Beispiel 1.6
Das Cartesische Produkt aus $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$ ist

$$A \times B = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\} .$$

Beispiel 1.7
Das Cartesische Produkt aus $A = [2, 4]$ und $B = [1, 3]$ ist (☞ Abb. 1.6)

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [2, 4] \text{ und } y \in [1, 3]\} .$$

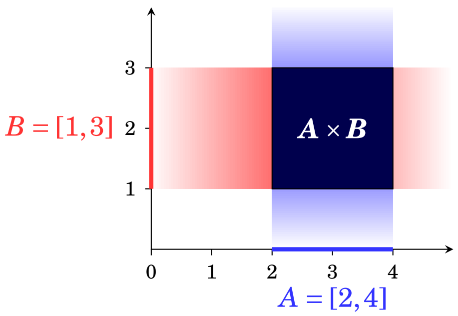


Abbildung 1.6: Cartesisches Produkt zweier Intervalle

1.3 Was ist eine Abbildung?

Funktion

Der Begriff der **Abbildung** oder **Funktion**[1] ist einer der wichtigsten Begriffe in der Mathematik. Eine Funktion ordnet jedem Element aus einer *Definitionsmenge* ein Merkmal (ein Element aus der Menge der zulässigen Merkmale, der sogenannten *Wertemenge*) *eindeutig* zu.

Definition 1.2 (Abbildung)

Abbildung

*Eine **Abbildung** f ist definiert durch*

Definitionsmenge

Wertemenge

Zuordnungsvorschrift

(i) *eine **Definitionsmenge** D,*

(ii) *eine **Wertemenge** W und*

(iii) *eine **Zuordnungsvorschrift**, die jedem Element von $x \in D$ **genau ein** Element $y \in W$ zuordnet.*

Wir schreiben dafür

$$\boxed{f : D \to W, \quad x \mapsto y = f(x)}$$

unabhängige Variable

abhängige Variable

Bild

Urbild

Funktionsterm

Argument

- *x heißt **unabhängige Variable**, y heißt **abhängige Variable**.*
- *y ist das **Bild** von x, x ist das **Urbild** von y.*
- *$f(x)$ heißt **Funktionsterm**, x heißt **Argument** der Abbildung.*

Abbildungen können durch „Pfeildiagramme" veranschaulicht werden, wie etwa in Abb. 1.7 auf Seite 7 dargestellt.

Beispiel 1.8

$D = \{\text{Menschen}\}$, $W = \{\text{Geburtstage}\}$, $f : \text{Mensch} \mapsto \text{Geburtstag}$
„Jedem Menschen wird sein Geburtstag zugeordnet" ist eine Abbildung.

Beispiel 1.9

$D = \{\text{Menschen}\}$, $W = \{\text{Staatsbürgerschaften}\}$,
$f : \text{Mensch} \mapsto \text{Staatsbürgerschaft(en)}$
„Jedem Menschen wird seine Staatsbürgerschaft zugeordnet" ist **keine** Abbildung, da die Zuordnung nicht immer *eindeutig* (Doppelstaatsbürgerschaft) oder *möglich* (Staatenlose) ist.

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder charakterisieren (☞ Abb. 1.7).

Definition 1.3

injektiv

- *Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge* höchstens *ein Urbild besitzt.*

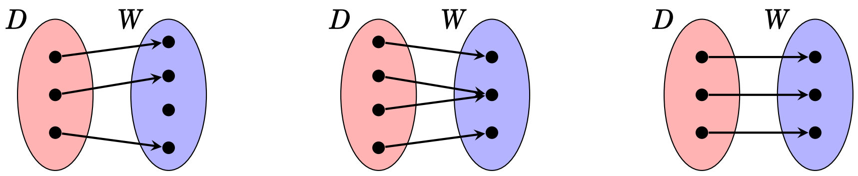
surjektiv

- *Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge* mindestens *ein Urbild besitzt.*

bijektiv

- *Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

[1] Wir verwenden die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* synonym.



injektiv (nicht surjektiv) | surjektiv (nicht injektiv) | bijektiv

Abbildung 1.7: Schematische Darstellung von Abbildungen

Einheitsfunktion

Die einfachste Funktion ist die **Einheitsfunktion** (oder **identische Funktion**) id, die das Argument auf sich selbst abbildet, d.h.

$$\mathrm{id}\colon D \to W = D,\, x \mapsto x$$

relle Funktion

Ein besonders wichtiger Spezialfall einer Abbildung sind **reelle Funktionen** (in einer Variable). Das sind Funktionen, in denen sowohl die Definitionsmenge als auch die Wertemenge Teilmengen (meist Intervalle) von $\mathbb{R}$ sind. Wir werden diese Funktionen in Kapitel 4 ausführlicher besprochen.

Durch „Hintereinanderausführen“ zweier Funktionen erhalten wir eine neue Funktion (☞ Abb. 1.8).

Definition 1.4 (Zusammengesetzte Funktion)

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$, dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

*die **zusammengesetzte Funktion** von g und f (lies: g zusammengesetzt f).*

zusammengesetzte Funktion

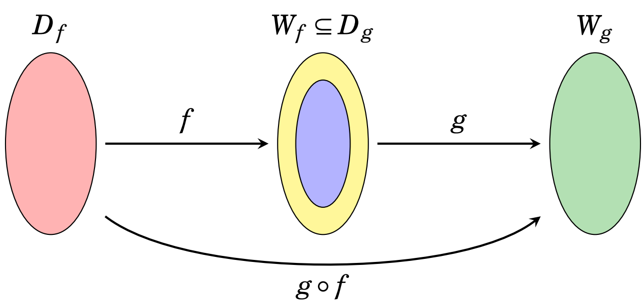


Abbildung 1.8: Zusammengesetzte Abbildung

Beispiel 1.10

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto f(x) = 3x - 2$. und $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\, x \mapsto g(x) = x^2$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2\,.$$

Bei der Verknüpfung von Funktionen kommt es auf die Reihenfolge an. Im Allgemeinen gilt

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)\,.$$

Beispiel 1.11

Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2.$ und $g: \mathbb{R} \to [0,\infty), x \mapsto g(x) = x^2$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2\,.$$

Ist eine Abbildung $f: D_f \to W_f$ *bijektiv*, so kann jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$ (i.e. sein Urbild) zugeordnet werden (☞ Abb. 1.9). Wir erhalten dadurch wieder eine Abbildung f^{-1} mit der Definitionsmenge W_f und der Wertemenge D_f:

$$\boxed{f^{-1}: W_f \to D_f,\; y \mapsto x = f^{-1}(y)}$$

Definition 1.5 (Inverse Funktion)

*Die Abbildung $f^{-1}: W_f \to D_f, x \mapsto y = f^{-1}(x)$ heißt die **inverse Funktion** (oder **Umkehrabbildung**) von f.*

inverse Funktion

Umkehrabbildung

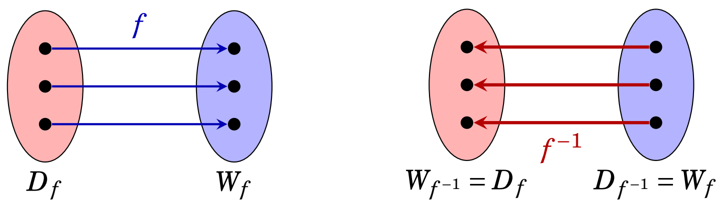


Abbildung 1.9: Umkehrabbildung

Die Umkehrabbildung hat die Eigenschaft, dass für alle Elemente $x \in D_f$ und $y \in W_f$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

oder formaler

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}: D_f \to D_f \qquad \text{und} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}: W_f \to W_f\,.$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Umkehrabbildung einer Funktion f genau dann existiert, wenn f bijektiv. Man beachte dabei aber dass Definitionsmenge und Wertemenge Bestandteil der Funktion sind.

Beispiel 1.12

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ nicht bijektiv und besitzt daher keine Umkehrabbildung.
Die Funktion $f: [0,2] \to [0,4], x \mapsto x^2$ ist bijektiv und besitzt die Umkehrabbildung $f^{-1}: [0,4] \to [0,2], x \mapsto \sqrt{x}$.

— Übungen

1. Die Obermenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1,3,6,9\}$, $B = \{2,4,6,10\}$ und $C = \{3,6,7,9,10\}$. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm und bilden Sie die Mengen, die durch die folgenden Ausdrücke definiert sind:

(a) $A \cup C$ (b) $A \cap B$ (c) $A \setminus C$

(d) $\overline{A}$ (e) $(A \cup C) \cap B$ (f) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$

(g) $\overline{(A \cup C)} \cap B$ (h) $(\overline{A} \setminus B) \cap (\overline{A} \setminus C)$ (i) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Es sei A die Menge aller Wahlberechtigen, B die Menge aller Männer, C die Menge aller Frauen, D die Menge aller Pensionisten und E die Menge aller unselbständig Beschäftigten in einem Wahlbezirk. Geben Sie eine (vernünftige) Obermenge an. Drücken Sie folgende Mengen in Worten aus:

(a) $A \cap B$ (b) $A \cap C$ (c) $B \cap E$ (d) $A \setminus D$

(e) $C \setminus A$ (f) $\overline{C}$ (g) $C \cap D$ (h) $(D \cup E) \cap C$

3. Zeichnen Sie im zugehörigen Venn-Diagramm die Lösungsmenge von $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

4. Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke:

(a) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{B}$ (b) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

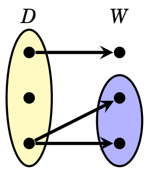
(c) $((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) \cap A$ (d) $(C \cup B) \cap \overline{(\overline{C} \cap \overline{B})} \cap (C \cup \overline{B})$

5. Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 10 < x < 200\}$:

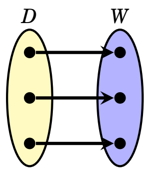
(a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 10 < x \leq 200\}$ (b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 121\}$

(c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 4\pi < x < \sqrt{181}\}$ (d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 20 < |x| < 100\}$

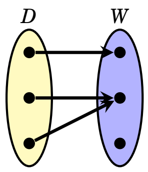
6. Beschreiben die folgenden Diagramme Abbildungen? Wenn ja, ist die jeweilige Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv?



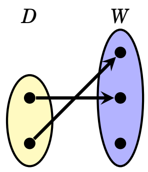
(a)



(b)



(c)



(d)

2

Terme, Gleichungen und Ungleichungen

Jeder Berufsstand hat seine eigenen Techniken und Verfahrensweisen, die Kraft macht es nicht. Ein Müller, der sich ohne seinen Vorteil die schweren Mehl- und Getreidesäcke auf die Schultern heben würde, wäre alsbald erschöpft. Da springt der sogenannte Vorteil ein, der besondere Griff. Mit dem speziellen Trick geht es mühelos.

Zu Lasten der Briefträger
ALOIS BRANDSTETTER

2.1 Zahlen

Wir unterscheiden folgende Zahlen(mengen):

- **natürliche Zahlen**[1]: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- **ganze Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **rationale Zahlen** (**Bruchzahlen**): $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
  Rationale Zahlen können auch als **Dezimalzahlen** dargestellt werden:
  z.B. $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $-\frac{5}{9} = -0{,}\dot{5} = -0{,}55555\ldots$, $\frac{5}{11} = 0{,}\dot{3}\dot{6} = 0{,}36363636\ldots$
  Die **Dezimaldarstellung** einer rationalen Zahl ist immer *endlich* (z.B. von $\frac{1}{4}$) oder *periodisch*[2] (z.B. von $\frac{5}{11}$).
- **irrationale Zahlen**: Zahlen mit *unendlicher*, nicht periodischer Dezimaldarstellung
  z.B. $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, $\pi = 3{,}141592653\ldots$, $e = 2{,}7182818\ldots$
- **reelle Zahlen**: $\mathbb{R}$
  Alle rationalen und irrationalen Zahlen.

[1] Manchmal wird auch 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

[2] Der periodische Teil der Dezimalzahl wird durch ein oder zwei Punkte dargestellt, z.B.: $0{,}1\dot{2}3\dot{6}$ steht für die unendliche periodische Dezimaldarstellung $0{,}1236236236236236\ldots$.

Für die Dezimaldarstellung von reellen Zahlen gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Festkommaformat**
  Das Komma kennzeichnet den ganzzahligen Anteil der Zahl. z.B.: 1234,56

- **Gleitkommaformat**
  Das Komma steht nach der ersten Ziffer. Die Größenordnung der Zahl wird durch Multiplizieren mit einer geeigneten Potenz von 10 ausgedrückt. z.B.: $1{,}23456 \times 10^3$. Dabei heißt „1,23456“ die (*6-stellige*) **Mantisse** und „3“ der **Exponent** der Zahl. Mantisse Exponent

  In der EDV wird ein Dezimal*punkt* verwendet und der Exponent durch den Buchstaben „E“ (oder „e“) dargestellt. (vgl. Bem. 2.1).
  z.B.: `1.23456 E3`.

Bemerkung 2.1
In der englischsprachigen Literatur ist statt eines Kommas ein Dezimalpunkt (“decimal point”) üblich.

Bemerkung 2.2
In welchem Format Ihr persönlicher Taschenrechner Gleitkommazahlen darstellt, entnehmen Sie bitte der Bedienungsanleitung. Die Ziffernfolge „`1.23456 03`“ auf dem Display ist z.B. kein gültiges Zahlenformat auf dem Papier. Richtigerweise sollte es 1234,56 oder $1{,}23456 \times 10^3$ lauten.

2.2 Terme

In der Mathematik trifft man auf Ausdrücke wie etwa

$$B = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

der den Barwert einer nachschüssigen Rente nach n Jahren angibt; oder

$$U = 2\pi r$$

der den Umfang eines Kreises mit Radius r angibt. Diese mathematischen Ausdrücke auf beiden Seiten des „=“-Zeichens heißen **Terme**. Sie enthalten **Zahlen**, **Konstante** (das sind Symbole, die einen *fixen* Wert repräsentieren) und **Variable** (für die ein *beliebiger* Wert eingesetzt werden kann). Term Konstante Variable

Bemerkung 2.3
Konstante werden meist, aber nicht immer, mit den ersten Buchstaben (a, b, c, ...), Variable mit den letzten Buchstaben (..., x, y, z) des lateinischen Alphabets bezeichnet[3]. Um mehr Symbole zu erhalten, werden diese Buchstaben mit Indizes versehen (z.B. a_1, a_2, a_3, x_1, P_0).

Beim Rechnen mit Termen muss darauf geachtet werden, für welche Werte der Variablen der Ausdruck definiert ist. So ist etwa der Ausdruck $\frac{1}{x-1}$ nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert, der Ausdruck $\sqrt{x+1}$ nur für $x \geq -1$. Die Menge aller erlaubten Variablenwerte heißt der **Definitionsbereich** des Terms. Definitionsbereich

2.2.1 Das Summensymbol

Terme, die viele Summanden enthalten, die gesetzmäßig zusammenhängen, lassen sich oft durch Verwendung des **Summensymbols** $\sum$ vereinfachen. Dabei werden die einzelnen Summanden durch ein *„Bildungsgesetz“* mit Hilfe einer *Indexvariable* (meist i, j, k, m oder n) beschrieben. Im Summensymbol werden die untere und die obere Grenze für die *ganzzahligen* Werte dieser Indexvariable angegeben[4].

Summensymbol

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Wir können das Summensymbol auch als Abkürzung für die rechte Seite der obigen Formel interpretieren. Dazu setzen wir im Ausdruck, auf den sich das Summensymbol bezieht, für die Indexvariable alle ganzzahligen Werte zwischen Unter- und Obergrenze ein, und addieren die so entstandenen Terme.

Beispiel 2.1
Die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen größer 2 ist in verschiedenen Notationen:

$$\sum_{i=1}^{10}(2+i) = (2+1)+(2+2)+(2+3)+\cdots+(2+10)$$

Beim Rechnen mit dem Summensymbol gelten die üblichen Regeln der Arithmetik wie Assoziativgesetz und Distributivgesetz. Wir können daher, z.B., Summensymbole zusammenfassen und wieder trennen. Dabei ist zu beachten, dass die Grenzen für die Indexvariablen übereinstimmen. Die Indexvariablen dürfen aber durch verschiedene Buchstaben bezeichnet sein.

Beispiel 2.2

$$\sum_{i=2}^{n} a_i + \sum_{j=2}^{n} b_j = \sum_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} b_i = \sum_{i=2}^{n}(a_i + b_i)$$

Die Umbenennung von j nach i in der zweiten Summe ist erlaubt. Die Indexvariable kann ja mit einem beliebigen Buchstaben bezeichnet werden, der nur innerhalb der Summe eindeutig sein muss.

Analog zum *Summensymbol* gibt es auch das **Produktsymbol** $\prod$.

Produktsymbol

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

[3] Diese Konvention geht auf René Descartes (1596–1650) zurück.
[4] lies: *„Summe über a_i von $i=1$ bis $i=n$“*

2.2.2 Absolutbetrag

Absolutbetrag

Der **Absolutbetrag** $|x|$ einer Zahl gibt den Abstand zum Nullpunkt an. Er ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

2.2.3 Potenzen und Wurzeln

Potenz
Basis
Exponent

Eine **Potenz** von x ist ein Ausdruck[5] der Form x^n. x heißt dabei die **Basis** und n der **Exponent** der Potenz. Für $n \in \mathbb{N}$ steht dieses Symbol für die n-fache Multiplikation von x.

$$\boxed{x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}}$$

Für negative ganzzahlige Exponenten gilt:

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

Wurzel

Eine Zahl y heißt die n-te **Wurzel** $\sqrt[n]{x}$ von x, falls $y^n = x$. Das *Ziehen der n-ten Wurzel* stellt somit die umgekehrte Operation des *Potenzierens* dar. Für die *Quadratwurzel* $\sqrt[2]{x}$ wird die abgekürzte Schreibweise $\sqrt{x}$ verwendet.

Wir können nun auch rationale Potenzen definieren:

$$\boxed{x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \qquad m \in \mathbb{Z}, x \geq 0}$$

Bei gebrochenzahligen Exponenten muss die Basis größer oder gleich 0 sein.

Tabelle 2.1 zeigt den Zusammenhang zwischen Potenzen und Wurzeln sowie deren Rechenregeln.

Bemerkung 2.4
Potenzen lassen sich auch auf irrationale Exponenten erweitern (☞ §2.2.7, Seite 18).

Beispiel 2.3

$$\frac{(x \cdot y)^4}{x^{-2} y^3} = x^4\, y^4\, x^{-(-2)}\, y^{-3} = x^6\, y$$

$$\frac{(2x^2)^3\,(3y)^{-2}}{(4x^2\,y)^2\,(x^3\,y)} = \frac{2^3\,x^{2\cdot 3}\,3^{-2}\,y^{-2}}{4^2\,x^{2\cdot 2}\,y^2\,x^3\,y} = \frac{\frac{8}{9}\,x^6\,y^{-2}}{16\,x^7\,y^3} = \frac{1}{18}\,x^{6-7}\,y^{-2-3} = \frac{1}{18\,x\,y^5}$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\left(3\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{4}{3}}\right)^3 = 3^3\,x^{\frac{3}{3}}\,y^{-\frac{12}{3}} = 27\,x\,y^{-4} = \frac{27\,x}{y^4}$$

[5] lies: *„x hoch n“* oder auch *„x zur n-ten Potenz“*; x^2 wird als *„x-quadrat“* bezeichnet.

Tabelle 2.1: Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln

Seien $n, m \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$x^0 = 1$	$(x \neq 0)$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$	$x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$	$(x \geq 0)$
$x^{n-m} = \dfrac{x^n}{x^m}$	$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$	$(x \geq 0)$
$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	$x^{-\frac{n}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$	$(x \geq 0)$
$\left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}$		

Häufige Fehlerquellen:

$-x^2$	ist *nicht* gleich	$(-x)^2$
$(x+y)^n$	ist *nicht* gleich	$x^n + y^n$
$x^n + y^n$	kann (im allgemeinen) *nicht* vereinfacht werden	
$3x^n$	ist *nicht* gleich	$(3x)^n$

2.2.4 Polynome

Monom
Grad

Ein **Monom** ist ein Produkt von Konstanten und Variablen mit nichtnegativen ganzzahligen Potenzen. Der **Grad** eines Monoms ist die Summe der Exponenten im Ausdruck.

Beispiel 2.4
$6x^2$ ist ein Monom 2. Grades.
$3x^3y$ und xy^2z sind Monome 4. Grades.
$\sqrt{x}$ und $\frac{2}{3xy^2}$ sind *keine* Monome

Polynom
Grad

Ein **Polynom** ist die Summe von ein oder mehreren Monomen. Der **Grad** eines Polynoms ist der größte Grad unter den einzelnen Monomen.

Beispiel 2.5
$4x^2y^3 - 2x^3y + 4x + 7y$ ist ein Polynom 5. Grades.

Polynome $P(x)$ in einer Variable können mittels Summensymbol dargestellt werden,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

wobei x die Variable und die a_i Konstanten sind.

Multiplizieren

Polynome können multipliziert werden, indem jeder Summand des ersten Polynoms mit jedem Summanden des zweiten Polynoms multipliziert wird und die Teilprodukte addiert werden.

Beispiel 2.6

$$\begin{aligned}(2x^2+3x-5)\cdot(x^3-2x+1) &= 2x^2\cdot x^3+2x^2\cdot(-2x)+2x^2\cdot 1\\ &\quad +3x\cdot x^3+3x\cdot(-2x)+3x\cdot 1\\ &\quad +(-5)\cdot x^3+(-5)\cdot(-2x)+(-5)\cdot 1\\ &= 2x^5+3x^4-9x^3-4x^2+13x-5\end{aligned}$$

Für $(x+y)^n$ kann der **binomische Lehrsatz** verwendet werden.

binomischer Lehrsatz

$$\boxed{(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\,y^k}$$

wobei

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\qquad\text{und}\qquad n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**[6], und $n!$ wird als **Fakultät**[7] von n bezeichnet. Per Definition ist $0!=1$.

Binomialkoeffizient

Fakultät

Beispiel 2.7

$$(x+y)^2=\binom{2}{0}x^2y^0+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^0y^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Faktorisieren

Der umgekehrte Vorgang, nämlich das Zerlegen eines Polynoms in das Produkt von Polynomen niedrigerer Ordnung, wird als **Faktorisieren** bezeichnet. Das Polynom wird als Produkt von **Faktoren** dargestellt.

Faktorisieren

Faktor

[6] lies: *„n über k“*.

[7] lies: *„n-fakultät“* oder *„n-faktorielle“*.

Beispiel 2.8

$$\begin{aligned}
2x^2+4xy+8xy^3 &= 2x\cdot(x+2y+4y^3)\\
(x^2-y^2) &= (x+y)\cdot(x-y)\\
(x^2-1) &= (x+1)\cdot(x-1)\\
(x^2+2xy+y^2) &= (x+y)\cdot(x+y)=(x+y)^2\\
x^3+y^3 &= (x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren können wir uns leicht von der Richtigkeit dieser Faktorisierungen überzeugen.

Bemerkung 2.5
Das Faktorisieren eines Polynoms in mehreren Variablen ist im allgemeinen schwierig und nicht immer möglich.

Ein Faktor (Polynom) 1. Grades wird als **Linearfaktor** bezeichnet. Linearfaktor

Für Polynome in einer Variable mit der Nullstelle x_1 erhalten wir mit $(x-x_1)$ einen Linearfaktor des Polynoms. Den zweiten Faktor erhalten wir durch *Division*. Die *Division zweier Polynome* geschieht in analoger Weise wie die Division natürlicher Zahlen.

Beispiel 2.9
$x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von $P(x) = x^3+x^2-2$. Wir erhalten damit $(x-1)$ als Linearfaktor. Der zweite Faktor ist dann $(x^3+x^2-2):(x-1)$.

$$\begin{array}{rcccccccl}
 & (& x^3 & + & x^2 & + & 0x & - & 2\ ):(x-1)=\boldsymbol{x^2+2x+2}\\
\boldsymbol{x^2}\cdot(x-1)\longrightarrow & & x^3 & - & x^2 & |(-) & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 2x^2 & + & 0x & & \\
\boldsymbol{2x}\cdot(x-1)\longrightarrow & & & & 2x^2 & - & 2x & |(-) & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 2x & - & 2\\
\boldsymbol{2}\cdot(x-1)\longrightarrow & & & & & & 2x & - & 2\ |(-)\\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Wir erhalten daher $x^3+x^2-2=(x-1)\cdot(x^2+2x+2)$.

Bemerkung 2.6
Falls der Divisor kein Faktor des Dividenden ist, so bleibt bei der Division ein Divisionsrest. (Analog zur Division natürlicher Zahlen, falls der Divisor kein Teiler des Dividenden ist.)

Wenn ein Polynom n-ten Grades $P(x)=\sum_{i=0}^n a_i\,x^i$, n reelle Nullstellen $x_1,x_2,\ldots,x_n$ besitzt, so lässt sich dieses Polynom als Produkt der n Linearfaktoren $(x-x_i)$ zerlegen:

$$\boxed{P(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)}$$

Bemerkung 2.7
In der Menge der komplexen Zahlen[8] lässt sich *jedes* Polynom eindeutig in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen, da ein Polynom n-ten Grades in der Menge der komplexen Zahlen genau n Nullstellen besitzt (*Fundamentalsatz der Algebra*).

[8] Die komplexen Zahlen werden hier nicht behandelt.

Tabelle 2.2: Rechenregeln für Bruchterme

Seien $b, c, e \neq 0$.

Regel	Bezeichnung	Beispiel
$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b}$	*Kürzen*	$\frac{2x^2}{4x} = \frac{x}{2}$
$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$	*Erweitern*	$\frac{x}{2} = \frac{2x \cdot x}{2x \cdot 2} = \frac{2x^2}{4x}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	*Multiplizieren*	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$
$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$	*Dividieren*	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12}$
$\frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b}$		$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$
$\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c + d \cdot b}{b \cdot c}$	*Addieren*[a]	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot e}$	*Doppelbruch Auflösen*	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{12}$

[a] Zuerst auf *gemeinsamen Nenner* bringen!

2.2.5 Lineare Terme

Ein **linearer Term** ist ein Ausdruck, der nur Monome vom Grad 1 enthält. Er ist somit ein Spezialfall eines Polynomen. linearer Term

Beispiel 2.10
$a + bx + y + a \cdot c$ ist ein linearer Term in x und y, falls wir a, b und c als Konstante auffassen.
$xy + x + y$ ist nicht linear, da xy Grad 2 besitzt.

2.2.6 Rationale Terme — Das Problem mit dem Bruchstrich

Ein **rationaler Term** (**Bruchterm**) ist ein Ausdruck der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind und **Zähler** bzw. **Nenner** heißen. Der Definitionsbereich eines Bruchterms ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners. Eine alternative Schreibweise ist $P(x)/Q(x)$. rationaler Term Bruchterm Zähler Nenner

Beispiel 2.11
$\frac{x^2 + x - 4}{x^3 + 5}$ ist ein Bruchterm mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{5}\}$.

Tabelle 2.2 zeigt die erlaubten Rechenoperationen mit Bruchtermen.

Beispiel 2.12

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$$

$$\frac{4x^3+2x^2}{2xy} = \frac{2x^2(2x+1)}{2xy} = \frac{x(2x+1)}{y}$$
$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass beim Rechnen mit Bruchtermen immer wieder eklatante Rechenfehler passieren! Die folgenden Beispiele für derartige Irrtümer stammen aus der Prüfungspraxis des Autors.

Häufige Fehlerquellen:

$\frac{a+c}{b+c}$	ist *nicht* gleich	$\frac{a}{b}$	$\left[\frac{x+2}{y+2} \neq \frac{x}{y}\right]$.
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$	ist *nicht* gleich	$\frac{x+y}{a+b}$	$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \neq \frac{1}{5}\right]$.
$\frac{a}{b+c}$	ist *nicht* gleich	$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$	$\left[\frac{1}{x^2+y^2} \neq \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]$.

2.2.7 Exponent und Logarithmus

Die Rechenregeln für Potenzen aus Tabelle 2.1 auf Seite 14 gelten auch für irrationale Exponenten. Wir können daher auch die Basis als Konstante wählen und den Exponenten als Variable.

Eine Zahl y heißt **Logarithmus** zur Basis a der Zahl x, falls $a^y = x$. Wir schreiben dafür[9,10] $y = \log_a(x)$. Es gilt Logarithmus

$$\boxed{y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x}$$

Der *Logarithmus* ist der *Exponent* einer Zahl bezüglich der Basis a.

Beispiel 2.13

$\log_{10}(100) = 2$, da $10^2 = 100$

$\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$, da $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

$\log_2(8) = 3$, da $2^3 = 8$

In Tabelle 2.3 sind die Rechenregeln für Exponent und Logarithmus zusammengefasst.

Häufige Fehlerquellen:

$\log_a(x+y)$ ist *nicht* gleich $\log_a(x)+\log_a(y)$.
$\log_a((-x)^2)$ ist *nicht* gleich $2\log_a(-x)$ sondern $2\log_a|x|$.

Die wichtigste Basis für den Logarithmus ist die **Eulersche Zahl** $e = 2{,}7182818\ldots$ (**natürlicher Logarithmus**). Wir schreiben dafür $\log(x)$ oder $\ln(x)$ anstatt $\log_e(x)$. Wichtig ist auch der Logarithmus zur Basis 10 (**dekadischer Logarithmus**). Eulersche Zahl natürlicher Logarithmus dekadischer Logarithmus

[9] lies: *„Logarithmus von x zur Basis a"*
[10] manchmal auch $_a\log(x)$

Tabelle 2.3: Rechenregeln für Exponent und Logarithmus

Achtung: $\log_a(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert!

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x)$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	
$a^{\log_a(x)} = x$	$\log_a(a^x) = x$
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$
	$\log_a(a) = 1$

Bemerkung 2.8

Meist schreibt man nur $\log(x)$ ohne Basisangabe. In diesem Fall ist (sollte) die verwendete Basis aus dem Zusammenhang oder einer Konvention ersichtlich sein.

- Im mathematischen Bereich: natürlicher Logarithmus (Finanzmathematik, Programme wie R, *Mathematica*, Maxima, ...)
- Im technischen Bereich: dekadischer Logarithmus (Wirtschaftwissenschaften, Taschenrechner, Excel, ...)

Wir können alle Exponenten und Logarithmen zu einer beliebigen Basis auf die Basis e umrechnen. Es ist nämlich nach Regeln für den Logarithmus $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$ und somit

$$\boxed{a^x = e^{x\ln(a)}}$$

Genauso erhalten wir aus $\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y = e^{y\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(x) = y\ln(a)$

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

2.3 Gleichungen

Eine **Gleichung** erhalten wir durch *Gleichsetzen* zweier Terme. Gleichung

linke Seite = rechte Seite

Die **Lösungsmenge** einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die diese Gleichung erfüllen. Der **Definitionsbereich** ist der Durchschnitt der Definitionsmengen aller Terme der Gleichung (☞ Seite 11). Die Menge aller Zahlen, die wir als Lösung der Gleichung zulassen, heißt die **Grundmenge** der Gleichung. Im folgenden ist die Grundmenge stets $\mathbb{R}$ oder (in ökonomischen Aufgaben) $[0, \infty)$.

Lösungsmenge
Definitionsbereich
Grundmenge

Das Lösen von Gleichungen gehört zu den häufigsten Aufgaben in der Mathematik. Entweder soll der Wert einer zunächst unbekannten Größe berechnet werden, oder es soll eine Variable durch andere Variablen ausgedrückt werden[11].

Zum Lösen einer Gleichung versuchen wir die gesuchte Größe durch **Äquivalenzumformungen** auf einer Seite der Gleichung zu isolieren. Eine *Äquivalenzumformung* ist eine Umformung, die auf *beide* Seiten der Gleichung angewendet wird, und die wieder eindeutig rückgängig gemacht werden kann (vgl. bijektive Abbildung, §4.5, Seite 52) und deshalb die Lösungsmenge unverändert läßt. Äquivalenzumformungen erhalten wir durch

Äquivalenzumformung

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl oder eines beliebigen Term auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplizieren beider Seiten mit einer Zahl oder Term *ungleich* Null.
- Dividieren beider Seiten durch eine Zahl oder Term *ungleich* Null.
- Logarithmieren oder Exponenzieren beider Seiten.

Beim Logarithmieren muss darauf geachtet werden, dass beide Seiten größer Null sind.

Beim Multiplizieren oder Dividieren mit einem Term, der die gesuchte Variable enthält, muss darauf geachtet werden, dass dieser Term Null werden könnte! Für das Lösen einer Gleichung hat das die Konsequenz, dass beim Multiplizieren eine *„zusätzliche Lösung" entstehen* könnte (☞ Beispiele 2.14 und 2.15). Beim Dividieren hingegen könnte dabei eine Lösung *„verschwinden"* (☞ Beispiel 2.16).

Beim Multiplizieren mit einem solchen Term ist daher stets eine Probe durchzuführen.

Beim Dividieren ist eine Fallunterscheidung durchzuführen:

1. Fall: Die Division ist erlaubt (der Divisor ist *ungleich* Null).

2. Fall: Die Division ist nicht erlaubt (der Divisor ist *gleich* Null).

Bemerkung 2.9
Beim Kürzen eines Bruchterms muss darauf geachtet werden, dass die Nullstellen des Nenners nicht zum Definitionsbereich des Bruchterms gehören (☞ §2.2.6, Seite 17).

Bemerkung 2.10
Der Fehler, dass durch einen Term, der Null werden könnte, dividiert wird, tritt vor allem beim Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen in mehreren Variablen auf (☞ Beispiel 2.17).

Beispiel 2.14

Durch Multiplikation von $x^2+5x-1=x-1$ mit $(x-2)$ erhalten wir $x^3+3x^2-11x+2=x^2-3x+2$ mit der Lösungsmenge $L=\{-4,0,2\}$. 2 ist aber keine Lösung der ursprünglichen Gleichung $x^2+5x-1=x-1$.

[11] z.B.: Aus der Kreisumfangformel $U=2r\pi$ soll der Radius eines Kreises durch dessen Umfang ausgedrückt werden.

Beispiel 2.15
Durch Multiplizieren von $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 1$ mit $(x-1)$ erhalten wir $x^2+x-2 = x-1$ mit der Lösungsmenge $L = \{-1,1\}$. 1 ist aber nicht im Definitionsbereich von $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

Beispiel 2.16
Wenn wir die Gleichung $(x-1)(x-2) = 0$ (Lösungsmenge $L = \{1,2\}$) durch $(x-1)$ dividieren erhalten wir die Gleichung $x-2 = 0$ mit der einzigen Lösung $x = 2$. Die Lösung $x = 1$ geht durch das Dividieren *„verloren“*.

Beispiel 2.17
Wir suchen die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Durch Addition und Division könnten wir die erste Zeile umformen in $xy = x \rightsquigarrow y = \frac{x}{x} = 1$. Tatsächlich erhalten wir aber auch mit $x = 0$ eine Lösung des Gleichungssystems. Die Division würde eine Lösung eliminieren und ist so nicht erlaubt.

Es empfiehlt sich folgende Vorgangsweise:
Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x(y-1) = 0$. Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x = 0$ (und damit $y = \pm\sqrt{2}$ wegen der 2. Gleichung) oder $y-1 = 0$ und damit $y = 1$ und $x = \pm 1$. Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{(0,-\sqrt{2}), (0,\sqrt{2}), (-1,1), (1,1)\}$.

Bemerkung 2.11
Es ist manchmal notwendig[12], eine Probe durchzuführen (siehe oben und §2.3.5, Seite 23). Dabei wird die errechnete Zahl in die Gleichung eingesetzt. Nur wenn die Gleichung für diese Zahl erfüllt ist, ist diese Zahl auch eine Lösung der Gleichung.
Es empfiehlt sich aber auch für andere Gleichungen (etwa einfache lineare Gleichungen) eine Probe durchzuführen. Auf diese Weise kann ein Rechenfehler erkannt werden.

2.3.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen enthalten nur lineare Terme. lineare Gleichung

Beispiel 2.18
Wir suchen den Radius eines Kreises mit Umfang 6. Dazu müssen wir die lineare Gleichung $6 = 2r\pi$ lösen[13]. Durch Division durch 2π $(\neq 0)$ erhalten wir die Lösung: $r = \frac{3}{\pi}$.

Beispiel 2.19
Aus der Barwertformel für eine nachschüssige Rente (☞ Seite 40) $B_n = R \cdot \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ soll die Rente R ausgedrückt werden. Da R nur in 1. Potenz vorkommt, müssen wir eine lineare Gleichung lösen. Durch Division durch die Konstante $\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ $(\neq 0)$ erhalten wir als Lösung: $R = B_n \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$.

[12] Es ist ratsam, *immer* eine Probe durchzuführen.
[13] $U = 2r\pi$

2.3.2 Betragsgleichungen

Eine Gleichung mit Absolutbetrag können wir als eine Abkürzung für zwei Gleichungen sehen:

$$|x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oder } -x = 1$$

Beispiel 2.20
Gesucht ist die Lösung von $|2x-3| = |x+1|$. Wir müssen dazu alle Lösungen von jeder der beiden Gleichungen finden:

$$\begin{aligned} (2x-3) &= (x+1) \qquad &&\Rightarrow x = 4 \\ -(2x-3) &= (x+1) \qquad &&\Rightarrow x = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

(Die Gleichungen $-(2x-3) = -(x+1)$ und $(2x-3) = -(x+1)$ lassen sich durch Multiplizieren mit -1 in obige Gleichungen überführen.)

Die Lösungsmenge lautet daher $L = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$.

2.3.3 Gleichungen mit Exponenten und Logarithmus

Gleichungen mit Exponenten sind Gleichungen, die die gesuchte Variable im *Exponenten* (und nur dort) enthalten. Die Variable wird zuerst auf einer Seite der Gleichung in einem Term, der keine Addition oder Subtraktionen enthalten darf, isoliert. Durch *Logarithmieren* erhalten wir dann die gesuchte Lösung.

Beispiel 2.21
Wir suchen die Lösung der Gleichung $2^x = 32$. Durch Logarithmieren beider Seiten erhalten wir

$$2^x = 32 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2^x) = \ln(32) \quad \Leftrightarrow \quad x\ln(2) = \ln(32) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(32)}{\ln(2)} = 5$$

Beispiel 2.22
Aus der Formel für die Kreditrate $X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1}$ (☞ Seite 41) soll die Dauer n eines Kredits bei vorgegebener Kredithöhe K, Kreditrate X und Aufzinsungsfaktor q berechnet werden. Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir (beachten Sie bitte die Rechenregeln für den Logarithmus, ☞ Tabelle 2.3, Seite 19):

$$\begin{aligned}
X &= K \cdot q^n \tfrac{q-1}{q^n-1} && |\cdot(q^n-1) \\
X(q^n-1) &= K\,q^n(q-1) && |-K\,q^n(q-1) \\
q^n(X-K(q-1)) - X &= 0 && |+X \\
q^n(X-K(q-1)) &= X && |:(X-K(q-1)) \\
q^n &= \tfrac{X}{X-K(q-1)} && |\ \ln \\
n\ln(q) &= \ln(X) - \ln(X-K(q-1)) && |:\ln(q) \\
n &= \tfrac{\ln(X)-\ln(X-K(q-1))}{\ln(q)}
\end{aligned}$$

(Achten Sie bitte darauf, ob die angegebenen Äquivalenzumformungen für die Konstanten q, X und K auch erlaubt sind.)

Gleichungen mit Logarithmen lassen sich (manchmal) durch Exponenzieren beider Seiten lösen.

Beispiel 2.23
Die Lösung von $\ln(x+1)=0$ erhalten wir durch Exponenzieren beider Seiten der Gleichung.

$$\ln(x+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\ln(x+1)}=e^0 \quad\Leftrightarrow\quad x+1=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

2.3.4 Potenzgleichungen

Gleichungen, die *nur eine* Potenz (☞ §2.2.3, Seite 13) der gesuchten Variable enthalten, lassen sich durch *Wurzelziehen* lösen.

Achten Sie bitte darauf, dass im Falle einer geraden Potenz die Gleichung (in $\mathbb{R}$) nicht immer lösbar, und die Lösung nicht eindeutig ist. Im Falle einer ungeraden Potenz ist die Gleichung (in $\mathbb{R}$) immer eindeutig lösbar (☞ Beispiel 2.24).

Beispiel 2.24
Die Lösungsmenge von $x^2=4$ lautet $L=\{-2,2\}$.
Die Gleichung $x^2=-4$ hat keine (reelle) Lösung.
Die Lösungsmenge von $x^3=-8$ ist $L=\{-2\}$.

2.3.5 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen lassen sich lösen, indem wir beide Seiten quadrieren oder potenzieren

Wurzel-
gleichung

Beispiel 2.25
Die Lösung von $\sqrt[3]{x-1}=2$ erhalten wir durch Potenzieren:

$$\sqrt[3]{x-1}=2 \quad\Leftrightarrow\quad x-1=2^3 \quad\Leftrightarrow\quad x=9$$

Bei Wurzelgleichungen mit geraden Radices (z.B. Quadratwurzel) stellt das Potenzieren keine Äquivalenzumformung dar (z.B. wird aus der „Nicht-Gleichung“ $-3\neq 3$ durch Quadrieren die Gleichung $(-3)^2=3^2$). Wir könnten (wie beim Multiplizieren mit einem Term) eine *„zusätzliche Lösung“* erzeugen. Der Definitionsbereich der Gleichung ist meist nur mehr eine kleine Teilmenge der reellen Zahlen. Er wird dadurch bestimmt, dass der Radikand unter einer Wurzel mit geradem Radix nicht negativ sein darf.

Wir müssen bei Wurzelgleichungen daher **immer** eine **Probe** durchführen.

Beispiel 2.26
Wir wollen die Gleichung $\sqrt{x-1}=1-\sqrt{x-4}$ lösen. Die Definitionsmenge ist $D=\{x|x\geq 4\}$. Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{x-1} & = & 1-\sqrt{x-4} & |^2 \\
x-1 & = & 1-2\cdot\sqrt{x-4}+(x-4) & |-x+3 \quad |:2 \\
1 & = & -\sqrt{x-4} & |^2 \\
1 & = & x-4 & \\
x & = & 5 &
\end{array}$$

Die Probe ergibt aber $\sqrt{5-1} = 1 - \sqrt{5-4} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 0$, eine *falsche* Aussage. Die Lösungsmenge ist daher $L = \emptyset$, die leere Menge.

2.3.6 Quadratische Gleichungen

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung der Form

quadratische Gleichung

$$\boxed{a x^2 + b x + c = 0 \qquad \text{Lösungen:} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

bzw. in Standardform

$$\boxed{x^2 + p x + q = 0 \qquad \text{Lösungen:} \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

2.3.7 Nullstellen von Polynomen

Quadratische Gleichungen sind ein Spezialfall von **algebraischen Gleichungen**

algebraische Gleichung

$$P_n(x) = 0$$

wobei $P_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Solche Gleichungen lassen sich schrittweise durch Abspalten von Linearfaktoren (durch Division, ☞ §2.2.4, Seite 14) lösen:

1. Wir suchen eine Nullstelle x_1 von $P_n(x)$ (z.B. durch Ausprobieren oder mit dem Newton-Verfahren (☞ §2.3.9)).
2. Mit $(x - x_1)$ erhalten wir einen Linearfaktor von $P_n(X)$.
3. Durch Division $P_n(x) : (x - x_1)$ erhalten wir ein Polynom $P_{n-1}(x)$ von Grad $n - 1$.
4. Falls $n - 1 = 2$ erhalten wir eine quadratische Gleichung. Andernfalls gehen wir wieder zu Schritt 1, d.h. wir suchen eine Nullstelle von $P_{n-1}(x)$.

Beispiel 2.27
Wir suchen die Lösungen von $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
Durch Ausprobieren erhalten wir die Lösung $x_1 = 1$.
Wir dividieren nun durch den Linearfaktor $(x - 1)$ und erhalten:
$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$ (vgl. Beispiel 2.9, Seite 16).
Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösungen $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.
Die Lösungsmenge lautet daher $L = \{1, 2, 3\}$.

Bemerkung 2.12
Für die Lösungen von Gleichungen 3. und 4. Grades gibt es ähnlich zu quadratischen Gleichungen allgemeine Formeln, die jedoch wesentlich komplizierter sind[14]. Für Polynome ab dem 5. Grad kann man beweisen, dass keine derartige Formel angegeben werden kann.

[14] Für Gleichungen 3. Grades gibt es z.B. die Formel von Cardano.

2.3.8 Nullstellen eines Produkts

Ein Produkt zweier (oder mehrerer) Terme $f(x) \cdot g(x)$ wird genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, also $f(x) = 0$ *oder* $g(x) = 0$.

Beispiel 2.28
$x^2 \cdot (x-1) \cdot e^x = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x^2 = 0$ ($\Rightarrow x = 0$) *oder* $x - 1 = 0$ ($\Rightarrow x = 1$) *oder* $e^x = 0$ (keine Lösung). Die Lösungsmenge dieser Gleichung lautet daher $L = \{0, 1\}$.

Bemerkung 2.13
Das Dividieren durch einen Faktor ist nur erlaubt, wenn dieser immer ungleich Null ist (☞ §2.3, Seite 20).

Wenn ein Polynom bereits als Produkt zweier oder mehrerer Faktoren vorliegt, dann sollte man einer etwaigen Versuchung widerstehen, dieses Produkt auszumultiplizieren. Die Nullstellen von $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$ sind offensichtlich, jene von $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ hingegen nicht.

2.3.9 Das Newtonverfahren

Newton-verfahren

Mit Hilfe des **Newtonverfahrens** lassen sich Nullstellen von Polynomen und anderen *differenzierbaren* Funktionen (☞ §5.1, Seite 65) näherungsweise berechnen. Es erzeugt eine Folge $\langle x_k \rangle$ (☞ §3.1, Seite 33) von Näherungslösungen, die gegen eine (vom Startwert abhängige) Nullstelle konvergiert (☞ §3.2, Seite 35).

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

$f'(x_k)$ ist dabei die erste Ableitung von f an der Stelle x_k (☞ §5.2, Seite 70).

Das Newtonverfahren konvergiert in den meisten Fällen schnell gegen eine Nullstelle.

Beispiel 2.29
Wir suchen eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ mit Hilfe des Newtonverfahrens. Als Startpunkt wählen wir $x_0 = 0$. Für die Rekursionsformel des Newtonverfahrens benötigen wir die erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$. Die ersten 4 Näherungslösungen sind daher:

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-6}{11} = 0{,}54545$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}84895$
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}97467$
$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0{,}99909$

2.4 Ungleichungen

Ungleichung

Eine **Ungleichung** erhalten wir durch Vergleichen zweier Terme mit einem der Ungleichheitszeichen $\leq$, $<$, $>$ oder $\geq$, z.B.:

$$\textit{linke Seite} \leq \textit{rechte Seite}$$

Lösungsmenge

Definitions-bereich

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung ist die Menge aller Zahlen aus dem Definitionsbereich, die die Ungleichung erfüllen. Sie besteht — im Gegensatz zu Gleichungen — meist aus einem Intervall oder der Vereinigung von Intervallen. Der **Definitionsbereich** ist der Durchschnitt der Definitionsmengen aller Terme der Ungleichung (vgl. Gleichungen, §2.3, Seite 19).

Äquivalenz-umformung

Zum Lösen einer Ungleichung versuchen wir — analog zu einer Gleichung — die gesuchte Größe durch **Äquivalenzumformungen** auf einer Seite der Ungleichung zu isolieren (☞ Äquvalenzumformungen, Seite 20).

Beim Multiplizieren mit einer *negativen* Zahl dreht sich das *Ungleichheitszeichen* um. Wir müssen daher beim Multiplizieren oder Dividieren mit einem Term stets eine Fallunterscheidung durchführen (vgl. auch die Bemerkungen zu den Äquivalenzumformungen auf Seite 20):

1. Fall: Das Ungleichheitszeichen dreht sich nicht um (der Term ist *größer* Null).

2. Fall: Das Ungleichheitszeichen dreht sich um (der Term ist *kleiner* Null).

3. Fall: Die Multiplikation oder Division ist nicht erlaubt (der Term ist *gleich* Null).

Beispiel 2.30

Wir suchen die Lösung von $\frac{2x-1}{x-2} \leq 1$. Da wir zur Lösung dieser Ungleichung mit $(x-2)$ multiplizieren, müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen:

1. Fall $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$: Wir erhalten $2x-1 \leq x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1$, ein Widerspruch zur Annahme $x>2$.

2. Fall $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$: Das Ungleichheitszeichen dreht sich um. $2x-1 \geq x-2 \quad \Leftrightarrow$ $x \geq -1$. Also $x<2$ und $x \geq -1$.

3. Fall $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$: Liegt nicht im Definitionsbereich.

Die Lösungsmenge lautet daher $L=[-1,2)$.

lineare Ungleichung

Exponential-ungleichung

Mittels solcher Äquivalenzumformungen lassen sich alle *linearen Ungleichungen* und viele *Exponentialungleichungen* lösen.

2.4.1 Polynom- und andere Ungleichungen

Polynomungleichungen lassen sich nicht einfach durch Äquivalenzumformungen lösen.

Bemerkung 2.14

Das Ersetzen des „="-Zeichens durch das Ungleichheitszeichen in der Lösung der quadratischen Gleichung (☞ §2.3.6, Seite 24) ist *falsch*.

Beispiel 2.31

Die Lösung von $x^2-3x+2 \le 0$ ist *nicht* $x_{1,2} \le \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ und somit $x \le 1$ (und auch nicht $x \le 2$). 0 ist zwar kleiner als 1 (oder 2), erfüllt aber trotzdem nicht die Ungleichung!

Folgende Vorgangsweise liefert die Lösungsmenge von Ungleichungen, die Polynome, rationale Ausdrücke oder andere *stetige* Terme enthalten[15]:

1. Wir bringen alle Variablen auf die linke Seite und erhalten einen Ausdruck der Form $T(x) \le$ konstant, wobei $T(x)$ ein beliebiger Term sein kann.

2. Wir berechnen alle Punkte in denen die Ungleichung zu einer Gleichung wird, d.h. wir ersetzen das Ungleichheitszeichen durch das „="-Zeichen und lösen die so entstandene Gleichung (☞ §2.3, Seite 19ff), d.h., im Falle einer Polynomungleichung berechnen wir die Nullstellen des Polynoms $T(x)$.

3. Die Lösungen der Gleichung zerlegen die *Definitionsmenge* (bei Polynomen: $(-\infty,\infty)$) in Intervalle I_k. Diese Intervalle sind offen, im Falle von *echten* Ungleichungen (mit < oder >), andernfalls abgeschlossen. (Achten Sie aber immer auf den Definitionsbereich!) In jedem dieser Intervalle ist nun die Ungleichung entweder überall oder in keinem einzigen Punkt erfüllt.

4. Wir wählen in jedem Intervall einen Punkt $x_k \in I_k$ aus. Ist die Ungleichung in x_k erfüllt, so ist sie im gesamten Intervall I_k erfüllt, andernfalls nicht.

Beispiel 2.31 (Fortsetzung)

Gesucht ist die Lösungsmenge von $x^2-3x+2 \le 0$. Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}$.
Die Lösungen von $x^2-3x+2=0$ sind $x_1=1$ und $x_2=2$.
Wir erhalten daraus drei Intervalle und überprüfen anhand dreier Punkte, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

$$\begin{array}{lrl} (-\infty,1] & \text{nicht erfüllt:} & 0^2-3\cdot 0+2=2 \not\le 0 \\ [1,2] & \text{erfüllt:} & \left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}+2=-\frac{1}{4} \le 0 \\ [2,\infty) & \text{nicht erfüllt:} & 3^2-3\cdot 3+2=2 \not\le 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge lautet daher $L=[1,2]$.

Beispiel 2.32

Wir suchen die Lösung von $\dfrac{x^2+x-3}{x-2} \ge 1$. Die Definitionsmenge besteht aus zwei Intervallen: $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.
Die Lösung von $\dfrac{x^2+x-3}{x-2}=1$ erhalten wir durch

$$\frac{x^2+x-3}{x-2}=1 \Leftrightarrow x^2+x-3=x-2 \Leftrightarrow x^2-1=0 \quad \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$$

Wir erhalten insgesamt vier Intervalle und überprüfen anhand von vier Punkten, ob die Ungleichung in den einzelnen Intervallen erfüllt ist:

---

[15] Das Verfahren funktioniert nur, wenn alle beteiligten Terme *stetig* (☞ §4.8, Seite 59ff) sind. Enthält der Term $T(x)$ Unstetigkeitsstellen, so müssen wir diese im Punkt 3 bei der Zerlegung des Definitionsbereichs in Intervalle berücksichtigen.

$(-\infty,-1]$	nicht erfüllt:	$\frac{(-2)^2+(-2)-3}{(-2)-2} = \frac{1}{4} \not\geq 1$
$[-1,1]$	erfüllt:	$\frac{0^2-0-3}{0-2} = \frac{3}{2} \geq 1$
$[1,2)$	nicht erfüllt:	$\frac{1{,}5^2+1{,}5-3}{1{,}5-2} = -\frac{3}{2} \not\geq 1$
$(2,\infty)$	erfüllt:	$\frac{3^2+3-3}{3-2} = 9 \geq 1$

Die Lösungsmenge lautet daher $L = [-1,1] \cup (2,\infty)$.

2.4.2 Betragsungleichungen

Ungleichungen mit Absolutbeträgen lassen sich genauso lösen wie in §2.4.1 beschrieben.

Wir können aber eine Betragsungleichung auch lesen als eine Abkürzung für zwei Ungleichungen:

$$|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \text{ und } x > -1$$

$$|x| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \text{ oder } x < -1$$

— Übungen

7. Stellen Sie die folgenden Zahlen im Gleitkommaformat mit 4-stelliger Mantisse dar (mathematische und EDV Schreibweise):

(a) $1{,}4932$ (b) $-137{,}197$ (c) $-97{,}2850$

(d) $\frac{64{,}917}{12{,}7\times10^{-5}+2{,}7\times10^{-4}}$ (e) $2{,}731\times23{,}817$ (f) $\sqrt{39{,}23}$

(g) $39{,}23^2$ (h) $0{,}002$ (i) $0{,}1\cdot10^3$

(j) $-0{,}1\cdot10^{-2}$ (k) $-75{,}959\times(0{,}178-3{,}9177)$

8. Stelle Sie die folgenden Zahlen im Festkommaformat dar:

(a) `8.93 E4` (b) `-8.930 E-4`

(c) `2.932 E0` (d) `-2.255 E-3`

(e) $\sqrt{1.210\times10^{-12}}$ (f) $(1.554\times10^4)\times(7.342\times10^{-4})$

(g) $(1.25\times10^{75})^2$ (h) -2.13×10^0

(i) $1.205\times10^{10}-1.205\times10^{11}$ (j) 1.99×10^{-2}

(k) 9.601×10^2 (l) $1.205\times10^{10}+1.205\times10^{11}$

9. Berechnen Sie Summe und Produkt:

(a) $\sum_{i=0}^{5} a^i b^{5-i}$ (b) $\prod_{i=1}^{5}(-2)^i$

10. Welche der Lösungen für die folgenden Ausdrücke ist richtig?

(a) $\sum_{i=2}^{10} 5(i+3) = ??$

1: $5(2+3+4+\ldots+9+10+3)$

2: $5(2+3+3+3+4+3+5+3+6+3+\ldots+10+3)$

3: $5(2+3+4+\ldots+9+10)+5\cdot3$

4: $5(2+3+4+\ldots+9+10)+9\cdot5\cdot3$

(b) $\prod_{i=1}^{2}(a+b)^i = ??$

1: $(a+b)^2$

2: $(a+b)^3$

3: $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

4: Keine dieser Lösungen

11. Vereinfachen Sie die folgenden Summenausdrücke:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2$ (b) $\sum_{i=1}^{n}(a_i b_{n-i+1} - a_{n-i+1} b_i)$

(c) $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 + \sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2$ (d) $\sum_{j=0}^{n-1} x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i$

(e) $\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

12. Vereinfachen Sie:

(a) $(x+h)^2-(x-h)^2$ (b) $(a+b)c-(a+bc)$

(c) $\dfrac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}}+\dfrac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{y}}$ (d) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x-1}$

(e) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$ (f) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{xy+xz+y(z-x)}$

13. Vereinfachen Sie:

(a) $(A-B)(A^2+AB+B^2)$ (b) $(A-x)^2+(A+x)^2$

(c) $y(xy+x+1)-\dfrac{x^2y^2-1}{x-\frac{1}{y}}$ (d) $\dfrac{s}{st^2-t^3}-\dfrac{1}{s^2-st}-\dfrac{1}{t^2}$

(e) $\dfrac{\frac{x^2+y}{2x+1}}{\frac{2xy}{2x+y}}$ (f) $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x+1}}{\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}}$

(g) $\dfrac{2x^2y-4xy^2}{x^2-4y^2}+\dfrac{x^2}{x+2y}$

14. Wie lautet der Koeffizient von x^4y^2 in den Entwicklungen (nach dem Binomischen Lehrsatz) von:

(a) $(2x^2+2y)^4$ (b) $(x+y)^6$ (c) $(x+2xy)^4$

(d) $(2x^2-2y)^4$ (e) $(2x^2-3y)^4$ (f) $(3x^2-y^2)^3$

15. Entwickeln Sie nach dem Binomischen Lehrsatz:

(a) $(x+y)^4-(x-y)^4$ (b) $(x+y)^4+(x-y)^4$ (c) $(x-x^2\sqrt{y})^3$

(d) $(x-2y)^3$ (e) $(3x+2\frac{y}{x})^3$ (f) $(x+rx^2)^4$

16. Da $f(x)=x^3-5x+2$ eine Nullstelle in $x=2$ besitzt, lässt sich $f(x)$ schreiben als $f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$. Wie lauten a, b und c?

17. Wie müssen die Konstanten a, b und c gewählt werden, damit die folgenden Gleichungen für alle x erfüllt sind:

(a) $\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{2}{2-x}=-\dfrac{2a+bx+cx^2}{2+x-x^2}$

(b) $\dfrac{x^2+2x}{x+2}-\dfrac{x^2+3}{x+3}=\dfrac{a(x-b)}{x+c}$

(c) $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{x(ax^2+bxy+cy^2)}{x^2-y^2}$

(d) $\dfrac{x}{1-\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{2-\frac{1}{x}}=\dfrac{ax^3+bx^2+cx}{2x^2-3x+1}$

18. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}}$ (b) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{6}}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{x}-4}{x^{\frac{1}{4}}-2}$

(d) $\dfrac{1}{(\sqrt{x})^{-\frac{3}{2}}}$ (e) $\dfrac{\frac{2}{x^{-\frac{1}{7}}}}{x^{-\frac{7}{2}}}$ (f) $\left(\dfrac{|x|^{\frac{1}{3}}}{|x|^{\frac{1}{6}}}\right)^6$

19. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{(\sqrt{x}+y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}$ (b) $\dfrac{1}{3\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{3\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{6}}-3}{(xy)^{\frac{1}{3}}-9}$ (d) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

20. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\log_2(2)$, $\log_2(4)$, $\log_2(16)$, $\log_2(0)$, $\log_2(1)$, $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$, $\log_2\left(\sqrt{2}\right)$, $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\log_2(-4)$.

(b) $\log_{10}(300)$, $\log_{10}(3^{10})$. [Verwenden Sie $\log_{10}(3)=0,47712$.]

21. Berechnen (vereinfachen) Sie ohne Taschenrechner:

(a) $0{,}01^{-\log_{10}(100)}$ (b) $\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right)$ (c) $10^{3\log_{10}(3)}$

(d) $\frac{\log_{10}(200)}{\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(49)}$ (e) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right)$ (f) $\log_{\frac{1}{3}}(81)$

22. Schreiben Sie in der Form $y = A\,e^{cx}$ (i.e., bestimmen Sie A und c):

(a) $y = 10^{x-1}$ (b) $y = 4^{x+2}$ (c) $y = 3^x 5^{2x}$

(d) $y = 1{,}08^{x-\frac{x}{2}}$ (e) $y = 0{,}9\cdot 1{,}1^{\frac{x}{10}}$ (f) $y = \sqrt{q}\,2^{x/2}$

23. Die folgenden Polynome f_i haben die Nullstelle $x_0 = -2$. Stellen Sie die Polynome in der Form $f_i(x) = (x-x_0)g_i(x)$ dar (i.e., berechnen Sie die Polynome g_i):

(a) $f_1(x) = 2x^4+7x^3+6x^2+x+2$ (b) $f_2(x) = -x^3+5x^2+22x+16$

(c) $f_3(x) = -3x^4-6x^3+x^2+10x+16$ (d) $f_4(x) = 7x^3+6x^2-14x+4$

24. Geben Sie ein Polynom 4. Grades mit den Nullstellen -1, 2, 3 und 4 an. Wie lautet die Menge aller Polynome mit diesen Nullstellen. Kann so ein Polynom noch andere Nullstellen haben?

25. Stellen Sie folgende Polynome als Produkte von Linearfaktoren dar.

(a) $f_1(x) = x^3+7x^2-x-7$ mit Nullstelle -7
(b) $f_2(x) = x^4+2x^3-13x^2-14x+24$ mit Nullstellen $1, -2$
(c) $f_3(x) = 2x^3+7x^2-17x-10$ mit Nullstelle -5

26. Berechnen Sie die Nullstellen und zerlegen Sie in Linearfaktoren:

(a) $f(x) = 3x^2-9x+2$ (b) $f(x) = 2x^2-5x+1$

(c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-12$ (d) $f(x) = x^2+4x+3$

(e) $f(x) = 5x^2-5x-6$ (f) $f(x) = 4x^2-12x-4$

27. Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy+x-y=0$ (b) $3xy+2x-4y=1$

(c) $x^2-y^2+x+y=0$ (d) $x^2y+xy^2-x-y=0$

(e) $x^2+y^2+2xy=4$ (f) $9x^2+y^2+6xy=25$

(g) $4x^2+9y^2=36$ (h) $4x^2-9y^2=36$

(i) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

28. Lösen Sie nach y und nach x auf:

(a) $xy^2 + yx^2 = 6$
(b) $xy^2 + (x^2 - 1)y - x = 0$
(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x-y}$
(d) $\frac{y}{y+x} = \frac{y-x}{y+x^2}$
(e) $\frac{1}{y-1} = \frac{y+x}{2y+1}$
(f) $\frac{yx}{y+x} = \frac{1}{y}$
(g) $(y+2x)^2 = \frac{1}{1+x} + 4x^2$
(h) $y^2 - 3xy + (2x^2 + x - 1) = 0$
(i) $\frac{y}{x+2y} = \frac{2x}{x+y}$

29. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $2^x = 3^{x-1}$
(b) $3^{2-x} = 4^{\frac{x}{2}}$
(c) $2^x 5^{2x} = 10^{x+2}$
(d) $2 \cdot 10^{x-2} = 0{,}1^{3x}$
(e) $\frac{1}{2^{x+1}} = 0{,}2^x 10^4$
(f) $(3^x)^2 = 4 \cdot 5^{3x}$

30. Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$ mit $f(x) = \ln\left(x^2(x - \frac{7}{4}) + (\frac{x}{4} + 1)^2\right)$.

31. Das Newtonverfahren zur näherungsweisen Berechnung der Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$ startet mit $x_0 = 3$, wie lauten die ersten Näherungen (Iterationsschritte) x_1, x_2, x_3?

32. Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$
(b) $x^3 - 2x^2 - 3x > 0$
(c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
(d) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
(e) $x^2 - 2x + 6 \leq 1$
(f) $x^2 - 2x + 6 \geq 1$

33. Stellen Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen dar:

(a) $7 \leq |12x + 1|$
(b) $\dfrac{x+4}{x+2} < 2$
(c) $\dfrac{3(4-x)}{x-5} \leq 2$
(d) $25 < (-2x+3)^2 \leq 50$
(e) $42 \leq |12x + 6| < 72$
(f) $5 \leq \dfrac{(x+4)^2}{|x+4|} \leq 10$

34. Stellen Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen dar:

(a) $4 \geq \dfrac{-2x+4}{x+2} \geq 2$
(b) $2x + \frac{5}{4} \leq 3x + 1 \leq 2x + 3$
(c) $4 \geq \dfrac{-2x-4}{x+2} \geq 2$
(d) $\dfrac{2x+3}{x-2} \leq 2 \leq \dfrac{x+3}{x+2}$

3

Folgen und Reihen

"Can you do Addition?" the White Queen asked. "What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one?"
"I don't know," said Alice. "I lost count."
Through the Looking Glass
LEWIS CARROLL (1832–1898)

3.1 Was sind Folgen und Reihen?

In einem Sparbuch sind alle Buchungsposten (Gutschriften, Belastungen, usw.) für ein bestimmtes Sparkonto, aufgelistet — *geordnet* nach dem Buchungstag. Die Buchungsbeträge in den einzelnen Zeilen bilden somit eine *„geordnete Menge"* von (reellen) Zahlen.

Definition 3.1 (Folge)
*Eine **Folge** ist eine Anordnung von reellen Zahlen. Die einzelnen* Zahlen *heißen **Glieder** der Folge.* Folge Glied

Formal: Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$.

Folgen werden mit $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ oder kurz $\langle a_i \rangle$ bezeichnet[1].

Folgen können definiert werden

- durch **Aufzählen** der Glieder,
- durch Angabe eines **Bildungsgesetzes** oder Bildungsgesetz
- durch **Rekursion**[2]. Rekursion

Beispiel 3.1
Aufzählung: $\langle a_i \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \rangle$
Bildungsgesetz: $\langle a_i \rangle = \langle 2i - 1 \rangle$
Rekursion: $\langle a_i \rangle$, $a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i + 2$

[1]Statt *spitzen* Klammern sind auch *runde* Klammern üblich: (a_i).
[2]Jedes Folgeglied wird durch seine(n) Vorgänger bestimmt.

Tabelle 3.1: Charakteristische Eigenschaften von Folgen $\langle a_i \rangle$

Bezeichnung	Definition	
monoton steigend	$a_{i+1} \geq a_i$	für alle $i \in \mathbb{N}$
monoton fallend	$a_{i+1} \leq a_i$	
alternierend	$a_{i+1} \cdot a_i < 0$,	d.h. das Vorzeichen wechselt.
beschränkt	$\lvert a_i \rvert \leq M$,	für ein $M \in \mathbb{R}$.

Eine Folge $\langle a_i \rangle$ kann graphisch dargestellt werden, indem man

(1) die einzelnen Folgeglieder in der Zahlengerade aufträgt, oder

(2) die Zahlenpaare (n, a_n) in der Zahlenebene einzeichnet.

Beispiel 3.2
Abbildung 3.1 zeigt die ersten 10 Glieder der Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ in beiden Darstellungsmöglichkeiten.

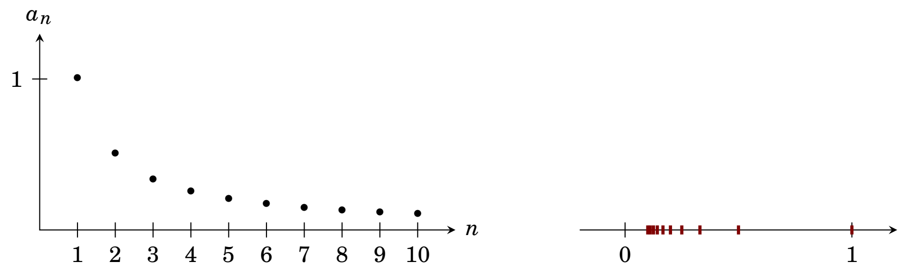


Abbildung 3.1: Graphische Darstellung der ersten 10 Glieder der Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$

Tabelle 3.1 listet einige Eigenschaften auf mit denen sich Folgen charakterisieren lassen. Man beachte, dass M im Falle einer beschränkten Folge nicht notwendigerweise bekannt sein muss. Es muss nur sichergestellt sein, dass so ein M existiert.

Beispiel 3.3
Die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ ist monoton fallend und beschränkt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|a_n| = |1/n| \leq 1$ gilt. (Wir hätten auch $M = 1000$ wählen können.)
Sie ist jedoch *nicht* alternierend.

Wir können nun in unserem Sparbuchbeispiel die ersten k Buchungsbeträge addieren: $s_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$. So eine Summe heißt die k-te **Teilsumme** (oder **Partialsumme**) der Folge $\langle b_i \rangle$. Da bei Kontoeröffnung das Guthaben genau 0 Geldeinheiten betragen hat, ist dieses s_k gerade der Kontostand nach k Buchungszeilen. Diese Kontostände bilden wiederum eine Folge. Teilsumme

Definition 3.2 (Reihe)
*Die Folge $\langle s_k \rangle$ aller Teilsummen einer Folge $\langle a_i \rangle$ heißt die **Reihe** der Folge $\langle a_i \rangle$.* Reihe

Beispiel 3.4

Die Reihe der Folge $\langle a_i \rangle = \langle 2i-1 \rangle$ lautet

$$\langle s_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} 2i-1 \right\rangle = \langle 1,4,9,16,25,\dots \rangle = \langle k^2 \rangle$$

3.2 Grenzwerte und ihre Berechnung

Betrachten wir die Folge $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$. In Abbildung 3.2 sind die ersten Glieder dieser Folge auf der Zahlengerade aufgetragen.

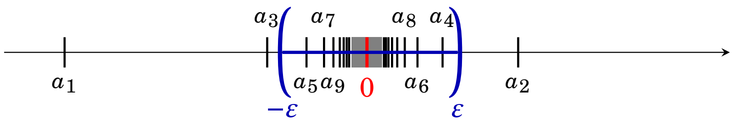


Abbildung 3.2: Grenzwert der Folge $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$

Es fällt auf, dass sich die Glieder immer mehr dem Wert 0 nähern, je größer n wird. Sie *„streben"* mit wachsendem n gegen 0. Wir sagen, *die Folge $\langle a_n \rangle$* **konvergiert** *gegen* 0.

Definition 3.3 (Limes)

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt ***Grenzwert*** *(oder* ***Limes****) einer Folge $\langle a_n \rangle$, wenn es für jedes noch so kleine Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ein a_N gibt, sodass $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für alle $n \geq N$ (m.a.W.: alle Folgeglieder ab a_N liegen im Intervall).* Grenzwert Limes

Wir schreiben dafür

$$\boxed{\langle a_n \rangle \to a \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a}$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**. Sie **konvergiert** gegen ihren Grenzwert. konvergent

Beispiel 3.5

In unserem Beispiel ist $a = 0$. In Abbildung 3.2 ist das Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0{,}3$ eingezeichnet. Alle Folgeglieder ab a_4 liegen in diesem Intervall. Wenn wir ein kleineres Intervall betrachten, etwa für $\varepsilon = \frac{1}{1\,000\,000}$, so liegen wiederum alle Folgeglieder ab dem 1 000 001-ten Glied in diesem Intervall. Daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\,.$$

Beispiel 3.6

Die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\rangle$ konvergiert 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0\,.$$

Beispiel 3.7

Die Folge $\langle b_n \rangle = \left\langle \frac{n-1}{n+1} \right\rangle = \left\langle 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots \right\rangle$ ist konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1\,.$$

Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert. So eine Folge heißt dann **divergent**. divergent

Beispiel 3.8

Die Folge $\langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \rangle$ besitzt keinen Grenzwert, da sie größer als jede beliebige natürliche Zahl wird. Sie strebt gegen ∞.

Derartige Folgen heißen **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (oder $-\infty$). Wir schreiben dafür bestimmt divergent

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)}$$

Beispiel 3.9

Die Folge $\langle (-1)^n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$ besitzt keinen Grenzwert. Es liegen zwar alle geraden Folgeglieder in jedem noch so kleinem Intervall um 1. Es enthält aber kein einziges ungerades Folgeglied. Die Folge strebt auch nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

So eine Folge heißt **(unbestimmt) divergent**.

Es ist im Allgemeinen schwierig, Grenzwerte zu berechnen. In Tabelle 3.2 sind daher die Grenzwerte einiger besonders wichtiger Folgen aufgelistet. Aus diesen Grenzwerten lassen sich viele weitere Grenzwerte mit Hilfe der Regeln aus Tabelle 3.3 herleiten.

Beispiel 3.10

$$\lim_{n\to\infty} \left(2^{-n} \cdot n^{-1}\right) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{2^{-n}}_{\lim=0} \overset{(5)}{=} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \overset{(1)}{=} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2$$

Wir müssen beim Anwenden dieser Rechenregeln darauf achten, dass wir keine Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 \cdot \infty$ erhalten (☞ Beispiel 3.11). Diese Ausdrücke sind *nicht definiert* und der Grenzwert könnte jeder beliebige Wert bzw. die Folge könnte divergent sein. Auch können wir aus $\lim = \frac{1}{0}$ *nicht* schließen, dass $\lim = \infty$ (oder $\lim = -\infty$).

Beispiel 3.11

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^2+1}{\lim_{n\to\infty} n^2-1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ = nicht definiert})$$

Trick: *Kürzen* durch die ***höchste*** *vorkommende Potenz im* ***Nenner***.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{1+n^{-2}}{1-n^{-2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1+n^{-2}}{\lim_{n\to\infty} 1-n^{-2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Tabelle 3.2: Grenzwerte wichtiger Folgen

$$\lim_{n\to\infty} c = c \text{ für alle } c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha > 0 \\ 1 & \text{für } \alpha = 0 \\ 0 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{für } q > 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ 0 & \text{für } -1 < q < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \le -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{n^a}{q^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| > 1 \\ \infty & \text{für } 0 < q < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } -1 < q < 0 \end{cases} \qquad (|q| \not\in \{0,1\})$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818\ldots$$

Tabelle 3.3: Rechenregeln für Limiten

Gegeben sind zwei konvergente Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. $\langle c_n \rangle$ sei eine beschränkte Folge.

	Regel	
(1)	$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n + d) = c \cdot a + d$	
(2)	$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$	
(3)	$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$	
(4)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$	für $b \neq 0$
(5)	$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = 0$	falls $a = 0$
(6)	$\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$	für $k \in \mathbb{N}$

Tabelle 3.4: Eigenschaften von arithmetischen und geometrischen Folgen

Arithmetische Folge:	Geometrische Folge:
Die *Differenz* aufeinanderfolgender Glieder ist konstant:	Der *Quotient* aufeinanderfolgender Glieder ist konstant:
$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$	$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$
Bildungsgesetz:	
$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$	$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$
Jedes Glied ist das *arithmetische Mittel* seiner Nachbarglieder:	Jedes Glied ist das *geometrische Mittel* seiner Nachbarglieder:
$\boxed{a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1})}$	$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}}$
Summenformel: **Arithmetische Reihe:**	**Geometrische Reihe:**
$\boxed{\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}}$	$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ für } q \neq 1}$

3.3 Arithmetische und geometrische Folgen

Arithmetische und geometrische Folgen sind von grundlegender Bedeutung für die *Finanzmathematik* (☞ §3.4). Tabelle 3.4 listet die grundlegende Eigenschaften dieser Folgen auf.

Bemerkung 3.1

Es ist manchmal üblich, bei Folgen und Reihen bei 0 anstatt bei 1 zu zählen zu beginnen. Die Bildungsgesetze und Summenformeln für die arithmetische Folge lauten dann

$$a_n = a_0 + n \cdot d \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

und für die geometrische Folge

$$a_n = a_0 \cdot q^n \quad \text{bzw.} \quad s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (\text{für } q \neq 1)$$

3.4 Zinsen, Renten und Kredite

Zinsenrechnung

Ein Sparer legt seine Ersparnisse von $K = K_0$ Geldeinheiten auf ein Sparbuch und bekommt dafür $p = 5\%$ Zinsen p.a. Wie groß ist sein Guthaben nach 1, 2, …, n Jahren?

$$\begin{aligned}
\text{Guthaben nach einem Jahr:}\quad & K_1 = K_0 + \overbrace{p \cdot K_0}^{\text{Zinsen}} = K_0(1+p) = K_0 \cdot q \\
\text{nach dem zweiten Jahr:}\quad & K_2 = K_1 \cdot q = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
\cdots\cdots \quad & \\
\text{nach dem } n\text{-ten Jahr:}\quad & K_n = K_{n-1} \cdot q = (K_{n-2} \cdot q) \cdot q = \ldots = K_0 \cdot q^n
\end{aligned}$$

Das Kapital wird also jedes Jahr (jede *Verzinsungsperiode*) durch Multiplikation des Kapitals des vorangegangenen Jahres mit einem konstanten Faktor $q = (1+p)$ berechnet. Dieser Faktor wird als **Aufzinsungsfaktor** bezeichnet. Die Guthaben in den einzelnen Jahren bilden somit eine *geometrische Folge*[3]. Aufzinsungsfaktor

Wir haben hier die Veränderung eines Kapitals oder Geldbetrages im Zeitverlauf durch Verzinsung oder Wertsteigerung betrachtet. Der Begriff der **Verzinsung** kann aber auch auf andere Veränderungen, z.B. durch Inflation, erweitert werden. Der betrachtete Zeitraum wird in Perioden, an deren Ende eine Verzinsung stattfindet, untergliedert. Die Dauer einer Periode ist von Fall zu Fall unterschiedlich und beträgt z.B. bei Sparkonten typischerweise ein Jahr. Verzinsung

Wir können daher die Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$ auf den allgemeinen Fall des Wertzuwachses bzw. der Wertabnahme eines Kapitals im Zeitablauf erweitern. Es seien K_n und K_m die Werte eines Kapitals zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten n und m bei einem Zinssatz p. Dann ist

$$\boxed{K_n = K_m \cdot q^{n-m} \qquad \text{mit } q = 1 + p}$$

Wenn $n < m$, spricht man von einer **Abzinsung** oder **Diskontierung** von K_m auf K_n. Wenn $n > m$ wird K_m auf K_n **aufgezinst**. Diskontierung

Beispiel 3.12
Ein Guthaben G auf einem Sparbuch beträgt 1990, 17 683 Geldeinheiten. Wie hoch war das Guthaben im Jahre 1988 bzw. wie hoch wird es im Jahr 1995 bei einer Verzinsung von 8% sein?

1988: $G_{1988} = G_{1990} \cdot (1 + 0{,}08)^{1988-1990} = 17\,683 \cdot 1{,}08^{-2} \approx 15\,160{,}32$
1995: $G_{1995} = G_{1990} \cdot (1 + 0{,}08)^{1995-1990} = 17\,683 \cdot 1{,}08^{5} \approx 25\,982{,}13$

[3]In §3.1 haben wir gelernt, dass die Folgeglieder mit **1** beginnend numeriert werden, hier beginnen wir jedoch mit **0**! Daraus ergibt sich auch der Unterschied von unserer Formel und dem Bildungsgesetz für die geometrische Folge (☞ §3.3, Bem. 3.1). Wir erlauben uns hier jedoch diese Inkonsequenz. Unsere Formel ist dafür verständlicher als $K_n = K_1 \cdot q^{n-1}$ für das Kapital im $(n-1)$-ten Jahr. Solche „Schummeleien“ werden Ihnen noch das eine oder andere mal begegnen, und zwar nicht nur in diesem Skriptum.
Überprüfen Sie bitte daher immer die Voraussetzungen für eine Formel vor deren Verwendung.

Rentenrechnung (nachschüssig)

Eine Zahlung, die in gleicher Höhe in regelmäßigen Abständen erfolgt, heißt eine **Rente**. Wird die Rente jeweils zu Beginn einer Periode bezahlt, so heißt sie **vorschüssig**, andernfalls **nachschüssig**. Wir werden hier nur auf *nachschüssige* Renten eingehen. Rente

Der **Endwert** einer Rente ist die Summe aller Zahlungen auf den Endzeitpunkt der Rente *aufgezinst*. Endwert

Sei R die Rente, p die Verzinsung (Zinssatz), $q = (1+p)$ und n die Anzahl der Zahlungen so erhält man den Endwert durch

$$E_n = \underbrace{R \cdot q^{n-1}}_{\text{erste Zahlung}} + \underbrace{R \cdot q^{n-2}}_{\text{zweite Zahlung}} + \cdots + \underbrace{R \cdot q^0}_{\text{letzte Zahlung}}$$

Nach der Summenformel für geometrische Folgen (geometrische Reihe, ☞ Tab. 3.4 auf Seite 38) gilt daher

$$\boxed{E_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Der **Barwert** ist die Summe aller Rentenzahlungen auf den Beginn der Rente *abgezinst*. Er wird durch Abzinsung des Endwertes für n Perioden berechnet. Barwert

$$\boxed{B_n = \frac{E_n}{q^n} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}}$$

Ein Spezialfall ist die **ewige Rente**. Darunter versteht man eine Rente, die unendlich oft gezahlt wird. Ihr Endwert ist immer unendlich[4]. Ihr Barwert lässt sich durch den Grenzwertübergang der Anzahl der Zahlungen n berechnen. ewige Rente

$$\boxed{B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{R}{q-1}}$$

Beispiel 3.13

Berechnen Sie Bar- und Endwert einer jährlichen Rente von 2000 Geldeinheiten für 10 Jahre bei einer Verzinsung von 5%. Wie hoch wäre der Barwert für eine ewige Rente gleicher Höhe und Verzinsung?
$R = 2000$, $n = 10$, $p = 0{,}05$, $q = 1 + p = 1{,}05$.

$$\text{Endwert: } E_{10} = 2000 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{1{,}05 - 1} \approx 25\,155{,}79$$

$$\text{Barwert: } B_{10} = \frac{E_{10}}{1{,}05^{10}} \approx 15\,443{,}47$$

[4] da immer $p > 0$ und damit $q > 1$ ist.

ewige Rente: $B_\infty = \dfrac{2000}{1{,}05-1} \approx 40\,000$

Tilgungsrechnung

In der Tilgungsrechnung geht es um die Rückzahlung von Krediten, Darlehen udg. Im Falle gleichbleibender Rückzahlungsraten kann man zur Berechnung der Kreditrate die Rentenrechnung verwenden. Dabei muss der Barwert der Tilgungszahlungen gleich der ursprünglichen Kredithöhe K sein. Sei im folgenden X die Höhe der Tilgungsraten, p der Zinssatz und n die Laufzeit des Kredits, dann muss gelten

$$K = B_n = X \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

Daraus erhält man durch Umformen die Höhe der Kreditrate.

$$\boxed{X = K \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1}}$$

Falls die Kreditrate bekannt ist, lässt sich aus dieser Formel auch die Laufzeit des Kredits berechnen. Durch Umformung (☞ §2.3.3, Seite 22) erhalten wir

$$\boxed{n = \frac{\ln X - \ln(X - K(q-1))}{\ln q}}$$

Beispiel 3.14
Ein Kredit über 50 000 Geldeinheiten wird mit 9% p.a. verzinst.

(a) Wie hoch sind die jährlichen Tilgungszahlungen bei einer Laufzeit von 10 Jahren?
$K = 50\,000$, $q = 1{,}09$ und $n = 10$:

$$X = 50\,000 \cdot 1{,}09^{10} \frac{1{,}09-1}{1{,}09^{10}-1} \approx 7791$$

(b) Wie hoch muss die Laufzeit des Kredits angesetzt werden, damit die Rückzahlungsraten 10 000 Geldeinheiten nicht übersteigen.
Für eine jährliche Tilgungszahlung von $X = 10\,000$, $q = (1+p) = 1{,}09$ und $K = 50\,000$ erhalten wir

$$n = \frac{\ln 10\,000 - \ln(10\,000 - 50\,000 \cdot 0{,}09)}{\ln 1{,}09} \approx 6{,}94$$

Die Laufzeit muss daher mindestens 7 Jahre betragen.

Unter **Konversion** einer Schuld versteht man die Änderung der Tilgungsbedingungen während der Laufzeit des Kredits, z.B. durch Änderung des Zinssatzes. Es gilt: Konversion

Die Restschuld[5] *des alten Tilgungsplanes ist das neue Schuldkapital für den neuen Tilgungsplan.*

Beispiel 3.14 (Fortsetzung)
(c) Im Kredit aus Beispiel (a) steigt nach 4 Jahren die Verzinsung auf 10% p.a.. Wie hoch ist die neue Kreditrate?

$$\begin{aligned} \text{Restschuld} &= \text{Kredit aufgezinst um 4 Jahre} - \text{Endwert der ersten 4 Tilgungsraten} \\ &= 50\,000 \cdot 1{,}09^4 - 7791 \frac{1{,}09^4 - 1}{1{,}09 - 1} \approx 34\,949{,}83 \end{aligned}$$

Berechnen neuen Kredit mit $K = 34\,949{,}83$, $n = 10 - 4 = 6$ und $q = 1 + p = 1{,}10$:

$$X_{\text{neu}} = 34\,949{,}83 \cdot 1{,}10^6 \frac{1{,}10 - 1}{1{,}10^6 - 1} \approx 8024{,}74$$

[5] die um die bisher geleisteten Tilgungszahlungen verminderte Schuld.

— Übungen

35. Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folgen und stellen Sie diese graphisch dar:

(a) $2n$ (b) $\frac{1}{2+n}$ (c) $e^{\sqrt{n}}$ (d) $e^{-\sqrt{n}}$
(e) $n^{1/3}$ (f) $n^{1/n}$ (g) $(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ (h) $2^n/3^{\sqrt{n}}$

36. Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen der Folgen und stellen Sie diese graphisch dar:

(a) $2n$ (b) $\frac{1}{2+n}$ (c) $2^{n/10}$ (d) $e^{-\sqrt{n}}$
(e) $n^{1/3}$ (f) $(-1)^n \frac{1}{n}$ (g) $(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ (h) $\frac{2}{1+2^n}$

37. Berechnen Sie:

(a) $\sum_{n=1}^{10}(7n+18)$ (b) $\sum_{n=-3}^{8}(2n-8)$
(c) $\sum_{n=1}^{7} 5(n-3)$ (d) $\sum_{n=4}^{8}(5n+6(n-4))$

38. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-6n^2+3n-1}{7n^3-16}\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-(-1)^n n^3\right)$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n \bmod 10}{(-2)^n}\right)$

Hinweis: Die Operation $a \bmod b$ hat als Ergebnis den Rest der ganzzahligen Division von a durch b, also z.B. $17 \bmod 5 = 2$, $12 \bmod 4 = 0$ und $33 \bmod 7 = 5$.

39. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen $\langle a_n \rangle$ mit

(a) $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (b) $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$ (c) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
(d) $a_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ (e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (f) $a_n = \frac{n}{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n}}$
(g) $a_n = \frac{n}{n+1}+\sqrt{n}$ (h) $a_n = \frac{4+\sqrt{n}}{n}$

Hinweis: Substituieren (ersetzen) Sie in (c) n durch $2n$. Dabei bleibt der Grenzwert unverändert (Analog n durch $-2n$ in (d)). Verwenden dann Sie Regel (6) aus Tabelle 3.3.

40. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+n+1}{(-1)^n n^5}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n}{2n-1}-\frac{4n^2-1}{5-3n^2}\right)$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}9^n$

41. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n$

42. $\langle a_n \rangle$ sei eine geometrische Folge mit $a_1 = 2$ und relativer Zuwachsrate 0,1. Wie lautet das Bildungsgesetz von $\langle a_n \rangle$ und wie lautet a_7?

43. $\langle a_n \rangle$ sei eine geometrische Folge mit $a_7 = 12$ und relativer Zuwachsrate $-0{,}3$. Wie lautet das Bildungsgesetz von $\langle a_n \rangle$ und wie lautet a_1?

44. Berechnen Sie die ersten 10 Partialsummen der arithmetischen Reihe für $a_1 = 0$, $d = 1$, bzw. $a_1 = 1$, $d = 2$.

45. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{N} a_n$ für
(a) $N = 7$ und $a_n = 3^{n-2}$
(b) $N = 7$ und $a_n = 2(-1/4)^n$
(c) $N = 10$ und $a_n = 100 \cdot (1{,}1)^n$
(d) $N = \infty$ und $a_n = 0{,}95^n$

46. Die Bevölkerung eines Landes (konstantes relatives Wachstum) betrug 1960 4,0 Millionen und 1975 5,0 Millionen. In welchem Jahr wird die Bevölkerung sich im Vergleich zu 1960 verdoppelt haben (gerundet)?

47. Ein Angestellter bezog im Jahr 1970 ein Jahreseinkommen von 180 000 GE. Wie viel hat er in den Jahren 1970 – 1990 insgesamt verdient, wenn

(a) sein Einkommen jährlich mit der (konstanten) relativen Zuwachsrate von 6% gewachsen ist?
(b) sein Einkommen jährlich um den (konstanten) Betrag 12 000 GE gewachsen ist?

48. Ein Kapital von 12 000 Geldeinheiten wird zu 6% jährlich für fünf Jahre angelegt. Auf welchen Wert ist es bei Berechnung von Zinseszinsen angestiegen?

49. Welcher nominelle Zinsfuß verdreifacht bei kontinuierlicher Verzinsung ein Kapital im Lauf von 15 Jahren?

50. Welcher Zinssatz führt nach 8 Jahren zum selben Kapitalwachstum wie der Zinssatz von 5% in 10 Jahren? Wie hoch ist der Endwert des Kapitals?

51. In einem Mietvertrag ist eine Wertsicherungsklausel vereinbart. Die Höhe der Miete beträgt zu Beginn 1989 73 792,43 Geldeinheiten. Wie hoch war die Miete ursprünglich bei Vertragsschluss zu Beginn 1982 und wie hoch wird sie zu Beginn des Jahres 2000 sein, wenn die Inflationsrate 3% beträgt?
Hinweis: Bei einem wertgesicherten Mietvertrag wird die Höhe der Miete regelmäßig an die Inflation angepasst. Nehmen Sie für dieses Beispiel an, dass die Anpassung jährlich erfolgt.

52. Jemand zahlt zu Beginn jedes Jahres einen Geldbetrag auf ein Sparbuch ein, um nach 10 Jahren eine Reise im Wert von 100 000 GE finanzieren zu können. Wie hoch muss der Geldbetrag mindestens sein, wenn die Verzinsung jährlich 5% beträgt?
Hinweis: Der Endwert einer *vorschüssigen* Rente ergibt sich durch
$E_{\text{vorschüssig}} = q \cdot E_{\text{nachschüssig}}$. ($q$ ist der Aufzinsungsfaktor.)

53. Eine Rente von jährlich 2000 Geldeinheiten wird bei einer Verzinsung von 7% für 15 Jahre nachschüssig ausbezahlt.

(a) Wie hoch sind der Barwert und der Endwert der Rente?
(b) Angenommen, es handelt sich um eine ewige Rente. Wie hoch ist ihr Barwert?
(c) Wieviele Jahre müsste diese Rente ausbezahlt werden, damit ihr Barwert 21 188,03 Geldeinheiten beträgt?

54. (a) Wie hoch ist die jährliche Rückzahlungsrate eines 1990 gewährten Kredits in der Höhe von 80 000 Geldeinheiten bei einer Verzinsung von 12% und einer Laufzeit von 7 Jahren?

(b) Wie müsste die Laufzeit dieses Kredits verändert werden, damit die jährliche Rückzahlungsrate 14 158,73 beträgt?

(c) Nach drei Jahren steigt die Verzinsung auf 14%. Wie hoch ist die neue Kreditrate?

55. Sie legen 100 000 GE mit 7% p.a. Verzinsung für 3 Jahre an. Berechnen Sie den Barwert dieser Anlage bezüglich einer jährlichen Inflationsrate von 3,5%.

56. Sie legen für 10 Jahre 100 000 GE auf ein Sparbuch mit 5% p.a. Von den jährlich anfallenden Zinsen führen Sie als Kapitalsertragssteuer 25% ab. Die Inflationsrate betrage $3\frac{3}{4}\%$ p.a. Geben Sie den Barwert dieser Anlage an. (Der Abzinsungsfaktor wird durch die Inflationsrate bestimmt.)

57. Ein Kredit über 100 000 Geldeinheiten wird mit 11,25% p.a. verzinst. Wie groß muss die Laufzeit des Kredits (in Jahren) mindestens betragen, wenn die jährliche Rückzahlungsrate 18 000 Geldeinheiten nicht übersteigen darf?

58. Ein Kapital von 10 000 GE soll durch Verzinsung nach einem Jahr auf 12 000 GE wachsen. Wie hoch muss der nominelle Jahreszins bei kontinuierlicher Verzinsung, bei 1, 2 oder bei 12 Verzinsungsperioden sein?

59. Erklären Sie: Der Barwert einer sehr lang währenden Rente hängt von ihrer Dauer kaum ab.

60. Ein Bauer verkauft seinen Hof. Er kann zwischen drei Angeboten wählen:

1. Angebot:	1 Mio. GE sofort
2. Angebot:	2 Mio. GE nach 10 Jahren
3. Angebot:	eine jährliche (nachschüssige) Rente von 140 000 GE über 10 Jahre

Vergleichen Sie die Angebote bei einem Zinssatz von 8%. Ermitteln Sie jeweils den Barwert und den Endwert.

61. Durch gleichbleibende Zahlungen am Ende jedes Jahres soll nach 20 Jahren ein Kapital von 400 000 GE angespart werden. Wie hoch muss die jährliche Zahlung sein, wenn der Zinsfuß in den ersten 10 Jahren $p = 5\%$, dann aber $p = 3\%$ beträgt?

62. Welches Kapital ermöglicht es, bei einem Zinsfuß von 4,5% eine ewige nachschüssige Rente von 4500 GE zu finanzieren?

4

Reelle Funktionen

Jede Entdeckung wird gleich in die Gesamtheit der Wissenschaften geleitet und hört damit gewissermaßen auf, Entdeckung zu sein, sie geht im Ganzen auf und verschwindet, man muss schon einen wissenschaftlich geschulten Blick haben, um sie dann noch zu erkennen.
Der Dorfschullehrer
FRANZ KAFKA (1883–1924)

4.1 Was sind Funktionen?

In § 1.3 auf Seite 6 haben wir Abbildungen kennengelernt, die Elemente aus der Definitionsmenge eindeutig einem Element aus der Wertemenge zuordnen.

Eine **reelle Funktion** ist ein besonders wichtiger Spezialfälle einer Abbildung, in denen sowohl die Definitionsmenge als auch die Wertemenge Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. reelle Funktion

Bei reellen Funktionen wird meist weder Definitionsmenge noch Wertemenge angegeben. In diesem Fall gilt:

- Die *Definitionsmenge* ist die größtmögliche *sinnvolle*[1] Teilmenge von $\mathbb{R}$, in der die Zuordnungsvorschrift definiert ist.
- Die *Wertemenge* ist die **Bildmenge** Bildmenge

$$f(D) = \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\} .$$

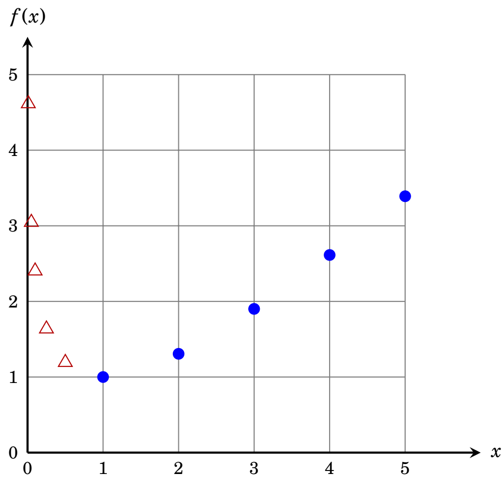
Beispiel 4.1
$f(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Abkürzung für $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$. 0 kann im Definitionsbereich nicht enthalten sein, da $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist.

Beispiel 4.2
Die Produktionsfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist eine Abkürzung für

$$f: [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

Es gibt keine „negativen“ Produktionsmengen. Außerdem ist $\sqrt{x}$ für $x < 0$ nicht reell.

[1]Wenn wir z.B. eine Kostenfunktion betrachten, so ist ein negatives Argument sinnlos. Es werden immer nur Güter und nicht negative Güter betrachtet.



Wertetabelle:

x	$f(x)$
0	ERROR
1	1
2	1,307
3	1,901
4	2,614
5	3,391
0,5	1,193
0,25	1,636
0,1	2,403
0,05	3,046
0,01	4,615

Abbildung 4.1: Naïve Konstruktion des Graphen der Funktion $f(x) = x - \ln(x)$ im Intervall $(0, 5)$

4.2 Wie zeichne ich einen Funktionsgraphen?

Jedem Paar $(x, f(x))$ entspricht ein Punkt in der Zahlenebene (xy-Ebene). Die Menge aller dieser Punkte bildet eine Kurve in dieser Ebene und heißt **Graph** der Funktion. Viele Eigenschaften von Funktionen lassen sich unmittelbar aus deren Graphen herauslesen. Graph

Es ist natürlich unmöglich, zu jedem der unendlich vielen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ des Zahlenpaar $(x, f(x))$ in die xy-Ebene zu zeichnen.
Die Abbildungen 4.1 und 4.2 demonstrieren eine einfache Vorgangsweise zum Zeichnen eines Funktionsgraphen am Beispiel der Funktion

$$f(x) = x - \ln(x)\,.$$

1. Wir überlegen uns zuerst wie der Graph wahrscheinlich aussehen wird. Graphen von einfachen elementaren Funktionen (☞ Abb. 4.7 und 4.8 auf Seite 53) sollten bereits aus dem Gedächtnis skizziert werden können.

   In unserem Beispiel wird die Funktion in der Nähe von 0 (wegen $-\ln(x)$) und für sehr große Werte von x (wegen x) sehr große Funktionswerte annehmen. Dazwischen muss ein Bereich mit kleineren Funktionswerten liegen.)

2. Wir wählen einen geeigneten Bereich auf der x-Achse aus, in dem wir den Graphen zeichnen wollen. Dieser Bereich sollte so gewählt werden, dass er einen charakteristischen Ausschnitt zeigt. Achten Sie dabei auf die Definitionsmenge der Funktion.

   In unserem Beispiel wählen wir das Intervall $(0, 5)$.

3. Wir erstellen eine Wertetabelle, d.h. wir berechnen für einige ausgewählte x-Werte die y-Werte und zeichnen die entsprechenden Zahlenpaare in der xy-Ebene ein.

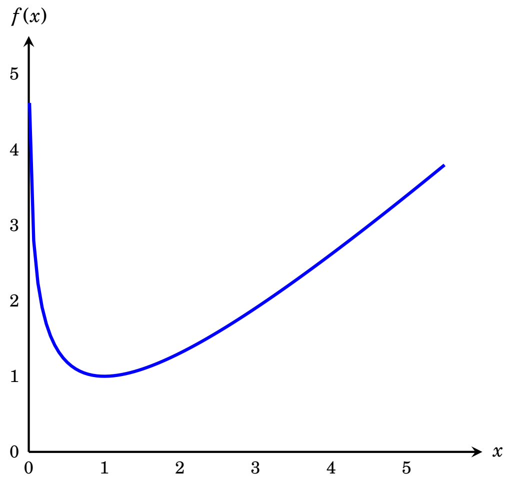


Abbildung 4.2: Graph der Funktion $f(x) = x - \ln(x)$ im Intervall $(0,5)$

In unserem Beispiel verwenden wir die Werte $0,1,\ldots,5$. Die entsprechenden Punkte sind mit dem Symbol • in Abbildung 4.1 eingezeichnet.

4. Wir überprüfen, ob aus den gezeichneten Punkten der Verlauf der Kurve ersichtlich ist. Sollte das nicht der Fall sein, verlängern wir die Wertetabelle um einige geeignete Werte und überprüfen noch einmal.

   In Abbildung 4.1 sind diese zusätzlichen Punkte mit dem Symbol △ gekennzeichnet.

5. Die eingezeichneten Punkte werden in geeigneter Weise miteinander verbunden[2] (☞ Abbildung 4.2).

Bemerkung 4.1
Computerprogramme zum Zeichnen von Funktionesgraphen liefern meistens Bilder wie jenes in Abbildung 4.3.

Obwohl dieses naïve Verfahren von vielen Programmen zum Zeichnen von Funktionsgraphen angewandt wird, ist es meist auch hilfreich oder sogar *notwendig*, charakteristische Punkte — wie etwa lokale Extrema (☞ §5.4, Seite 76) oder Wendepunkte — zu berechnen („*Kurvendiskussion*") und als Stützpunkte zum Zeichnen des Graphen zu verwenden. Zusätzlich kann es nützlich sein, Tagenten an diese Punkte einzuzeichnen.

Der häufigste Fehler beim Zeichnen eines Graphen ist eine zu kleine Wertetabelle. Punkt (4) in der obigen Vorgangsweise wird einfach ignoriert. Stattdessen werden verschiedene Spekulationen angestellt. Etwa die, dass $f(x) = x - \ln(x)$ an der Stelle 0 den Funktionswert 0 besitzen müsste, wenn der Taschenrechner als Ergebnis `ERROR` anzeigt. Oder jene, wonach der Graph in Abbildung 4.2 bei nur im Bereich $[1,5]$ definiert sei.

Ein anderes Beispiel eines falsch gezeichneten Funktionsgraphen ist die Funktion $f(x) = x^3$. Abbildung 4.4 (links) zeigt den Graphen dieser Funktion. Die Tangente im Ursprung (im Punkt 0) ist horizontal, deren Anstieg also 0. Oft wird diese

[2]Wir haben hier allerdings vorausgesetzt, dass die Funktion stetig (☞ 4.8, Seite 59) ist.

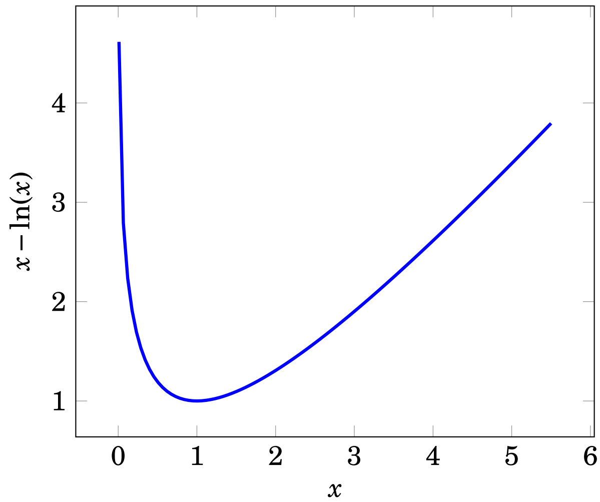


Abbildung 4.3: Graph der Funktion $f(x) = x - \ln(x)$ im Intervall $(0,5)$

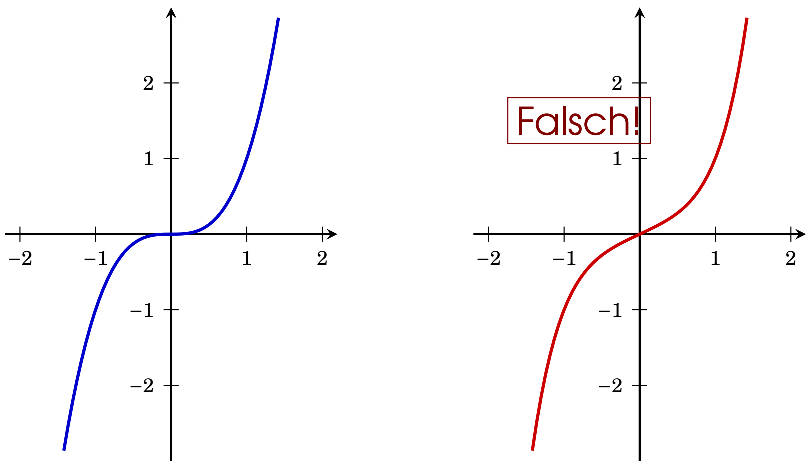


Abbildung 4.4: Richtige (links) und falsche (rechts) Zeichnung des Graph der Funktion $f(x) = x^3$. Man beachte den Anstieg der Tangente im Ursprung.

Eigenschaft nicht bedacht und erhält durch einfaches Verbinden der (zu wenigen) Punkte aus der Wertetabelle die Zeichnung in Abbildung 4.4 (rechts).

Wenn Sie nicht sicher sind, wie nun der Funktionsgraph aussieht, so berechnen Sie bitte noch einige (geeignete) Funktionswerte.

In den meisten Fällen reicht eine **Skizze** des Funktionsgraphen völlig aus, um sich die Eigenschaften der untersuchten Funktion zu veranschaulichen. Bei einer Skizze kommt es auf die Genauigkeit der Funktionswerte nicht an, die Skalen an den beiden Achsen werden meist nicht gezeichnet. Allerdings ist es wichtig, dass die Skizze alle wesentlichen Eigenschaften und Punkte (wie etwa Extrema) der Funktion widerspiegelt. Die Zeichnung in Abbildung 4.4 (rechts) kann daher auch keine Skizze der Funktion $f(x) = x^3$, da sie den Anstieg der Tangente im Ursprung (das ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Funktion) nicht richtig widergibt. Skizze

Bemerkung 4.2
Zum Zeichnen des Graphen einer linearen Funktion (☞ Abbildung 4.7 (a), Seite 53) genügt eine Wertetabelle mit *nur zwei* Funktionswerten. Es ist ratsam selbst bei einer einfachen Skizze einer linearen Funktion ein *Lineal* zur Hand zu nehmen, da man ansonst Gefahr läuft, den Graph aus dem Handgelenk heraus (und damit krummlinig) zu zeichnen.

Es sei nochmals auf die Wichtigkeit hingewiesen, sich zuerst Gedanken über das mögliche Aussehen des Graphen zu machen (Punkt 1). Optimal wäre es sich zuerst eine (ungefähre) Skizze anzufertigen. Das gilt natürlich genauso, wenn ein Computerprogramm verwendet wird. Im Extremfall kann nämlich ein auf obiger Weise (eventuell mit Computerhilfe) erzeugter Graph wenig mit dem tatsächlichen Graphen gemeinsam haben. Z.B. schwankt die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ im Intervall $(0,1]$ unendlich oft zwischen -1 und 1. Wird der Graph jedoch mit einem Computerprogramm gezeichnet, so erhält man eine Kurve mit völlig unregelmäßigen Zacken, die fast nie -1 oder 1 erreichen.

Es sei außerdem nocheinmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Sie in der Lage sein sollten, die Graphen der Funktionen in den Abbildungen 4.7 und 4.8 auf den Seiten 53 und 54 ohne Anlegen einer Wertetabelle zu zeichnen (skizzieren).

Wenn der Graph einer Funktion $f(x)$ bekannt ist, so lässt der Graph einer Funktion der Form

$$g(x) = a + b \cdot f\big(c \cdot (x+d)\big)$$

herleiten:

1. Zeichne (Skizziere) den Funktionsgraphen von $f(x)$.
2. Zeichne auf beiden Achsen die Markierungen für die Einheitslänge ein, i.e., die Markierungen für $x = 1$ und $y = 1$.
3. Ersetze die Markierung 1 an der x-Achse durch $\left|\frac{1}{c}\right|$. Dadurch ändert sich natürlich die Einheitslänge der x-Achse. Falls $c < 0$ ist, dann spiegle den Graphen an der y-Achse.
4. Verschiebe die y-Achse um d Einheiten nach links falls $d > 0$ und um $|d|$ Einheiten nach rechts falls $d < 0$.
   Beachte dabei, dass sich die Einheitslänge in Schritt 3 geändert hat.
5. Ersetze die Markierung 1 an der y-Achse durch $|b|$. Dadurch ändert sich natürlich die Einheitslänge der y-Achse. Falls $b < 0$ ist, dann spiegle den Graphen an der x-Achse.
6. Verschiebe die x-Achse um a Einheiten nach unten falls $a > 0$ und um $|a|$ Einheiten nach oben falls $a < 0$.
   Beachte dabei, dass sich die Einheitslänge in Schritt 5 geändert hat.

Beispiel 4.3
Abbildung 4.5 zeigt die Konstruktion des Graphen von

$$g(x) = 1 - 2\left[3\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\right]^2$$

ausgehend vom Graphen für $f(x) = x^2$.

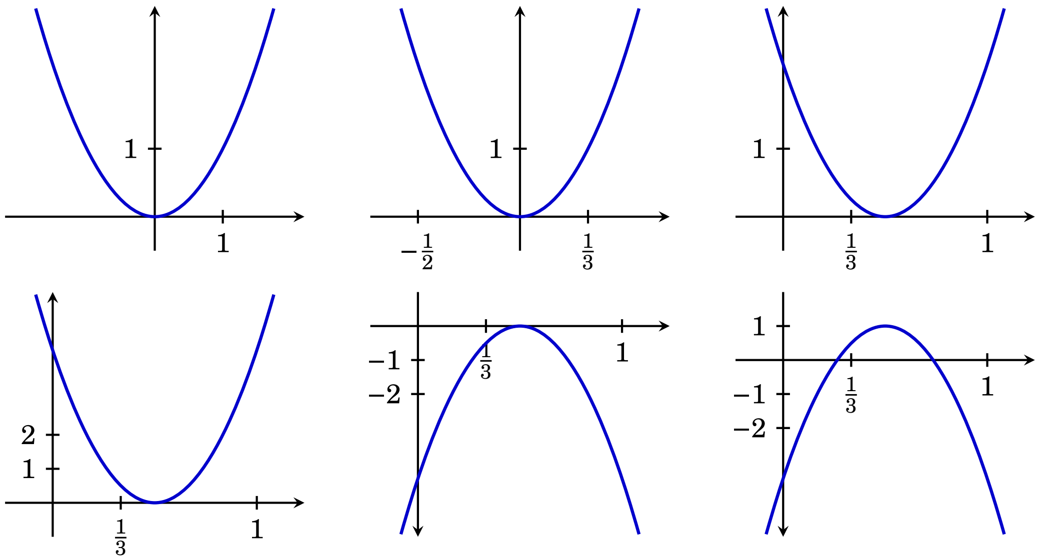


Abbildung 4.5: Konstruktion des Graphen von $g(x) = 1 - 2\left[3\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2$ (rechts unten) ausgehend vom Graphen für $f(x) = x^2$ (links oben); $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -\frac{1}{2}$.

4.3 Stückweise definierte Funktionen

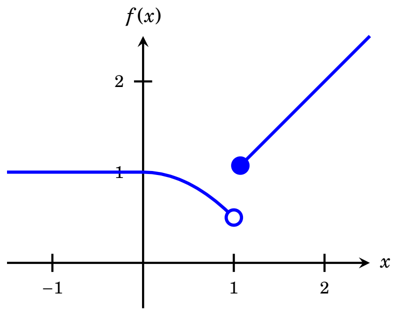
Die Zuordnungsvorschrift einer Funktion muss nicht immer so einfach sein wie etwa in der Funktion $f(x) = 2(x - \ln x - 1)$. Es ist durchaus möglich, dass diese Zuordnungsvorschrift in verschiedenen Intervallen des Definitionsbereichs verschieden definiert ist. Beim Zeichnen des Graphen so einer Funktion gehen Sie in jedem einzelnen der Intervalle genauso wie oben beschrieben vor. Sie müssen dann allerdings an den Intervallgrenzen kennzeichnen, welche Punkte Bestandteil des Graphen sind und welche nicht. Dies geschieht üblicherweise durch $\bullet$ (Bestandteil) und $\circ$ (nicht Bestandteil).

Beispiel 4.4
Der Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ x, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

zerfällt in die Intervalle $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$ und $[1, \infty)$. Im ersten Intervall wird der Graph der Funktion $x \mapsto 1$, im zweiten von $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ und im dritten von $x \mapsto x$ gezeichnet. Danach muss noch geklärt werden, dass der Punkt $(1, 1)$ Bestandteil des Graphen ist, der Punkt $(1, \frac{1}{2})$ hingegen nicht (☞ Abbildung 4.6).

Bemerkung 4.3
In Ländern mit einem progressiven Steuersystem, wie z.B. in Österreich oder Deutschland, wird die zu bezahlende Einkommensteuer durch eine stückweise definierte Funktion berechnet.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ x, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

Abbildung 4.6: Graph einer stückweise definierten Funktion.

4.4 Elementare Funktionen

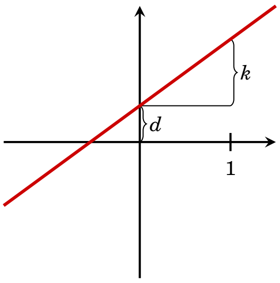
Unter *elementaren Funktionen* versteht man meist häufig auftretende Funktion die sich aus den in § 2.2 auf Seite 11ff Termen durch die vier Grundrechenarten oder Funktionenverkettungen zusammensetzen lassen. Tabelle 4.1 zeigt wichtige elementare Funktionen. In den Abbildungen 4.7 und 4.8 sind die Graphen einiger dieser Funktionen dargestellt.

4.5 Ist *f* injektiv und surjektiv?

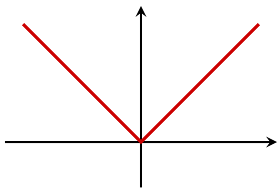
In § 1.3 (Definition 1.3 auf Seite 6) haben wir das Konzept von *injektiven*, *surjektiven* und *bijektiven* Abbildungen kennengelernt. Um festzustellen, ob eine gegebene Funktion eine dieser Eigenschaften hat, müssen wir feststellen, wie viele Urbilder jedes $y \in W_f$ besitzt. Dazu eignet sich der *„Horizontalen-Test“*.

1. Wir zeichnen den Graphen der zu untersuchenden Funktion (☞ §4.2).
2. Wir zeichnen ein $y \in W_f$ auf der y-Achse ein und legen eine Gerade parallel zur x-Achse (Horizontale) durch diesen y-Wert.
3. Die Anzahl der Schnittpunkte von Horizontale und Graph ist die Anzahl der Urbilder von y.
4. Wir wiederholen (2) und (3) für eine *repräsentative* Auswahl von y-Werten.
5. Interpretation: Schneidet jede Horizontale den Graphen in
   (a) *höchstens* einem Punkt, so ist f *injektiv*;
   (b) *mindestens* einem Punkt, so ist f *surjektiv*;
   (c) *genau* einem Punkt, so ist f *bijektiv*.

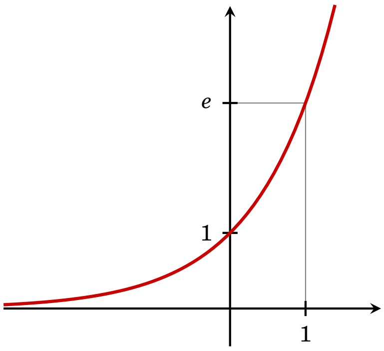
Beispiel 4.5
Ist die Funktion $f: [-1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ injektiv und surjektiv?
Abbildung 4.9 (links) zeigt den Graphen der Funktion. (Er ist nur im Intervall $[-1,2]$ definiert!) Die Horizontale durch 5 ($\in W = \mathbb{R}$) schneidet den Graphen in keinem Punkt, f ist daher nicht surjektiv. Die Horizontale durch $\frac{1}{2}$ schneidet den Graphen in zwei Punkten, f ist daher auch nicht injektiv.



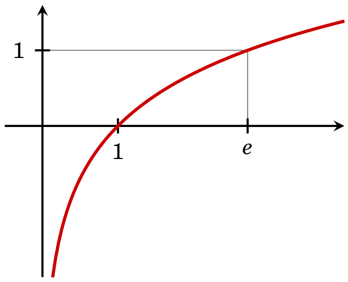
(a) $f(x) = kx + d$



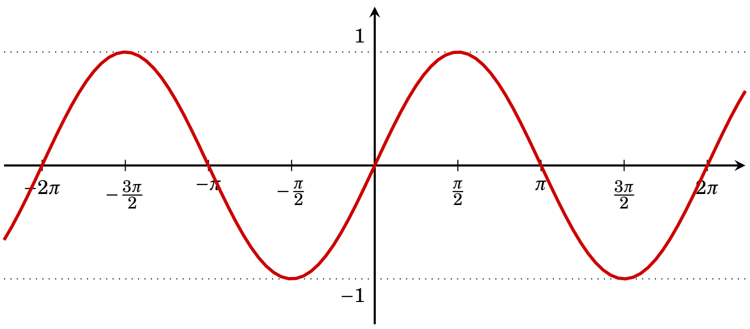
(b) $f(x) = |x|$



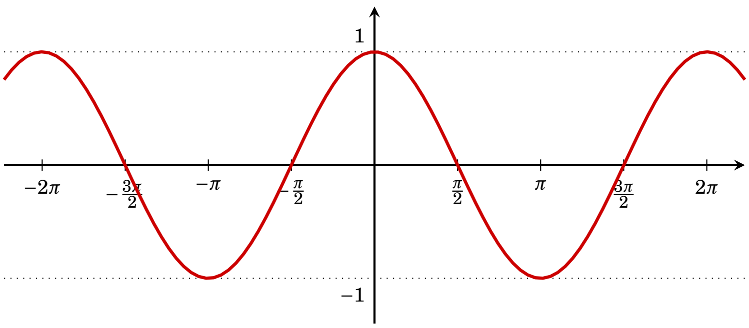
(c) $f(x) = \exp(x)$



(d) $f(x) = \ln(x)$

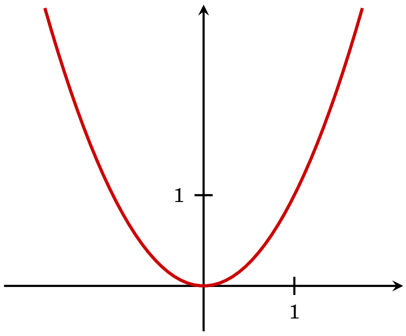


(e) $f(x) = \sin(x)$

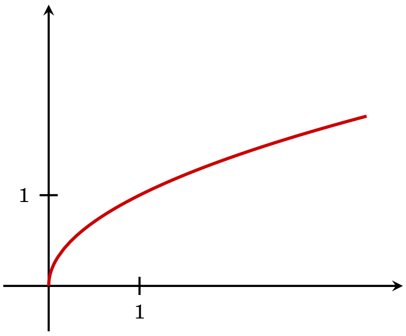


(f) $f(x) = \cos(x)$

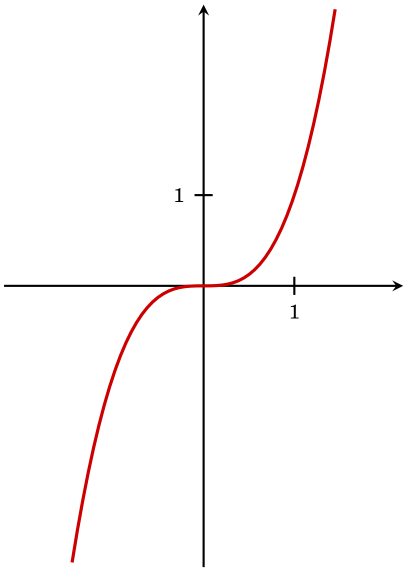
Abbildung 4.7: Elementare Funktionen (Teil 1)



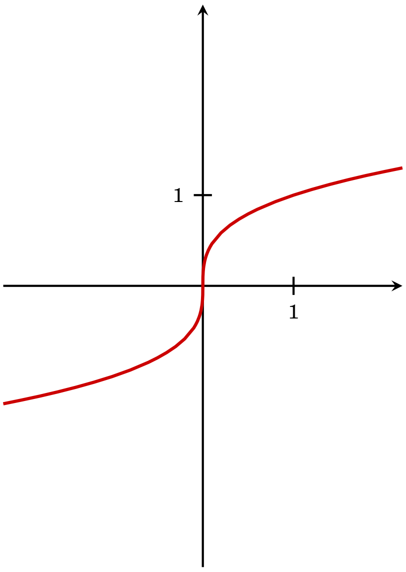
(g) $f(x) = x^2$



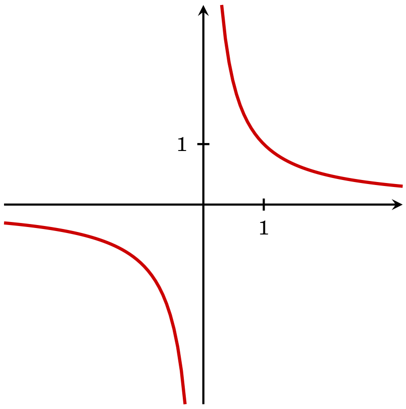
(h) $f(x) = \sqrt{x}$



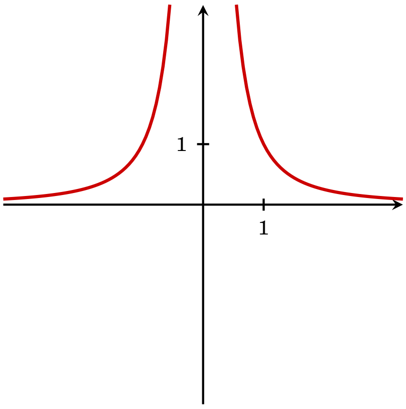
(i) $f(x) = x^3$



(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



(k) $f(x) = \frac{1}{x}$



(l) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Abbildung 4.8: Elementare Funktionen (Teil 2)

Tabelle 4.1: Wichtige elementare Funktionen

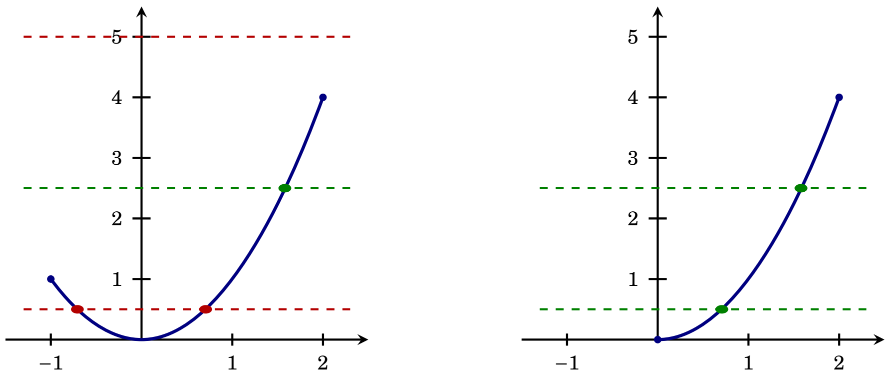
Lineare Funktionen	$x \mapsto kx + d$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
	k heißt *Steigung* oder *Anstieg* d heißt *Achsenabschnitt*	
Potenzfunktionen	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$D \to W$
	$D = W = \mathbb{R}$ falls $n > 0$ $D = W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls $n < 0$	
Wurzelfunktionen	$x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}$	$D \to W$
	$D = W = \mathbb{R}_0^+$ falls n gerade $D = W = \mathbb{R}$ falls n ungerade	
Polynome	$x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Rationale Funktionen	$x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$	$D \to \mathbb{R}$
	$p(x)$, $q(x)$ Polynome $D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$	
Exponentialfunktion	$x \mapsto \exp(x) = e^x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
allgemein	$x \mapsto a^x \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
Logarithmusfunktion	$x \mapsto \log(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
	Inverse Funktion zur *Exponentialfunktion*	
allgemein	$x \mapsto \log_a(x) \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
Winkelfunktionen	$x \mapsto \sin(x)$ $x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$ $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

Man beachte, dass Definitions- und Wertemenge Bestandteil einer Funktion sind. Die Funktion $g\colon [0,2] \to [0,4]$, $x \mapsto x^2$ (Abb. 4.9, rechts) ist surjektiv, da Geraden außerhalb der Bildmenge nicht mehr zulässig sind. Die Funktion ist auch injektiv, da jede Horizontale den Graphen in höchstens einem Punkt schneiden kann. Die entsprechenden Punkte liegen ja nun außerhalb der Definitionsmenge. Die Funktion g ist daher bijektiv.

4.6 Die inverse Funktion

Wir haben in § 1.3 (Definition 1.5 auf Seite 8) gesehen, dass eine Abbildung f genau dann eine *Umkehrabbildung* (oder *inverse Funktion*) besitzt, wenn f bijektiv ist.

Wir erhalten die Zuordnungsvorschrift der inversen Funktion einer reellen Funk-



(a) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (b) $g : [0,2] \to [0,4], x \mapsto x^2$

Abbildung 4.9: Horizontalentest

tion f durch Vertauschen der Rollen von Argument (x) und Bild (y). Mit anderen Worten, wir drücken x als Funktion von y aus.

Beispiel 4.6

Wir suchen die Umkehrfunktion von $y = f(x) = 2x - 1$.
Durch Umformung erhalten wir: $y = 2x-1 \Leftrightarrow y+1 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y+1) = x$. Die Umkehrfunktion lautet daher $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)$. Da es üblich ist, das Argument mit x zu bezeichnen, schreiben wir $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+1)$.

Beispiel 4.7

Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Dieses Vertauschen von x und y spiegelt sich auch im Graphen der Umkehrfunktion wieder. Ist nämlich (a,b) ein Punkt des Graphen von f (i.e. $f(a) = b$), dann ist (b,a) ein Punkt des Graphen von f^{-1}. Die beiden Graphen sind also spiegelsymmetrisch bezüglich der 1. Mediane (☞ Abbildung 4.10).

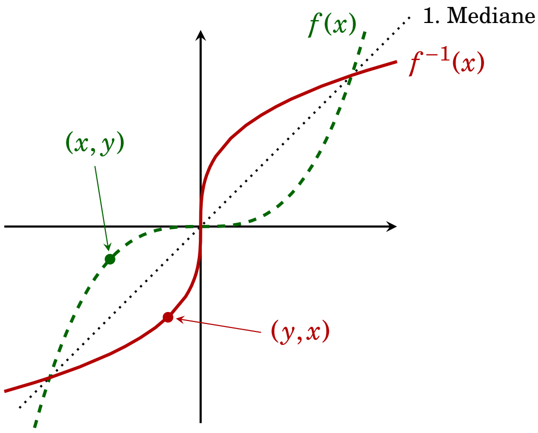


Abbildung 4.10: Graph der Funktion $f(x) = x^3$ und ihrer Inversen

Die Inverse einer Funktion muss nicht immer existieren.

Beispiel 4.8

Besitzt die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ eine Inverse?

Nein! Die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion müsste nämlich $x \mapsto \pm\sqrt{x}$ lauten. Aber diese Vorschrift ist weder eindeutig (das Bild von 4 ist sowohl 2 als auch -2) noch ist es für alle Argumente (z.B. $x = -1$) definiert. (Es reicht natürlich darauf hinzuweisen, dass $f(x) = x^2$ nicht bijektiv ist.)

Bemerkung 4.4

Beachten Sie bitte, dass Definitions- und Wertemenge Teil einer Funktion sind. So ist z.B. die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ bijektiv und besitzt sehr wohl eine Umkehrfunktion, nämlich $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x}$. Beachten Sie bitte den Unterschied zu Beispiel 4.8. Vgl. dazu auch Beispiel 4.5.

4.7 Limiten

Was passiert mit dem Funktionswert einer Funktion f, wenn das Argument x gegen einen bestimmten Wert x_0 strebt?

Wir nehmen eine Folge $\langle x_n \rangle \to x_0$ von Argumenten, die gegen x_0 konvergiert, und betrachten die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$. Diese Folge kann nun gegen einen Grenzwert a konvergieren, oder auch nicht (☞ §3.2, Seite 35).

Definition 4.1 (Limes)

Wenn für jede Folge von Argumenten $\langle x_n \rangle \to x_0$ die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ gegen eine Zahl a konvergiert, so heißt a der ***Grenzwert*** *(oder* ***Limes****) der Funktion f* ***an der Stelle*** *x_0. Wir schreiben dafür*

Grenzwert

Limes

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \textit{oder} \quad f(x) \to a \textit{ für } x \to x_0}$$

Bemerkung 4.5

x_0 muss nicht in der Definitionsmenge liegen und kann daher auch ∞ sein. Genauso muss a nicht in der Wertemenge der Funktion liegen.

Natürlich können wir nicht *jede* Folge von Argumenten untersuchen. Für „einfache" Funktionen oder Funktionen mit stückweise unterschiedlichen Zuordnungsvorschriften (wie etwa die Funktion in Beispiel 4.4 auf Seite 51), empfiehlt sich folgende Vorgangsweise (☞ Abb. 4.11):

(1) Wir zeichnen den Graphen der Funktion (☞ §4.2, Seite 47ff).

(2) Wir zeichnen den Wert x_0 auf der x-Achse ein.

(3) Wir setzen den Bleistift auf dem Graphen und führen ihn auf dem Graphen von *rechts* bis zum x_0-Wert.

(4) Wir lesen den y-Wert dieses Punktes von y-Achse ab. Dieser Wert heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.

rechtsseitiger Grenzwert

(5) Analog erhalten wir von der *linken* Seite den **linksseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$.

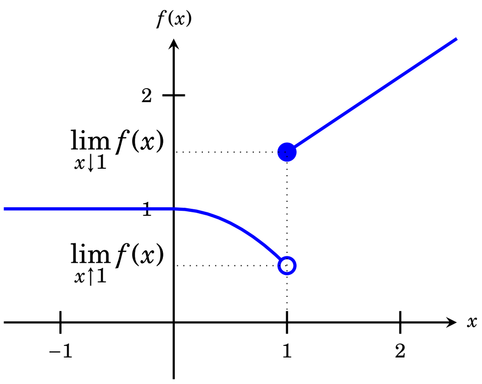
linksseitiger Grenzwert

Tabelle 4.2: Rechenregeln für Limiten

Seien $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$.

	Regel	Gültigkeit
(1)	$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)+d) = c\cdot a + d$	für $c,d \in \mathbb{R}$
(2)	$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = a+b$	
(3)	$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b$	
(4)	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$	für $b \neq 0$
(5)	$\lim_{x\to x_0}(f(x))^k = a^k$	für $k \in \mathbb{N}$

(6) Wenn beide Limiten *gleich* sind, so existiert der Grenzwert und es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x)$.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

Abbildung 4.11: Der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ existiert nicht, da $0{,}5 = \lim_{x\uparrow 1} f(x) \neq \lim_{x\downarrow 1} f(x) = 1{,}5$.

Beispiel 4.9

Der Grenzwert der Funktion f in Abb. 4.11 in $x_0 = 1$ existiert nicht, da

$$0{,}5 = \lim_{x\uparrow 1} f(x) \neq \lim_{x\downarrow 1} f(x) = 1{,}5$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ existiert hingegen, da

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

Für Limiten von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzewerte von Folgen (☞ Tabelle 4.2; vgl. Tabelle 3.3, Seite 37).

Bemerkung 4.6
Falls eine Funktion an der Stelle x_0 stetig ist (☞ §4.8), so ist der Grenzwert gerade der Funktionswert an der Stelle x_0.

4.8 Stetigkeit

Beim Zeichen von Graphen fällt auf, dass es Funktionen gibt, die sich *ohne Absetzen des Bleistifts* zeichnen lassen (etwa in Abbildungen 4.2 auf Seite 48). Andere Funktionen besitzen *Sprungstellen* und man muss beim Zeichnen den Bleistift vom Papier heben (etwa an der Stelle $x = 1$ in der Abbildung 4.11 auf Seite 58).
Solche *Sprungstellen* heißen **Unstetigkeitsstellen** der Funktion. An allen anderen Punkten ist die Funktion **stetig**. Formal lässt sich das so ausdrücken: Unstetigkeitsstelle

Definition 4.2 (Stetigkeit)
*Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$. Die Funktion heißt **stetig**, falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.* stetig

Die elementaren Funktionen in Tabelle 4.1 auf Seite 55 sind stetig.

Funktionen mit stückweise unterschiedlichen Zuordnungsvorschriften (wie etwa die Funktion aus Beispiel 4.4 auf Seite 51) haben meist nur wenige Unstetigkeitsstellen, die sich durch die folgende Vorgangsweise finden lassen:

1. Wir zeichnen den Graphen der Funktion (☞ §4.2, Seite 47ff).
2. In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir beim Zeichnen *nicht* den Bleistift absetzen müssen, ist die Funktion stetig.
3. In allen Punkten des *Definitionsbereichs* in denen wir absetzen müssen ist, die Funktion *nicht* stetig.

Beispiel 4.10
Die Funktion in Abbildung 4.11 auf Seite 58 ist überall stetig, außer im Punkt $x = 1$.

Bemerkung 4.7
Die Funktion $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. Die *Sprungstelle* bei 0 gehört *nicht* zum Definitionsbereich (☞ Abb. 4.8 (k), Seite 54).

— Übungen

63. Sind die Abbildungen

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n!$ und (b) $f : \{x \in \mathbb{N} | x > 3\} \to \mathbb{N}, n \mapsto \dfrac{n!}{(n-3)!}$

injektiv, surjektiv, bijektiv?

64. Es sei $f(x) = x^2 + 2x - 1$ und $g(x) = 1 + |x|^{\frac{3}{2}}$. Berechnen Sie

(a) $(f \circ g)(4)$ (b) $(f \circ g)(-9)$ (c) $(g \circ f)(0)$ (d) $(g \circ f)(-1)$

65. Bilden Sie Summe, Differenz, Produkt und Quotient[3], sowie $f \circ g$ der Funktionsterme f und g. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der Funktionen f und g.

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$

(b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$

(d) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

(e) $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

66. Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$. Bestimmen Sie Definitionsbereich und Wertebereich von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 + x$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = x^2$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$

(d) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $g(x) = (x-2)^2$

(e) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x - 3$

(f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \exp(x^2)$

(h) $f(x) = \ln(x-1)$, $g(x) = x^3 + 1$

67. Wie lautet $h(12)$, wenn $h(x) = (f \circ g)(x)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 12}$ und $g(x) = \sqrt{\ln(x)}$?

68. Stellen Sie für die nachfolgenden Terme den maximalen Definitionsbereich als Vereinigung von Intervallen dar.

(a) $(x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(x^2-4)^2}$

(c) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

(d) $|x^2 - 1|^{-1}$

(e) $\dfrac{|x-1|^{-\frac{1}{2}}}{x^3}$

(f) $\dfrac{|x|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

(g) $x^3 |x-2|^{-\frac{1}{3}}$

(h) $|x^3 - 1|^{\frac{1}{3}}$

(i) $(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}$

69. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$ (b) $f(x) = -2x + 4$ (c) $f(x) = ax + 3$ mit $f(4) = 11$.

70. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (wenn möglich ohne Taschenrechner).
Überlegen Sie sich sinnvolle Definitionsbereiche und kennzeichnen Sie wichtige Punkte in der Skizze:

(a) $x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, x^3$.

(b) x^{2k} und x^{2k+1} für $k \in \mathbb{Z}$. (Welche Fälle können auftreten?)

(c) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$.

(d) x^{α}. (Welche Fälle können auftreten?)

[3] gemeint sind $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ bzw. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(e) x^2, $(3x-2)^2+1$;

(f) $\frac{1}{x^{-3}}, \frac{1}{x^{-2}}, \frac{1}{x^{-1}}, \frac{1}{x^0}, \frac{1}{x^1}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(g) $\exp(x)$, $\exp(2x)$, $\exp(x/3)$, $\exp(-x)$, $\exp(x-1)$, $\exp(1-x)$.

(h) $\ln(x)$, $\ln(2x-1)$, $\log_{10}(x)$, $\log_2(x)$, $\log_2(2x-1)$.

(i) $\sin(x)$, $\sin(\pi x)$, $\sin(2k\pi x)$, $\sin(x+\pi/2)$, $\cos(x)$.

71. Zeichnen Sie die Funktionsgraphen folgender Exponentialfunktionen:

(a) $f(x)=3^x$ (b) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$ (c) $f(x)=(\sqrt{2})^{-x}$ (d) $f(x)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
(e) $f(x)=1-e^{-2x}$ (f) $f(x)=e^{2(1-x)}$ (g) $f(x)=(e^{-x})^2$ (h) $f(x)=e^{(x+1)/2}$

72. Zeichnen Sie die Funktionsgraphen folgender Funktionen:

(a) $f(x)=\ln(x+1)$ (b) $f(x)=\ln(x)$ (c) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
(d) $f(x)=\log_{10}(x+1)$ (e) $f(x)=(\ln(x))^2$ (f) $f(x)=1-\ln|x+1|$

73. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)=e^{x^4-2x^2}$ im Intervall $[-2,2]$.

74. Zeichnen Sie die Funktion $f(x)=|\cos(x)|$ im Intervall $[0,\pi]$.

75. Gegeben ist ein Funktionsterm. Was ist der größtmögliche Definitionsbereich einer reellen Funktion mit diesem Funktionsterm? Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktionen mit den angegebenen Funktionstermen, versuchen Sie dabei zuerst den Graphen ohne Verwendung einer Wertetabelle zu skizzieren.

(a) $h(x)=\frac{x-1}{x-2}$ (b) $D(p)=\frac{2p+3}{p-1}$ (c) $f(x)=\sqrt{x-2}$
(d) $F(y)=-\sqrt{3y-2}$ (e) $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2t-3}}$ (f) $G(u)=\frac{2}{\sqrt{3-2u}}$
(g) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (h) $f(x)=2-\sqrt{9-x^2}$ (i) $g(x)=-\sqrt{3-x}$
(j) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ (k) $f(x)=\frac{1}{x}$ (l) $f(x)=\frac{-3}{x-2}$
(m) $f(x)=x^3$ (n) $f(x)=1-x^3$ (o) $f(x)=2-|x|$
(p) $g(x)=|x|+3$ (q) $f(x)=|x+3|$ (r) $F(x)=-|x-2|$
(s) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ (t) $G(x)=\frac{2-x}{|x-2|}$

76. Skizzieren Sie die Graph folgender Funktionen möglichst ohne Verwendung einer Wertetabelle:

(a) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $f(x)=\frac{2}{(x+1)^3+1}$ (c) $f(x)=x(1-x)$
(d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ (e) $f(x)=|x(1-x)|$ (f) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$
(g) $f(x)=x^7$ (h) $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ (i) $f(x)=\sqrt{(|x|-1)^2}$

77. Ordnen Sie die Funktionsterme den Funktionsgraphen in Abbildung 4.12 auf Seite 63 zu:

(a) $f(x) = x^2$
(b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
(c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
(d) $f(x) = \sqrt{x}$
(e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
(f) $f(x) = \sqrt{|2x - x^2|}$
(g) $f(x) = -x^2 - 2x$
(h) $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)\operatorname{sgn}(1-x) + 1$
(i) $f(x) = e^x$
(j) $f(x) = e^{x/2}$
(k) $f(x) = e^{2x}$
(l) $f(x) = 2^x$
(m) $f(x) = \ln(x)$
(n) $f(x) = \log_{10}(x)$
(o) $f(x) = \log_2(x)$
(p) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
(q) $f(x) = 1 - |x|$
(r) $f(x) = \prod_{k=-1}^{2}(x+k)$

78. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie, ob Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität vorliegt.

(a) $f: [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$
(b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$
(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
(d) $f: [2,6] \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-4)^2 - 1$
(e) $f: [2,6] \to [-1,3], x \mapsto (x-4)^2 - 1$
(f) $f: [4,8] \to [-1,15], x \mapsto (x-4)^2 - 1$

79. Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -x + 1$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^3$. Berechnen und zeichnen Sie die zusammengesetzte Funktionen $g \circ f$ und $f \circ g$ deren Umkehrfunktionen $(g \circ f)^{-1}$ bzw. $(f \circ g)^{-1}$.

80. Wählen Sie den Definitionbereich für die folgenden Funktionsterme so, dass die entstehenden Funktionen eine Inverse besitzen (als Wertemenge wird die Bildmenge angenommen).

(a) $f(x) = (x+1)^2 - 2x$
(b) $f(x) = (3 - 2|x|)^2$
(c) $f(x) = |x^2 - 1|$
(d) $f(x) = \ln|x - 1|$
(e) $f(x) = |x - 2|$
(f) $f(x) = \sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 1}$
(g) $f(x) = x^5 + x^3$
(h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

81. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Funktionen, zeichnen Sie den Funktionsgraphen und den der Inversen.

(a) $y = -3x - 4$
(b) $y = x - 1$
(c) $p = 4 - \frac{2}{5}x$
(d) $q = 3p + 6$
(e) $y = \sqrt{3x - 4}$
(f) $y = \sqrt{\frac{1}{4} + 2x}$
(g) $y = x^5$
(h) $y = \sqrt{x}$
(i) $y = \sqrt{4 - x}$

82. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ x + 1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ für $x_0 = -2$, 0 und 2.
Ist f in diesen Punkten stetig?

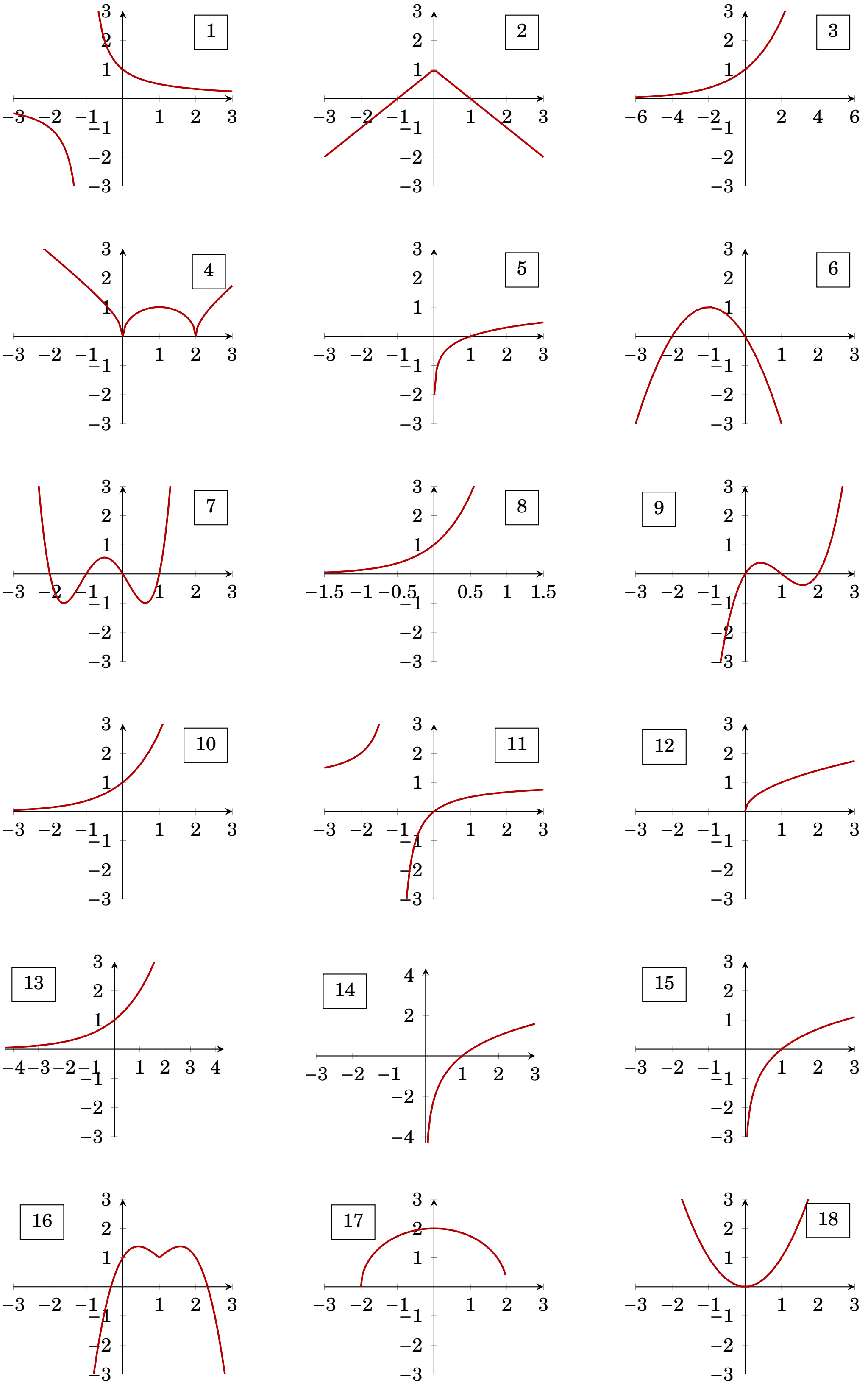


Abbildung 4.12: Funktionsgraphen zu Aufgabe 77.

83. Überlegen Sie sich den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert für

(a) $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$, für $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(b) $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x\uparrow 1} x$, $\lim_{x\downarrow 1} x$.

84. Bestimmen Sie

(a) $\lim_{x\downarrow 1} \frac{x^{3/2}-1}{x^3-1}$ (b) $\lim_{x\uparrow -2} \frac{\sqrt{|x^2-4|^2}}{x+2}$ (c) $\lim_{x\uparrow 0} \lfloor x \rfloor$

(d) $\lim_{x\downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ (e) $\lim_{x\downarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$ (f) $\lim_{x\uparrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{|x-2|}$

(g) $\lim_{x\downarrow -2} \frac{|x+2|^{3/2}}{2+x}$ (h) $\lim_{x\uparrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ (i) $\lim_{x\downarrow -7} \frac{2|x+7|}{x^2+4x-21}$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

85. Geben Sie folgende Grenzwerte an, soferne sie existieren.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}$ (b) $\lim_{x\to 0} x^2$ (c) $\lim_{x\to\infty} \ln(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} \ln|x|$ (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$

86. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^3 - x + 6}{3x^4 + x^2 + x - 3}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^2 + 5 - 3\pi}{5x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$

87. Sind die folgenden Funktionen stetig auf dem Definitionsbereich? Skizzieren Sie die Funktionen.

(a) $D = \mathbb{R}, f(x) = x$ (b) $D = \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$

(c) $D = \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - 1$ (d) $D = \mathbb{R}, f(x) = |x|$

(e) $D = \mathbb{R}^+, f(x) = \ln(x)$ (f) $D = \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(g) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ x+1 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

88. Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x^2 - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0. Ist f in diesem Punkt stetig bzw. differenzierbar?

89. Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle 1 stetig bzw. differenzierbar? Berechnen Sie den links- und rechtsseiten Grenzwert an den Stellen 1 und −1.

90. Welchen Wert muss h besitzen, damit die Funktion f stetig ist?

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{für } x \neq 1 \\ h & \text{für } x = 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} hx + 3 & \text{für } x \geq 1 \\ 3 - hx & \text{für } x < 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2hx & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - h & \text{für } x > 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + h & \text{für } x \neq 1 \\ 3 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

5

Differentialrechnung

Ein neuer Zweig der Mathematik, der bis zu der Kunst vorgedrungen ist, mit unendlich kleinen Größen zu rechnen, gibt jetzt auch in anderen komplizierten Fällen der Bewegung Antwort auf die Fragen, die bisher unlösbar schienen.
Krieg und Frieden
LEO N. TOLSTOI (1817–1875)

5.1 Was ist der Differentialquotient?

Ein Auto fährt von Wien nach Salzburg. Wir können diese Fahrt durch eine Funktion $x \mapsto f(x)$ beschreiben, die zu jedem Zeitpunkt x (Stunden) die Entfernung $f(x)$ (Kilometer) von Wien angibt.

Betrachten wir nun das Auto auf seiner Fahrt. Wenn das Auto zum Zeitpunkt x_0 in St. Pölten ist, so beträgt sein Abstand von Wien gerade $f(x_0)$ Kilometer. Ist es zum Zeitpunkt $x_1 = x_0 + \Delta x$ bereits in Linz, so beträgt seine Entfernung bereits $f(x_1)$ Kilometer. Die gefahrene Strecke zwischen diesen beiden Orten beträgt daher $f(x_1) - f(x_0)$ Kilometer, und dafür hat das Auto $x_1 - x_0$ Stunden gebraucht. Wir verwenden für diese beiden Differenzen die Symbole[1] Δf bzw. Δx. Die mittlere Geschwindigkeit des Autos zwischen St. Pölten und Linz ist nun $\frac{\text{gefahrene Strecke}}{\text{benötigte Zeit}}$, also

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Dieser Ausdruck wird als **Differenzenquotient** von f an Stelle x_0 bezeichnet.

Differenzen-quotient

Wenn wir die Geschwindigkeit des Autos in St. Pölten, d.h. zum Zeitpunkt x_0, schätzen wollen, so können wir die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten x_0 und $x_1 = x_0 + \Delta x$ bestimmen. Ist Δx sehr groß (etwa 1 Stunde), kann diese Schätzung sehr daneben liegen. Verkleinern wir Δx (etwa auf 1 Minute oder gar 1 Sekunde), so wird dieser Differenzenquotient mit der tatsächlichen Geschwindigkeit

[1] sprich: Delta f bzw. Delta x

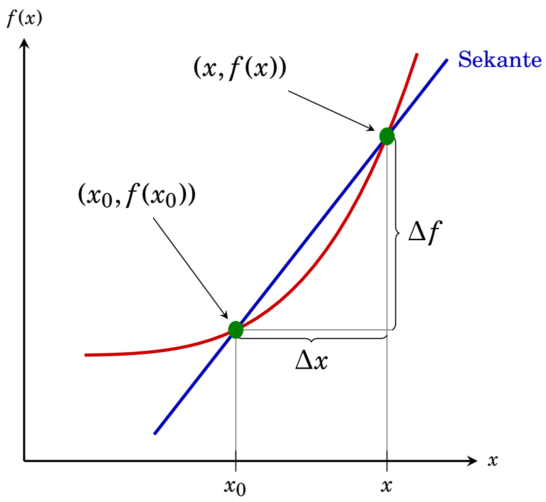


Abbildung 5.1: Graphische Bedeutung des Differenzenquotienten

besser übereinstimmen. Die Momentangeschwindigkeit erhalten wir, wenn wir $\Delta x \to 0$ streben lassen. Im Grenzübergang (Grenzwert, Limes) wird aus dem Differenzenquotient der Differentialquotient.

Definition 5.1 (Differentialquotient)

Falls der Limes

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$$

*existiert, so heißt die Funktion f **differenzierbar an der Stelle** x_0 und dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **(erste) Ableitung** an der Stelle x_0.* differenzierbar Differentialquotient Ableitung

*Die Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist.*

Andere Bezeichnungen:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

Bemerkung 5.1

In der Literatur findet man verschiedene Schreibweisen, um den Limes für den Differenzenquotienten darzustellen.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Sie sollten trotz unterschiedlicher Notation in der Lage sein, das Objekt (in diesem Fall den „Differentialquotienten“) wiederzuerkennen.

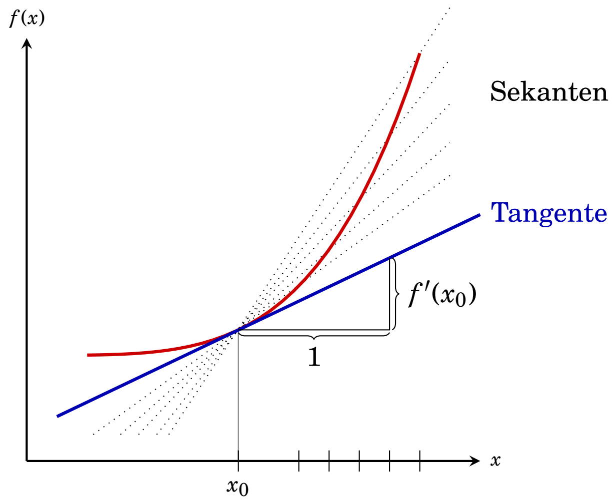


Abbildung 5.2: Graphische Bedeutung des Differentialquotienten

Eine graphische Interpretation

Abbildung 5.1 zeigt den Graphen einer Funktion und die Sekante durch die Funktionswerte von x_0 und $x_0 + \Delta x$. Die Steigung dieser Gerade ist $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, der *Differenzenquotient*. Wir können nun Δx verkleinern. Für jedes Δx erhalten wir eine andere Sekante (☞ Abb. 5.2, gepunktete Linien). Im Grenzübergang $\Delta x_0 \to 0$ wird die Sekante zur **Tangente**. Der *Differentialquotient* $\frac{df}{dx}$ ist somit die **Steigung der Tangente** (☞ Abb. 5.2). Tangente

Änderungsrate und Grenzfunktion

Zu Beginn haben wir den Differentialquotienten als **Änderungsrate** einer Kenngröße an einer Stelle x_0 motiviert. Wir wollen uns diese Interpretation des Differentialquotienten näher ansehen.

Wenn wir eine Funktion nur in der Nähe des Punktes x_0 betrachten, so erscheint ihr Graph annähernd wie eine Gerade (☞ Abbildung 5.3). Dieser Effekt wird umso stärker, je kleiner wir den Ausschnitt des Graphen wählen. Wir können daher in diesem Bereich die eigentliche Funktion durch eine *linearen Funktion* mit Anstieg $\frac{df}{dx}$ ersetzen, ohne dabei all zu große Fehler zu machen. Wir finden daher für kleines $\Delta x = x_1 - x_0$,

$$f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

d.h., Δf ist näherungsweise eine lineare Funktion von Δx.

Die Änderungsrate der Funktion können wir daher sehen als die Änderungsrate dieser linearen Funktion. In den Wirtschaftswissenschaften wird diese lineare Funktion (in Abhängigkeit von der Art der betrachteten Funktion als *Grenzerlös*, *Grenzkosten*, *Grenznutzen*, etc. bezeichnet. Die Mathematiker sagen dazu **Differential** von f an der Stelle x_0 und schreiben dafür $df(x_0)$. Differential

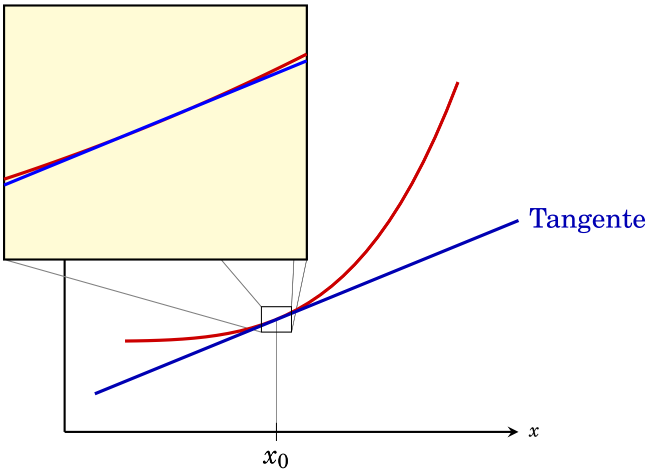


Abbildung 5.3: Interpretation des Differentialquotienten als „Grenzfunktion“

Wann existiert der Differentialquotient?

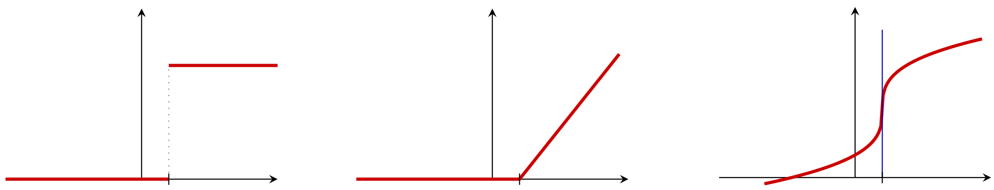
Wir haben den Differentialquotienten als Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion interpretiert. Es gibt nun Punkte, in denen es keine eindeutig bestimmte Tangente gibt. In all diesen Punkte existiert daher auch kein Differentialquotient und die Funktion ist an solchen Punkten **nicht differenzierbar**. Solche Punkte sind

(1) *Unstetigkeitsstellen* („Sprungstellen“), und

(2) *„Knicke“* im Graph der Funktion, sowie

(3) senkrechte Tangenten.

In allen anderen Punkten, in denen die Tangente existiert, ist die Funktion differenzierbar.



(1) Sprungstelle (2) „Knick“ (3) senkrechte Tangente

Abbildung 5.4: Punkte, in denen eine Funktion nicht differenzierbar ist

Rechnerisch können wir uns von der Existenz oder Nichtexistenz des Differentialquotienten durch Berechnung des Grenzwertes in Definition 5.1 überzeugen.

Beispiel 5.1
Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

ist differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. In 0 besitzt der Graph einen „Knick", in 1 ist die Funktion nicht stetig (☞ Abb. 5.5).

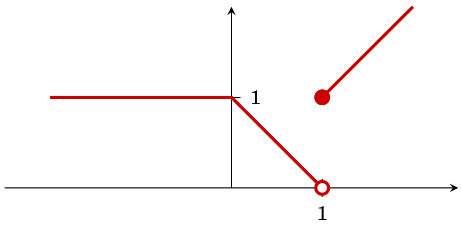


Abbildung 5.5: Die Funktion ist in 0 und 1 nicht differenzierbar.

Wir können uns auch rechnerisch davon überzeugen, dass der Differentialquotient an der Stelle $x = 0$ nicht existiert. Der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten and dieser Stelle sind verschieden:

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{(1-h)-1}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Genauso existiert der Differentialquotient an der Stelle $x = 1$ nicht:

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-h-1}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \left(-1 - \frac{1}{h}\right) = \infty$$

Die Berechnung des Differentialquotienten

Die Berechnung erfolgt durch Einsetzen in die Definition (☞ Definition 5.1) des Differentialquotienten und Berechnen des entsprechenden Grenzwertes.

Beispiel 5.2
Gesucht ist der Differentialquotient der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 5$.

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=5} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot h + h^2 - 5^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{10h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(10+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (10+h) = 10\,.$$

Wir können unser Beispiel auf beliebige Potenzfunktionen mit natürlichzahliger Potenz erweitern.

Tabelle 5.1: Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Beispiel 5.3

Gesucht ist der Differentialquotient der Funktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes (☞ § 2.2.4, Seite 15) finden wir

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right) = \lim_{h\to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1}\,.$$

5.2 Die Ableitung einer Funktion

Definition 5.2 (Ableitung)

*Die Funktion $f' \colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_x$ heißt die **erste Ableitung** der Funktion f. Die Definitionsmenge D ist die Menge aller Punkte, in denen der Differentialquotient existiert.* erste Ableitung

Bemerkung 5.2

Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist eine *Zahl*. Die Ableitung einer Funktion f in einem Intervall (a, b) ist eine Funktion.

Zur Berechnung der Ableitung einer Funktion (wir sagen dazu „**Differenzieren der Funktion**“) ist es notwendig, den Differentialquotienten an jeder Stelle des Definitionsbereichs auszurechnen. In der Praxis wäre das jedoch sehr mühsam. Daher gibt es Tabellen, in denen die Ableitungen von wichtigen Funktionen aufgelistet sind (☞ Tab. 5.1). Differenzieren

Differentiationsregeln

Mit Hilfe von *Rechenregeln* (☞ Tab. 5.2) ist es möglich die Ableitung einer komplexen Funktion auf die Ableitungen einfacher Funktionen zurückzuführen.

Tabelle 5.2: Differentiationsregeln

Bezeichnung	Regel
	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
Produktregel	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Beispiel 5.4
Durch Anwenden der Regeln aus den Tabellen 5.1 und 5.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left(3x^3+2x-4\right)' &= 3\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 1-0 = 9x^2+2 \\
\left(e^x\cdot x^2\right)' &= \left(e^x\right)'\cdot x^2+e^x\cdot\left(x^2\right)' = e^x\cdot x^2+e^x\cdot 2x \\
\left((3x^2+1)^2\right)' &= 2(3x^2+1)\cdot 6x \\
\left(\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\left(2^x\right)' &= \left(e^{\ln(2)\cdot x}\right)' = e^{\ln(2)\cdot x}\cdot\ln(2) = 2^x\ln(2) \\
\left(a^x\right)' &= \left(e^{\ln(a)\cdot x}\right)' = e^{\ln(a)\cdot x}\cdot\ln(a) = a^x\ln(a) \\
\left(\frac{x^4+4x^2+4}{x^2+2}\right)' &= \frac{(4x^3+8x)\cdot(x^2+2)-(x^4+4x^2+4)\cdot(2x)}{(x^2+2)^2} \\
\left(\frac{x^4+4x^2+4}{x^2+2}\right)' &= \left(\frac{(x^2+2)^2}{x^2+2}\right)' = \left(x^2+2\right)' = 2x
\end{aligned}$$

Auch sehr komplizierte Funktionen lassen sich — die konsequente Anwendung der Differentiationsregeln vorausgesetzt — differenzieren.

Beispiel 5.5

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(x\cdot e^{-x^2}+\sin(2x^2-5)\cdot\ln(x^4))'}_{\text{Additionsregel}} \\
=\ &\underbrace{(x\cdot e^{-x^2})'}_{\text{Produktregel}} + \underbrace{(\sin(2x^2-5)\cdot\ln(x^4))'}_{\text{Produktregel}} \\
=\ &1\cdot e^{-x^2}+x\cdot\underbrace{(e^{-x^2})'}_{\text{Kettenregel}} + \underbrace{(\sin(2x^2-5))'}_{\text{Kettenregel}}\cdot\ln(x^4)+\sin(2x^2-5)\cdot\underbrace{(\ln(x^4))'}_{\text{Kettenregel}} \\
=\ &1\cdot e^{-x^2}+x\cdot(-2x)e^{-x^2}+4x\cos(2x^2-5)\cdot\ln(x^4)+\sin(2x^2-5)\cdot 4x^3\frac{1}{x^4}
\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen

Wir haben in Definition 5.2 die Ableitung einer Funktion eingeführt. Diese Funktion kann nun ihrerseits wieder differenzierbar sein, und wir erhalten so die Ableitung der (ersten) Ableitung der Funktion. Wir bezeichnen diese Funktion als die **zweite Ableitung** $f''(x)$ der Funktion f. Lässt sich auch diese Funktion differenzieren erhalten wir die **dritte Ableitung** $f'''(x)$, **vierte Ableitung** $f''''(x)$ ... $\boldsymbol{n}$-te Ableitung $f^{(n)}(x)$, usw.

Beispiel 5.6

Die ersten 5 Ableitungen der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 3$ sind

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^4 + 2x^2 + 5x - 3)' = 4x^3 + 4x + 5 \\
f''(x) &= (4x^3 + 4x + 5)' = 12x^2 + 4 \\
f'''(x) &= (12x^2 + 4)' = 24x \\
f''''(x) &= (24x)' = 24 \\
f^{\mathrm{V}}(x) &= 0
\end{aligned}$$

5.3 Monotonie und Konvexität

Definition 5.3 (Monotonie)

*Eine Funktion f heißt **monoton steigend** in einem Intervall $[a, b]$, falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt* monoton steigend

$$x_1 \le x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

Sie heißt streng monoton steigend *falls*

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

*Die Funktion f heißt (streng) **monoton fallend** in einem Intervall $[a, b]$, falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt* monoton fallend

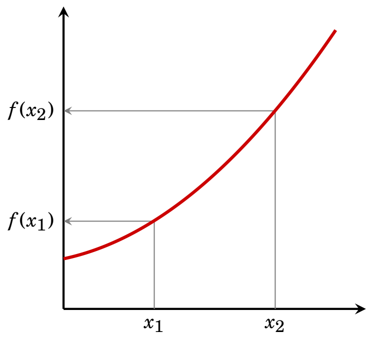
$$x_1 \le x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \qquad [\text{ bzw. } x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)\ ]$$

In Abbildung 5.6 ist zu erkennen, dass die Steigung der Tangente an den Graphen einer monotonen Funktion entweder immer *positiv* (*steigend*) oder *negativ* (*fallend*) ist. Für *differenzierbare* Funktionen (☞ §5.1, Seite 65) erhalten wir daher folgendes Kriterium für die Monotonie von Funktionen in einem Intervall $[a, b]$:

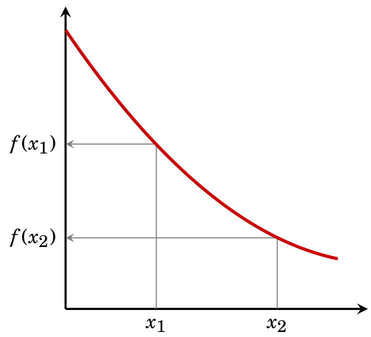
$$\boxed{\begin{array}{rcll} f \text{ monoton steigend} & \Leftrightarrow & f'(x) \ge 0 & \text{für alle } x \in [a,b] \\ f \text{ monoton fallend} & \Leftrightarrow & f'(x) \le 0 & \text{für alle } x \in [a,b] \end{array}}$$

Für streng monotone Funktionen finden wir das (salopp formulierte) Kriterium:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} f \text{ streng monoton steigend} & \Leftrightarrow & f'(x) > 0 & \text{bis auf einzelne Punkte} \\ f \text{ streng monoton fallend} & \Leftrightarrow & f'(x) < 0 & \text{bis auf einzelne Punkte} \end{array}}$$



monoton steigend



monoton fallend

Abbildung 5.6: Monotone Funktionen

Beispiel 5.7

Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend:

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 5.8

In welchem Bereich ist die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$ monoton steigend (☞ Abb. 4.2, Seite 48)?
Wir müssen dazu die Ungleichung $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ lösen (☞ §2.4, Seite 26).

$$\left(1 - \tfrac{1}{x}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$$

f ist im Intervall $[1,\infty)$ monoton steigend.

Für *stetige* Funktionen, die mehr als eine Nullstelle von $f'(x)$ besitzen, eignet sich das Verfahren aus § 2.4.1 auf Seite 26; vorausgesetzt $f'(x)$ ist *stetig*.

Beispiel 5.9

In welchen Bereichen ist $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$ monoton steigend? Wir müssen dazu die Ungleichung

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 \geq 0$$

lösen. Dazu berechnen wir zuerst die Nullstellen von $f'(x)$,

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

und erhalten 3 Intervalle $(-\infty,1]$, $[1,3]$ und $[3,\infty)$. In jedem dieser Intervalle ist $f'(x)$ entweder überall ≥ 0 oder überall ≤ 0, da sich das Vorzeichen innerhalb dieser Intervalle nicht ändern kann. Wir können das Vorzeichen durch Einsetzen "geeigneter" Punkte bestimmen:

$$\begin{aligned} (-\infty,1]&: \quad f'(0) = 3 > 0 \\ [1,3]&: \quad f'(2) = -1 < 0 \\ [3,\infty)&: \quad f'(4) = 3 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist daher monoton steigend in $(-\infty,1] \cup [3,\infty)$.

Bemerkung 5.3
Punkte, in denen $f'(x) = 0$ wird, heißen *kritische Punkte* von f (☞ § 5.4.1, Seite 77).

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die **Krümmung**.

Definition 5.4 (Krümmung)

konvex

*Eine Funktion f heißt **konvex** in einem Intervall $[a,b]$, falls der Graph der Funktion immer* unter der Sekante *(☞ Abb. 5.7) liegt, in Formeln: falls für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ und für alle $h \in [0,1]$ gilt*

$$f((1-h)x_1 + h\,x_2) \le (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)\,.$$

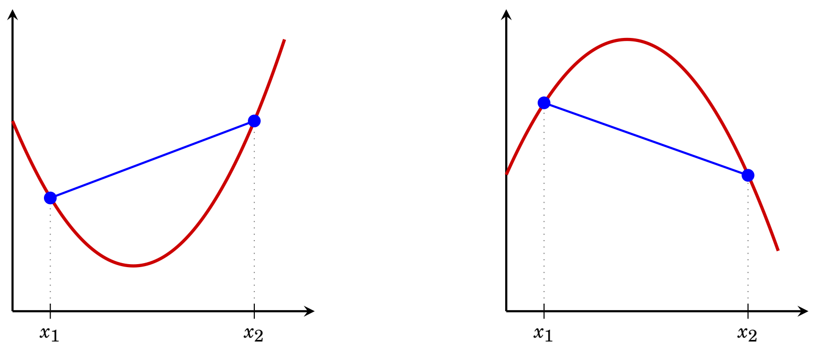
Sie heißt streng konvex *falls*

$$f((1-h)x_1 + h\,x_2) < (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2) \quad \text{für alle } h \in (0,1).$$

konkav

*Die Funktion heißt **konkav**, falls*

$$f((1-h)x_1 + h\,x_2) \ge (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)\,.$$



konvex konkav

Abbildung 5.7: Konvexe und konkave Funktion

Bemerkung 5.4
Abbildung 5.8 illustriert die Formel $f((1-h)x_1+h\,x_2) \ge (1-h)\,f(x_1)+h\,f(x_2)$: Der Term $(1-h)x_1+h\,x_2$ gibt den Punkt auf der x-Achse an, der die Strecke zwischen x_1 und x_2 im Verhältnis $(1-h)$ zu h teilt. Die linke Seite der Ungleichung, $f((1-h)x_1+h\,x_2)$, ist dann der Funktionswert an diesem Punkt. Die rechte Seite der Ungleichung, $(1-h)\,f(x_1)+h\,f(x_2)$, entspricht dem Punkt auf der y-Achse, der die Strecke zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ im Verhältnis $(1-h)$ zu h teilt. Es entspricht daher dem Punkt auf der Sekante, der dem Punkt $(1-h)x_1+h\,x_2$ entspricht. Die Ungleich beschreibt daher formal, dass der Funktionsgraph immer oberhalb der Sekante liegt.

Beim Betrachten von Abbildung 5.7 fällt auf, dass die Steigung der Tangente von konvexen Funktionen immer kleiner wird, je größer x wird. Mit anderen Worten, die erste Ableitungsfunktion ist monoton fallend. Für *differenzierbare* Funktionen erhalten wir daher folgendes Kriterium für die Krümmung von Funktionen in einem Intervall $[a,b]$:

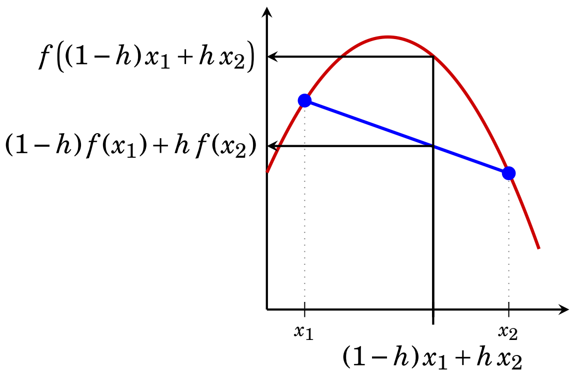


Abbildung 5.8: Illustration zur Formel $f((1-h)x_1+h\,x_2) \geq (1-h)f(x_1)+h\,f(x_2)$

f konvex	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$	für alle $x \in [a,b]$
f konkav	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$	für alle $x \in [a,b]$

bzw. (wieder salopp formuliert)

f streng konvex	$\Leftrightarrow$	$f''(x) > 0$	bis auf einzelne Punkte
f streng konkav	$\Leftrightarrow$	$f''(x) < 0$	bis auf einzelne Punkte

Beispiel 5.10
Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist streng konvex (☞ Abb. 4.7 (c), Seite 53), die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ist streng konkav (☞ Abb. 4.7 (d)):

$$\begin{aligned} \left(e^x\right)'' &= \left(e^x\right)' = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ (\ln(x))'' &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Beispiel 5.11
Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$ ist streng konvex:

$$(x-\ln(x))'' = \left(1-\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0,\infty).$$

Wie im Beispiel 5.9 können wir auch zum Feststellen der Bereiche, in denen eine Funktion konvex oder konkav ist, das Verfahren aus § 2.4.1 auf Seite 26; vorausgesetzt $f''(x)$ ist *stetig*.

Beispiel 5.12
In welchem Bereich ist $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$ konkav? Wir müssen dazu die Ungleichung

$$f''(x) = 12x - 24 \leq 0$$

lösen. Dazu berechnen wir zuerst die Nullstellen von $f''(x)$,

$$f''(x) = 12x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

und erhalten 2 Intervalle $(-\infty, 2]$ und $[2, \infty)$. In jedem dieser Intervalle ist $f''(x)$ entweder überall ≥ 0 oder überall ≤ 0, da sich das Vorzeichen innerhalb dieser Intervalle nicht ändern kann. Wir können das Vorzeichen durch Einsetzen "geeigneter" Punkte bestimmen:

$$\begin{aligned} (-\infty, 2]&: \quad f''(0) = -24 < 0 \\ [2, \infty)&: \quad f''(4) = 24 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist daher konkav in $(-\infty, 2]$.

Bemerkung 5.5
Punkte, in denen $f''(x)$ das Vorzeichen ändert, heißen *Wendepunkte* von f.

5.4 Lokale und globale Extremwerte

Bei der Untersuchung einer Funktion will man oft Punkte finden, an denen die Funktion einen größtmöglichen oder kleinstmöglichen Wert annimmt. (Denken Sie etwa an eine Gewinnfunktion oder eine Kostenfunktion.) Solche Punkte werden als **Extremwerte** (oder **Extrema**, **Optima**) bezeichnet. Wir unterscheiden dabei zwischen Punkten, in denen diese Extremwerteigenschaft im gesamten Definitionsbereich gilt (**globale Extrema**), und solchen Punkten, wo diese Eigenschaft zumindest in einem kleinen Bereich gilt (**lokale Extrema**).

Extremwert
Extrema
globales Extremum
lokales Extremum

Definition 5.5 (globales Extremum)

Ein Punkt $x^* \in D_f$ heißt ***globales Maximum*** (absolutes Maximum) *der Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x) \leq f(x^*)$.*
x^* heißt ***globales Minimum*** (absolutes Minimum)*, falls $f(x) \geq f(x^*)$.*

globales Maximum
globales Minimum

Definition 5.6 (lokales Extremum)

Ein Punkt $x_0 \in D_f$ heißt ***lokales Maximum*** (relatives Maximum) *der Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$, falls für alle x in einem (hinreichend kleinen)* Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ *gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.*
x_0 heißt ***lokales Minimum*** (relatives Minimum)*, falls $f(x) \geq f(x_0)$.*

lokales Maximum
lokales Minimum

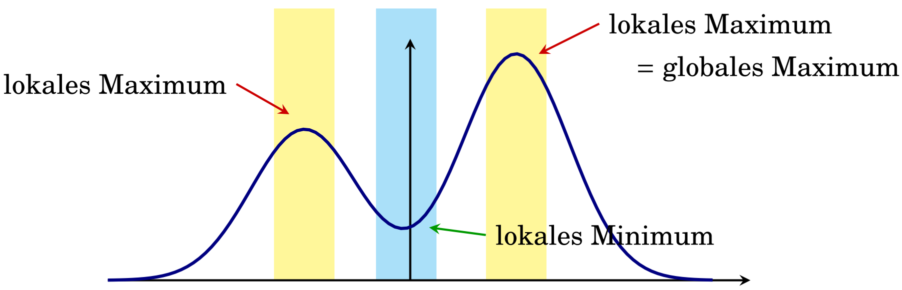


Abbildung 5.9: Lokale und globale Extrema

Jedes *globale* Extremum ist auch ein *lokales* Extremum. Umgekehrt kann ein lokales Minimum ein globales Minimum sein, muss aber nicht.

Es sei an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, dass man aus einem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem machen kann, und umgekehrt (☞ Abb. 5.10):

> Der Punkt x_0 ist ein (lokales oder globales) Minimum von $f(x)$,
> genau dann wenn x_0 ein (lokales bzw. globales) Maximum von $-f(x)$ ist.

Aus diesem Grund wird im Falle von komplexeren Optimierungsproblem oft nur das Maximierungs- oder Minimierungsproblem ausführlich behandelt.

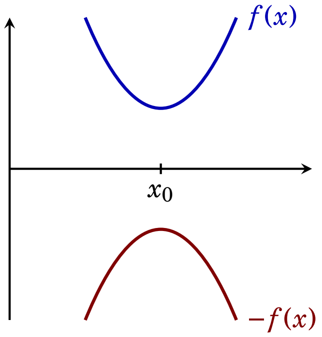


Abbildung 5.10: x_0 ist ein Minimum von f und ein Maximum von $-f(x)$.

5.4.1 Berechnung der lokalen Extrema

Beim Betrachten von Abbildung 5.11 auf Seite 78 fällt auf, dass wir zwei Fälle von lokalen Extrema unterscheiden müssen:

(1) Lokale Extrema am Rand eines abgeschlossenen Intervalls $[a,b]$.

(2) Lokale Extrema im Inneren des Intervalls, oder $D_f = \mathbb{R}$.

Fall (1):

- a ist ein lokales Minimum von f im Intervall $[a,b]$, falls $f'(a) > 0$ oder $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$.
- b ist ein lokales Minimum von f im Intervall $[a,b]$, falls $f'(b) < 0$ oder $f'(b) = 0$ und $f''(b) > 0$.

Fall (2): x_0 ist ein Extremum von f in $\mathbb{R}$ oder im Inneren eines Intervalls $[a,b]$.

Es fällt hier auf, dass die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion in Abbildung 5.11 an den inneren lokalen Extrema x_1 und x_2 gleich 0 ist, und dass die Funktion in der Nähe dieser lokalen Extrema *konkav* (x_1) bzw. *konvex* (x_2) ist (☞ §5.3).

Ein Punkt, im dem $f'(x_0) = 0$ wird, heißt **stationärer Punkt** (oder auch **sin-** stationärer Punkt

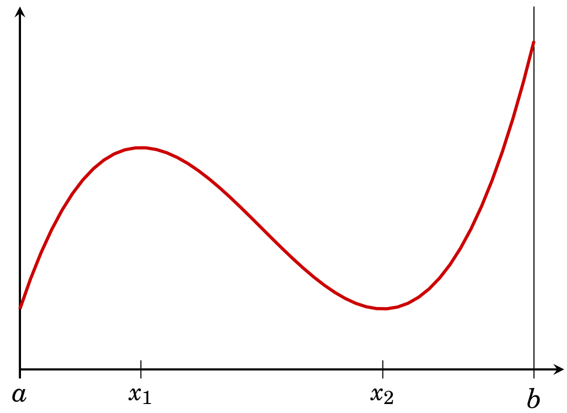


Abbildung 5.11: Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ mit $D_f = [a,b] = [0;8,5]$

gulärer Punkt, **kritischer Punkt**) der Funktion f. Alle lokalen Extrema im inneren des Definitionsbereichs (d.s. alle die nicht am Rand liegen) sind somit stationäre Punkte.

Für *differenzierbare* Funktionen f (☞ §5.1, Seite 65) gilt:
Ein Punkt x_0 ist genau dann ein *lokales* Minimum (Maximum), falls

(1) $f'(x_0) = 0$ und

(2) f in einem „geeigneten" Intervall um x_0 *konvex* (bzw. *konkav*) ist.

Wir erhalten daher für *differenzierbare* Funktionen die folgende Vorgangsweise zur Berechnung der *lokalen Extrema* im Inneren des Definitionsbereichs:

(1) Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(2) Suche alle Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$. (Stationäre Punkte)

(3) $f''(x_i) > 0 \quad \Rightarrow x_i$ ist ein *lokales Minimum*
$f''(x_i) < 0 \quad \Rightarrow x_i$ ist ein *lokales Maximum*
$f''(x_i) = 0 \quad \Rightarrow$ *keine* Aussage möglich.

Beispiel 5.13
Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ in $\mathbb{R}$
(☞ Abb. 5.11).

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3, \quad f''(x) = \frac{1}{2}x - 2.$

(2) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

(3) $f''(2) = -1 \Rightarrow x_1$ ist ein lokales Maximum.
$f''(6) = 1 \Rightarrow x_2$ ist ein lokales Minimum.

$x_1 = 2$ ist ein lokales Maximum und $x_2 = 6$ ist ein lokales Minimum von f.

Im Fall $f''(x_0) = 0$ müssen weitere Untersuchungen angestellt werden, um festzustellen, ob die Funktion in der Nähe von x_i konvex ($\Rightarrow$ lokales Minimum), konkav ($\Rightarrow$ lokales Maximum) oder keines von beiden ($\Rightarrow$ Sattelpunkt) ist.

Beispiel 5.14

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^4$.

(1) $f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2$.

(2) $4x^3 = 0$ hat die Lösung $x_1 = 0$.

(3) $f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

Aber: $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ist konvex und x_1 ist ein lokales Minimum.

Bemerkung 5.6

Man findet gelegentlich die „Schlussfolgerung" $f''(x) = 0 \Rightarrow$ „*x ist Sattelpunkt*". Das ist aber im Allgemeinen **falsch**! (☞ Beispiel 5.14)

⚠

Im folgenden sei noch die Vorgangsweise demonstriert, wenn der Definitionsbereich der Funktion ein abgeschlossenes oder halboffenes Intervall ist.

Beispiel 5.15

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ im Intervall $[0; 8{,}5]$ (☞ Abb. 5.11). Aus Beispiel 5.13 wissen wir bereits, dass $x_1 = 2$ ein lokales Maximum und $x_2 = 6$ ein lokales Minimum ist.

Da $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$, finden wir an den beiden Rändern $f'(0) = 3 > 0$ und $f'(8{,}5) = 4{,}0625 > 0$. Daher ist $a = 0$ ein lokales Minimum und $b = 8{,}5$ ein lokales Maximum von f.

Bemerkung 5.7

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Funktion $f(x) = x$ im *offenen* Intervall $(0, 1)$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt. Die möglichen Kandidaten $a = 1$ und $b = 1$ gehören nicht zum Definitionsbereich, vgl. Definition 5.6 auf Seite 76.

Bemerkung 5.8

An Beispiel der lokalen Extrema in $\mathbb{R}$ sei kurz zwei wichtige Begriffe aus der mathematischen Argumention erläutert.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$" ist eine sogenannte *notwendige Bedingung* dafür, dass x_0 ein lokales Minimum ist. Jedes lokale Minimum muss diese Eigenschaft haben. Die Umkehrung ist allerdings falsch! Nicht jeder stationäre Punkt ist ein lokales Extremum. 0 ist kein Extremum von $f(x) = x^3$, aber $f'(0) = 0$. Die stationären Punkte liefern uns daher nur die Kandidaten für lokale Minima.

Andererseits ist die Bedingung „$f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$" eine sogenannte *hinreichende Bedingung*. Wenn x_0 diese Bedingung erfüllt ist, dass dann ist das hinreichend (ausreichend) um daraus auf ein lokales Minimum in x_0 schließen zu können. Wie Beispiel 5.14 zeigt, gibt es aber auch lokale Minima, die diese Bedingung nicht erfüllen. Falls die hinreichende Bedingung nicht erfüllt ist, so können wir daraus gar nichts schließen (außer, dass wir uns noch nach anderen mathematischen Werkezeugen umsehen müssen).

5.4.2 Berechnung der globalen Extrema

Das *globale* Minimum ist das *kleinste* aller lokalen Minima. Für *differenzierbare* Funktionen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ können wir daher aus dem in § 5.4.1 beschriebenen Verfahren die folgende Vorgangsweise zur Bestimmung der *globalen Extrema* herleiten:

(1) Berechne $f'(x)$

(2) Suche alle Punkte x_i mit $f'(x_i) = 0$.

(3) Berechne alle $f(x_i)$ sowie $f(a)$ und $f(b)$.

(4) Der größte dieser Werte ist das *globale Maximum*, der kleinste dieser Werte ist das *globale Minimum*

Bemerkung 5.9
Es ist bei diesem Verfahren *nicht* notwendig $f''(x_i)$ zu berechnen.

Beispiel 5.16
Gesucht sind die *globalen* Extrema der Funktion $f\colon [0{,}5;8{,}5] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ (vgl. Beispiele 5.13 und 5.15, ☞ Abb. 5.11).

(1) $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

(2) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

(3)
$$\begin{aligned} f(0{,}5) &= 2{,}260 & & \\ f(2) &= 3{,}667 & & \\ f(6) &= 1{,}000 & \Rightarrow\quad & \text{globales Minimum} \\ f(8{,}5) &= 5{,}427 & \Rightarrow\quad & \text{globales Maximum} \end{aligned}$$

(4) $x_2 = 6$ ist ein globales Minimum und $b = 8{,}5$ ist ein globales Maximum von f.

Bemerkung 5.10
Die globalen Extremwerte sind nicht immer eindeutig bestimmt. So hat etwa die Funktion $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 2x^2$ drei globale Maxima an den Stellen -2, 0 und 2, und zwei globale Minima an den Stellen -1 und 1 (☞ Übungsbeispiel 124).

Im Falle eines *unbeschränkten*, (z.B. $\mathbb{R}$) oder offenen (z.B. $(0,1)$) Definitionsbereichs, berechnen wir anstatt der Funktionswerte an den Randpunkten $f(a)$ und $f(b)$ die entsprechenden Grenzwerte , (z.B. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bzw. $\lim_{x\to a} f(x)$). Die Vorgangsweise ist analog zu oben. Das globale Maximum (Minimum) existiert aber in diesem Fall nur, wenn der größte (kleinste) Wert an einem lokalen Extremum angenommen wird, und nicht etwa in a oder ∞ (sie sind nicht Elemente der Definitionsmenge).

Beispiel 5.17
Gesucht sind die globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$.

1. $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.
2. $f'(x) = -2x\,e^{-x^2} = 0$ besitzt die einzige Lösung $x_1 = 0$.
3. $$\begin{aligned} f(0) &= 1 & \Rightarrow\quad & \text{globales Maximum} \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0 & \Rightarrow\quad & \text{das globale Minimum existiert nicht} \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= 0 & & \end{aligned}$$
4. Die Funktion besitzt das globales Maximum $x_1 = 0$.

In vielen ökonomischen Modellen werden konkave oder konvexe Funktionen (also Funktionen, die im gesamten Definitionsbereich entweder konkav oder konvex sind) verwendet. Man kann dann folgende hinreichende Bedingung zum Bestimmen von globalen Extrema benutzen:

Falls x^* ein stationärer Punkt einer *konvexen* (konkaven) Funktion f ist, dann ist x^* ein *globales Minimum* (bzw. globales Maximum) von f.
Falls f *streng konvex* (streng konkav) ist, dann ist das Extremum sogar eindeutig bestimmt (d.h., nur x^* ist ein globales Extremum).

Beispiel 5.18

Die Funktion $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x)=x-\ln(x)$ ist streng konvex (☞ Beispiel 5.11 und Abb. 4.2 auf Seite 48). Da $x_1=1$ ein stationärer Punkt von $f'(x)=1-\frac{1}{x}=0$ ist, ist $x_1=1$ das eindeutig bestimmte globale Minimum von f.
Außerdem besitzt f kein Maximum.

— Übungen

91. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)^3$. Berechnen Sie die Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ für $\Delta x = 3,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$. Bestimmen Sie auch den Differentialquotienten durch Grenzübergang. Zeichen Sie im Graphen der Funktion die entsprechenden Sekanten und die Tangente ein.

92. Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderung der folgenden Funktionen in den angegebenen Intervallen:

(a) $h(x) = ax^2 + bx + c$ in $[x, x+h]$ (b) $g(x) = \frac{x^2-a}{x-3}$ in $[2; 2{,}5]$

(c) $G(t) = t^2 + t$ in $[a, a+h]$ (d) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ in $[x, x+h]$

93. Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktionen. Sind diese Funktionen differenzierbar, bzw. wo sind sie differenzierbar? Sind die Funktionen stetig?

(a) $f(x) = 2x + 2$ (b) $f(x) = x \mapsto 3$

(c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \le -1 \\ x & \text{für } -1 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{für } x \le -1 \\ x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

94. Zwischen 1950 und 1970 wuchs das BIP (BruttoInlandsProdukt, auch Bruttosozialprodukt) eines Landes nach der Formel $5 + 0{,}1x + 0{,}01x^2$, (1950: $x = 0$. x sind die Jahre seit 1950.). Wie groß war das durchschnittliche Wachstum zwischen 1955 und 1960? Wie hoch war die (momentane) Zuwachsrate 1958?

95. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen durch Grenzübergang:

(a) $f(x) = 2 - 5x$ (b) $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ (c) $g(y) = \dfrac{1}{y^2}$

(d) $u = \dfrac{1}{2t+1}$ (e) $x = \dfrac{y+1}{y^2}$ (f) $g(x) = (x+1)^2$

96. Suchen Sie jene Werte von x, wo f nicht differenzierbar ist.

(a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (b) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

97. Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x < -1 \\ ax^2 + bx + c, & \text{wenn } -1 \le x \le 1 \\ -2x, & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Werte von a, b und c, sodass f stetig und differenzierbar ist.

98. Ein Energieversorgungsunternehmen verlangt 10 Geldeinheiten für jede Verbrauchseinheit bei einem Monatsverbrauch bis zu 50 Verbrauchseinheiten. Für einen darüberhinausgehenden Verbrauch verlangt das Unternehmen 3 Geldeinheiten pro Verbrauchseinheit (über 50). Man diskutiere Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Kostenfunktion des Verbrauchers.

99. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = 9x^3 - 12x^{\frac{1}{2}}$ (b) $h(x) = 5 - 2x^2 + x^4$ (c) $f(x) = 3x^4 + (2x-1)^2$

(d) $f(y) = \dfrac{2y^2 + 3y - 7}{y}$ (e) $g(t) = \dfrac{t + \frac{3}{t}}{\sqrt{t}}$ (f) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$

(g) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{x^{0,6}}$ (h) $f(x) = x^{-0,4} - x^{0,4}$

100. Differenzieren Sie:

(a) $3x^2 + 5\cos(x) + 1$ (b) $(2x+1)x^2$ (c) $x\ln(x)$

(d) $(2x+1)x^{-2}$ (e) 2^x (f) $\ln(\exp(x))$

(g) $(3x-1)^2$ (h) $\sin(3x^2)$

101. Differenzieren Sie:

(a) $\dfrac{(2x+1)(x^2-1)}{x+1}$ (b) $\dfrac{3x^2-1}{x+1}$

(c) $2e^{3x+1}(5x^2+1)^2 + \dfrac{(x+1)^3}{x-1} - 2x$

102. Differenzieren Sie:

(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ (b) $g(x) = \dfrac{3-x}{x^2-3}$ (c) $y = \dfrac{t^2 - 7t}{t-5}$

(d) $y = \dfrac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1}$ (e) $x = \dfrac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}$ (f) $t = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

103. Differenzieren Sie:

(a) $y = (3x+5)^7$ (b) $y = \sqrt{5-2t}$ (c) $h(t) = \sqrt{t^2 + a^2}$

(d) $x = (y^3+7)^6$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^4}$ (f) $g(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$

(g) $u = (2x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ (h) $F(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$ (i) $v = (u^2+1)^3(2u+1)$

104. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (c) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(d) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ (e) $f(x) = e^{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

(g) $f(x) = x(\ln(x))^2$ (h) $f(x) = \ln(e^x - 1)$ (i) $f(x) = e^{(\ln(x))^2}$

(j) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ (k) $f(x) = x^2\ln(x^2+1)$ (l) $f(x) = \log_a(x)$

(m) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (n) $f(x) = a^x$ (o) $f(x) = x\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3}$

105. Bestimmen Sie die Tangente an $f(x)$ in $x = x_0$:

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $x_0 = 0$ (b) $f(x) = x\ln(x)$ $x_0 = 1$

(c) $f(x) = e^{-x}$ $x_0 = 0$ (d) $f(x) = e^{-x^2}$ $x_0 = 0$

(e) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $x_0 = 1$ (f) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ $x_0 = -1$

106. Berechnen Sie die lineare Funktion, die $f(x)$ in $x = x_0$ berührt:

(a) $f(x) = \ln(x+1)$ $\quad x_0 = 0$ (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $\quad x_0 = 1$

(c) $f(x) = (x-1)^2 + 2(x+1)$ $\quad x_0 = -1$ (d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $\quad x_0 = 2$

(e) $f(x) = \ln(1+x^2)$ $\quad x_0 = 0$ (f) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ $\quad x_0 = -1$

107. Berechnen Sie die lineare Funktion, die $f(x)$ in $x = x_0$ berührt:

(a) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ $\quad x_0 = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad x_0 = 1$

(c) $f(x) = x(1-x)$ $\quad x_0 = \frac{1}{2}$ (d) $f(x) = x(1-x)$ $\quad x_0 = 0$

(e) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ $\quad x_0 = 0$ (f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$ $\quad x_0 = 0$

108. Es seien $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = e^{2x} + 1$ und $h(x) = (f \circ g)(x)$. Wie lautet $h'(x)$?

109. Bestimmen Sie die zweiten Ableitungen:

(a) $y = \ln(\ln(x))$ (b) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$ (c) $y = \ln((x+1)(x+2))$

(d) $y = x3^{\frac{1}{x}}$ (e) $y = (\frac{x^2}{2} + x)e^{-x}$ (f) $y = e^{-x^2}$

110. Bilden Sie die Ableitungen

(a) $f'''(x)$ für $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

(b) $f''(x)$ für $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(c) $f''(x)$ für $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$

(d) $f'''(x)$ für $f(x) = x\ln(x)$

(e) $f'''(x)$ für $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

(f) $f''(x)$ für $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \ln(x)$

111. Bilden Sie die Ableitungen

(a) $f''(x)$ für $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(b) $f'''(x)$ für $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(c) $f''(x)$ für $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

(d) $f''(x)$ für $f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x+1}$

(e) $f''(x)$ für $f(x) = (x-1)(\dfrac{1}{x+1} - x^2)$

(f) $f'''(x)$ für $f(x) = (x-2)(x^2+3)$

(g) $f''(x)$ für $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$

112. Bestimmen Sie den marginalen Erlös für folgende Erlösfunktionen:

(a) $R(x) = x - 0{,}01x^2$ (b) $R(x) = 0{,}1x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{\frac{5}{2}}$

(c) $R(x) = 5x - 0{,}01x^{\frac{5}{2}}$ (d) $R(x) = 100x - \ln(5)x^3(1+\sqrt{x})$

(Hinweis: Der marginale Erlös (auch: *Grenzerlös*) ist die erste Ableitungen $R'(x)$ der Erlösfunktion $R(x)$.)

113. Bestimmen Sie die marginalen Kosten und die Änderungsrate der marginalen Kosten für folgende Kostenfunktionen:

(a) $C(x) = 500 + 30x - 0{,}1x^2 + 0{,}002x^3$

(b) $C(x) = 500 + 20x - 2x\ln(x) + 0{,}01x^2$

Wie lautet die zweite Ableitung der durchschnittlichen Kosten?
(Hinweis: Die marginalen Kosten (auch: *Grenzkosten*) sind die erste Ableitung $C'(x)$ der Kostenfunktion $C(x)$.)

114. Bestimmen Sie die mit Hilfe der zweiten Ableitung die Krümmung (d.h. Konkavität oder Konvexität) folgender Funktionen. Welche Fälle sind möglich?

(a) $\exp(x)$ (b) $\ln(x)$ (c) $\log_{10}(x)$

(d) x^α für $x > 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

115. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die folgenden Funktionen monoton steigend bzw. fallend und konkav bzw. konvex ist.

(a) $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 24x^2 + 8$ (b) $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2}$

116. In welchem Bereich ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 19$ monoton steigend bzw. fallend? In welchem Bereich ist die konvex bzw. konkav?

117. Für welche Werte von x sind die folgenden Funktionen wachsend, fallend, konkav oder konvex?

(a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ (b) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^4$

(c) $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$ (d) $f(x) = -2x^2 + 9x - 4$

(e) $f(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ (f) $f(x) = x\,e^{x^2}$

118. Die Funktion

$$f(x) = b\,x^{1-a} \qquad 0 < a < 1,\, b > 0,\, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine *Produktionsfunktion*, d.h. mit x Einheiten Arbeit kann man $f(x)$ Güter produzieren.

(a) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion streng monoton steigend und streng konkav ist.

(c) Wie kann man diese beiden Eigenschaften interpretieren?

119. Die Funktion

$$f(x) = b\,\ln(ax + 1) \qquad a, b > 0,\, x \geq 0$$

ist ein Beispiel für eine *Nutzenfunktion*. Konsumenten haben einen Nutzen $f(x)$, wenn sie x Einheiten eines Gutes konsumieren.

(a) Zeichnen Sie $f(x)$ und $f'(x)$.
(Setzen Sie dabei für a und b geeignete Werte ein.)

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion streng monoton steigend und streng konkav ist.

(c) Wie kann man diese beiden Eigenschaften interpretieren?

120. Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und stellen Sie fest, ob es sich um lokale Extremwerte handelt.

(a) $f(x) = 3 - 2x - 4x^2$ (b) $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ (c) $f(x) = x^2 e^{3x}$

(d) $f(x) = 2x^2 - \ln(x)$ (e) $f(x) = \sqrt{|x|}$ (f) $f(x) = x^{\frac{2}{5}}(1-x)^2$

121. Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktionen

(a) $f(x) = (x-3)^6$ (b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ (c) $h(x) = e^{-x^2}$

122. Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktionen

(a) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + x$

(b) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} - x$

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x} + 2x$

(d) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(x)$

123. Berechnen Sie die globale Maxima und Minima der Funktionen

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{5}{4}x^2 + 4x - \dfrac{1}{2}$ im Intervall $[1,12]$

(b) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + 2$ im Intervall $[-2,6]$

(c) $f(x) = -\dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^2}{2} + 20$ in $\mathbb{R}$

124. Berechnen Sie die globalen Extremwerte der Funktion

$$f : [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 2x^2$$

125. Gegeben sei die Funktion f durch $f(x) = \ln\left(1 + (x-1)^2\right)$. Bestimmen Sie die Extremwerte im Intervall $[0,3]$. Ist $f(x)$ in diesem Intervall konvex oder konkav?

126. Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der folgenden Funktionen in den gegebenen Intervallen.

(a) $f(x) = x(x-1)$ $x \in [-1,2]$

(b) $f(x) = x^3 + 7x$ $x \in [-3,4]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x(2-x)}$ $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

(d) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-x}}$ $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

(e) $f(x) = \frac{x-2}{x\sqrt{4-x}}$ $x \in [\frac{1}{4}, 2]$

127. Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der folgenden Funktionen in den gegebenen Intervallen.

(a) $f(x) = x\ln(x) - x$ $x \in [0,3]$

(b) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in [0,3]$

(c) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in [0,2]$

(d) $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 13)$ $x \in [1,5]$

(e) $f(x) = (x+1)\ln(x) - x$ $x \in [1, \frac{3}{2}]$

128. Die Gesamtkosten $K(x)$ für die Produktion setzen sich aus fixen Kosten von 100 Geldeinheiten und variablen Kosten von fünf Geldeinheiten pro produzierter Einheit x zusammen. Der Erlös pro Einheit hängt von der verkauften Menge ab. Für Mengen größer als 0 und kleiner als 5001 Stück ist er durch folgende Funktion gegeben: $P(x) = 9 - \ln(x)$.
Berechnen Sie die Stückzahl x, die den Gewinn $xP(x) - K(x)$ maximiert ($x \in [1, 5000]$). Handelt es sich dabei um ein globales Maximum?

129. Der Gewinn eines Unternehmers für gegebene Preise p und einen Lohn w ist

$$\pi(x) = p \cdot f(x) - w \cdot x$$

$p \cdot f(x)$ gibt an, wieviel der Unternehmer aus dem Verkauf der Güter zum Preis p einnimmt. $w \cdot x$ gibt an, wieviel der Unternehmer an Löhnen zahlen muss.
Sei $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ die Produktionsfunktion aus Beispiel 118 mit $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.

(a) Zeichnen Sie $\pi(x)$ und $\pi'(x)$ für $p = 1$ und $w = 1$.

(b) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, wieviel der Unternehmer produzieren muss, um seinen Gewinn $\pi(x)$ zu maximieren.

(c) Lösen sie das Optimierungsproblem auch ohne Zeichnung.

(d) Was passiert, wenn der Lohn auf $w = 2$ verdoppelt wird? (Zeichnung, Maximumsberechnung)

6

Stammfunktion und Integral

Doch eben aus diesem Verfahren, aus dieser willkürlichen
Zergliederung einer fortdauernden Bewegung in abgerissene
Einzelteile entspringen die meisten aller menschlichen Irrtümer.
Krieg und Frieden
LEO N. TOLSTOI (1817–1875)

6.1 Was ist eine Stammfunktion?

Definition 6.1 (Stammfunktion)
*Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.* Stammfunktion

Das Auffinden von Stammfunktion stellt die umgekehrte Operation zum Differenzieren dar. Es gibt jedoch — im Gegensatz zum Differenzieren — kein allgemein anwendbares Verfahren, das Stammfunktion liefert. Wir sind daher auf folgende Vorgangsweise angewiesen:

$$\boxed{\text{Vermuten und Verifizieren}}$$

Beispiel 6.1
Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$.

$$\begin{array}{ll} \text{Vermuten:} & F(x) \ = x(\ln(x) - 1) \\ \text{Verifizieren:} & F'(x) \ = (x(\ln(x) - 1)' = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) \end{array}$$

Wir hätten in Beispiel 6.1 auch $F(x) = x(\ln(x)-1)+5$ schreiben können, oder allgemeiner $F(x) = x(\ln(x)-1)+c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl sein kann. Jedesmal erhalten wir eine Stammfunktion von $\ln(x)$.

Die Stammfunktion wird mit dem Symbol

$$\boxed{\int f(x)\,dx + c}$$

Tabelle 6.1: Grundintegrale

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
0	c
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}+c$
e^x	e^x+c
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$

Tabelle 6.2: Integrationsverfahren (Teil 1)

Bezeichnung	Verfahren
Summenregel	$\int \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx$
Partielles Integrieren	$\int f\cdot g'\,dx=f\cdot g-\int f'\cdot g\,dx$
Substitution	$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int f(z)\,dz$ mit $z=g(x)$ und $dz=g'(x)\,dx$

bezeichnet und wird meist als das **unbestimmte Integral** der Funktion f bezeichnet. Das Suchen der Stammfunktion heißt daher auch **Integrieren** der Funktion f. Die Zahl c heißt **Integrationskonstante**.

unbestimmtes Integral

Integrationskonstante

Für das Suchen von Stammfunktionen gibt es keine *„Kochrezepte“*, sondern nur Werkzeuge, die man durchprobieren kann.

Zur Erleichterung gibt es Tabellen mit bekannten Stammfunktionen, sogenannten **Grundintegralen** (☞ Tab. 6.1). Man erhält Tabelle 6.1 leicht aus Tabelle 5.1 auf Seite 70 in dem man die beiden Spalten vertauscht.

Zum Auffinden von Stammfunktionen komplexerer Funktionen stehen eine Reihe von sogenannten *Integrationsverfahren* zur Verfügung. Diese erlauben es uns, die Stammfunktionen komplizierterer Funktionen auf Grundintegrale zurückzuführen. Tabelle 6.2 listet die drei wichtigsten Verfahren auf.

Beispiel 6.2

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x)=4x^3-x^2+3x-5$.
Mittels *Summenregel* erhalten wir

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int 4x^3-x^2+3x-5\,dx\\ &=4\int x^3\,dx-\int x^2\,dx+3\int x\,dx-5\int dx\\ &=4\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{3}x^3+3\tfrac{1}{2}x^2-5x+c\\ &=x^4-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{3}{2}x^2-5x+c\end{aligned}$$

Beispiel 6.3
Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$.
Partielles Integrieren ergibt

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$\begin{aligned} f &= x &\Rightarrow\quad f' &= 1 \\ g' &= e^x &\Rightarrow\quad g &= e^x \end{aligned}$$

Beispiel 6.4
Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.
Durch *Substitution* erhalten wir

$$\int \exp(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} dx = \int \exp(z)\, dz = e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$z = g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad dz = g'(x)\, dx = 2x\, dx$$

Es kann auch sein, dass diese Integrationsverfahren mehrmals angewendet werden müssen.

Beispiel 6.5
Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cdot e^x$. *Partielles Integrieren*:

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} \mathrm{dx} = \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} \mathrm{dx}$$

Durch nochmaliges *partielles Integrieren* erhalten wir (☞ Beispiel 6.3)

$$\int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} \mathrm{dx} = 2(x \cdot e^x - e^x) + c$$

und somit insgesamt

$$\int x^2 \cdot e^x \mathrm{dx} = x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + c$$

Bemerkung 6.1
Es sei nochmals erwähnt, dass es für das das Suchen von Stammfunktionen keine „Kochrezepte“ gibt. Welches Integrationsverfahren zum Ziel führt, erkennt man oft erst am Ziel. Es erfordert daher einige Übung, diese „Werkzeuge“ zu verwenden.

Es gibt Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen. Sie können daher auch nicht durch die Integrationsverfahren aus Tabelle 6.2 in Grundintegrale überführt werden.

Beispiel 6.6
Die Stammfunktion von $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken[1].

[1]Diese Funktion ist aber trotzdem in der Statistik von großer Bedeutung.

6.2 Was ist ein Integral?

Wir suchen eine Funktion, die uns den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse innerhalb eines Intervalls $[a,b]$ wiedergibt. Die Fläche unterhalb der x-Achse wird dabei negativ gezählt. Diese Funktion heißt das **Integral** Integral

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

der Funktion f.

Das Integral kann durch Approximation der Funktion f durch Treppenfunktionen näherungsweise berechnet werden (☞ Abb. 6.1). Die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke lassen sich gemäß der bekannten Formel *Grundlinie* × *Höhe* leicht berechnen. Die Gesamtfläche unter der Treppenfunktion ergibt sich dann als Summe dieser Teilflächen. Diese Approximation wird umso genauer sein, je mehr Rechtecke verwendet werden. Im Grenzübergang zu unendlich vielen Rechteecken wird der Fehler dann 0. Tatsächlich ist das sogenannte *Riemann-Integral* auf diese Weise definiert.

Abbildung 6.1: Approximation des Integrals durch eine Treppenfunktion

Für praktische Zwecke ist dieser Zugang jedoch nicht geeignet. Für *stetige* Funktionen gibt es jedoch folgenden wichtigen Zusammenhang mit Stammfunktionen:

Sei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt für das *Integral*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

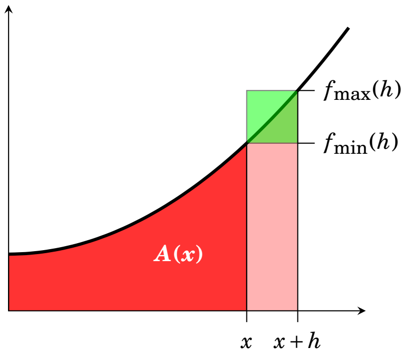
Beispiel 6.7

Wir suchen das Integral der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0,1]$.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3\right) = \frac{1}{3}$$

Bemerkung 6.2
Dieser Zusammenhang zwischen *Stammfunktion* (Umkehrung des Differenzierens) und *Integral* (Fläche unter einer dem Graphen) ist eine Konsequenz des sogenannten *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*. Er besagt, dass wir zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen genauso vorgehen dürfen, wie wir es in Schule gelernt haben.

Dieser Zusammenhang kann folgendermaßen plausibel gemacht werden:
Wir bezeichnen mit $A(x)$ die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse zwischen 0 und x.



Die Fläche zwischen x und $x+h$ unter dem Graphen ist gerade $A(x+h)-A(x)$ und kann durch $f_{\min}\cdot h$ und $f_{\max}\cdot h$ abgeschätzt werden:

$$f_{\min}(h)\cdot h \le A(x+h)-A(x) \le f_{\max}(h)\cdot h$$

Dividieren durch h ergibt

$$f_{\min}(h) \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le f_{\max}(h)$$

Durch den Grenzübergang $h \to 0$ erhalten wir wegen der Stetigkeit von f,

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} f_{\min}(h)}_{=f(x)} \le \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}}_{=A'(x)} \le \underbrace{\lim_{h\to 0} f_{\max}(h)}_{=f(x)}$$

und somit

$$A'(x) = f(x)$$

d.h. $A(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Bemerkung 6.3
Dieser Satz ist der Grund, warum die Stammfunktion auch als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet wird. Das Integral selbst heißt dann dass *bestimmte Integral*.

Wir können die Integrationsverfahren für die Stammfunktionen (☞ Tab. 6.2) direkt zur Berechnung von Integralen verwenden (☞ Tab. 6.3).

Beispiel 6.8
Gesucht ist das Integral von $f(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$ im Intervall $[e, 10]$:

$$\int_e^{10} \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\ln(10)} \frac{1}{z}\,dz = \ln(z)\Big|_1^{\ln(10)} = \ln(\ln(10)) - \ln(1) \approx 0{,}834$$

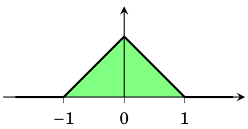
$$z = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{x}\,dx$$

Tabelle 6.3: Integrationsverfahren (Teil 2)

Bezeichnung	Verfahren
Summenregel	$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$
Partielles Integrieren	$\int_a^b f \cdot g'\, dx = f \cdot g\Big\|_a^b - \int_a^b f' \cdot g\, dx$
Substitution	$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\, dz$ mit $z = g(x)$ und $dz = g'(x)\, dx$

Beispiel 6.9
Gesucht ist $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ und } x \ge 1 \end{cases}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\, dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx + \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{0} (1+x)\, dx + \int_{0}^{1} (1-x)\, dx + \int_{1}^{2} 0\, dx \\ &= (x + \frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{0} + (x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

6.3 Was ist ein uneigentliches Integral?

uneigentliches Integral

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen

- das Integrationsintervall unbeschränkt ist (☞ Abb. 6.2, links), oder
- die Funktion unbeschränkt ist (☞ Abb. 6.2, rechts), d.h.die Funktion wird unendlich, oder
- die Intervallgrenzen nicht im Definitionsbereich der Funktion liegen.

In diesem Fall müssen wir das Integral mit Hilfe eines Grenzwertes berechnen. Falls f in b nicht definiert ist, oder $b = \infty$, so ist das entsprechende Integral definiert durch

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\, dx = \lim_{t \to b} (F(t) - F(a))}$$

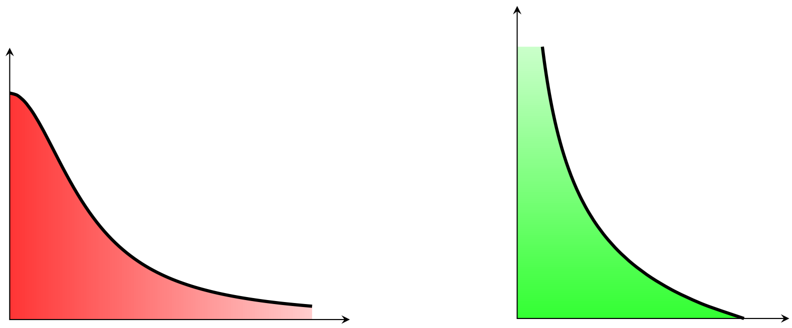


Abbildung 6.2: Die uneigentlichen Integrale $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ (links) und $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (rechts)

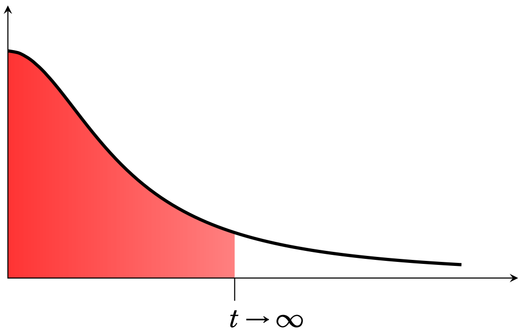


Abbildung 6.3: $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\,dx$

Beispiel 6.10
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist in $x = 0$ nicht definiert. Wir fassen daher $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ als Abkürzung für $\lim\limits_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ auf.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0}(2-2\sqrt{t}) = 2$$

Beispiel 6.11

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} - (-1) = 1$$

Uneigentliche Integrale existieren nur, falls der entsprechende Grenzwert existiert.

Beispiel 6.12

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln(x)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln(t) - \ln(1) = \infty$$

Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ existiert somit nicht.

— Übungen

130. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) x^3 (b) $\frac{3}{x^2}$ (c) $\sqrt{x^3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(e) e^{2x} (f) 2^{3x} (g) $\frac{1}{2x}$ (h) 5

(i) $\sin(\pi x)$ (j) $\cos(2\pi x)$

131. Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen:

(a) $x^4 + 2x^2 - x + 3$ (b) $x^3 + 7x + \frac{6}{x+1}$ (c) $e^x + x^e + e + x$

(d) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ (e) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$

132. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

(a) $\int x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}\,dx$ (b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

(c) $\int \frac{2}{x}\,dx$ (d) $\int \sin(x) - 3\cos(x)\,dx$

133. Ermitteln Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen durch partielle Integration:

(a) $f(x) = 2x\,e^x$ (b) $f(x) = x^2\,e^{-x}$ (c) $f(x) = x\ln(x)$

(d) $f(x) = x^3\ln x$ (e) $f(x) = x(\ln(x))^2$ (f) $f(x) = x^2\sin(x)$

134. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen durch Anwendung der Substitutionsregel:

(a) $\int x\,e^{x^2}\,dx$ (b) $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$ (c) $\int \frac{x}{3x^2+4}\,dx$

(d) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ (e) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ (f) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(g) $\int \sqrt{x^3+1}\,x^2\,dx$ (h) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$ (i) $\int \frac{x^2-x+1}{x-3}\,dx$

(j) $\int x(x-8)^{\frac{1}{2}}\,dx$

135. Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\int \frac{3x^2+4}{x}\,dx$ (b) $\int e^{2x}\ln(e^x)\,dx$ (c) $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$

(d) $\int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ (e) $\int e^{3x+2}\,dx$ (f) $\int \frac{2x+3}{9-4x^2}\,dx$

(g) $\int \frac{e^{2x}}{e^{5-x}}\,dx$ (h) $\int t\,e^{t^2}\,dt$ (i) $\int \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$

(j) $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$

136. Suchen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x}}$ (b) $f(x) = (x^2-1)^2$

(c) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}}{x}$ (d) $f(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x})(2x+\frac{1}{x})}{x^2}$

(e) $f(x) = x^2(x^2+x^4+1)$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

137. Berechnen Sie:

$\int \tan(x)\,dx$ (Hinweis: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

138. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 30 - 0{,}05x$. Wie lautet die Kostenfunktion, wenn die Fixkosten 2000 GE betragen?
(Hinweis: Gesucht ist jene Stammfunktion $C(x)$ von $C'(x)$ mit $C(0) = 2000$.)

139. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 24 - 0{,}03x + 0{,}006x^2$. Die Gesamtkosten von 200 Stück sind 22 700 GE. Wie lautet die Kostenfunktion, wie groß sind die Fixkosten, und wie hoch sind Gesamtkosten von 500 Stück?

140. Der Grenzertrag eines Produktionsunternehmens ist $R'(x) = 4 - 0{,}01x$. Wie lautet die Erlösfunktion?

141. Die Grenzkosten betragen $C'(x) = 10 - 0{,}1x + 0{,}003x^2$. Die Gesamtkosten von 100 Stück betragen 2500 GE. Bestimmen Sie $C(x)$. Wie groß sind die Fixkosten?

142. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, wobei die Funktion $f(x)$ stückweise konstant ist (Treppenfunktion) und gegeben ist durch

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < 0{,}2 \\ 0{,}5 & \text{für } 0{,}2 \le x < 0{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für } 0{,}5 \le x < 0{,}6 \\ 3{,}5 & \text{für } 0{,}6 \le x < 0{,}7 \\ -3{,}5 & \text{für } 0{,}7 \le x \le 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } 0 \le x < 0{,}3 \\ 0{,}5 & \text{für } 0{,}3 \le x < 0{,}5 \\ -1{,}5 & \text{für } 0{,}5 \le x < 0{,}8 \\ 1{,}5 & \text{für } 0{,}8 \le x < 0{,}9 \\ 2{,}5 & \text{für } 0{,}9 \le x \le 1 \end{cases}$

143. Die Funktion f sei stetig und linear in den Intervallen $[0,2]$, $[2,6]$ und $[6,10]$. Außerdem sei $f(0) = 0$, $f(2) = 5$, $f(6) = 2$ und $f(10) = -5$.
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

144. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_1^4 2x^2 - 1\,dx$ (b) $\int_0^2 3e^x\,dx$ (c) $\int_1^4 3x^2 + 4x\,dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{-\sin(x)}{3}\,dx$ (e) $\int_0^1 \dfrac{3x+2}{3x^2+4x+1}\,dx$

145. Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+3)^4\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^2 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ (f) $\displaystyle\int_0^3 (x-1)^2 x\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x\exp(x)\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^2 x^2\exp(x)\,dx$ (i) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$

146. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty -e^{-3x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx$

147. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\,dx$

Hinweis zu (d): $\int \ln(x)\cdot(1+x)^{-2}\,dx$ partiell integrieren; beachte, dass $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}$.

148. Existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

149. Für welche Werte von $\alpha\in\mathbb{R}$ konvergieren die folgenden uneigentlichen Integral? Wie lautet das Ergebnis?

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha\,dx$

150. Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ ist eine Erweiterung der Fakultätsfunktion auf alle positiven reellen Zahlen. Sie ist definiert als

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\,.$$

Zeigen Sie mittels partiellem Integrieren, dass

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)\,.$$

Kleines Wörterbuch

	Deutsch	English	Français	Русский
	A			
1	**Abbildung**	mapping	application	отображение
2	**wird abgebildet auf**	maps to		отображать
3	**abgeschlossen**	closed	fermé	замкнутый
4	**abhängig** (Variable)	dependent	dépendante	зависимый
5	**ableiten** (differenzieren)	differentiate	dériver	дифференцировать
6	**Ableitung**	derivative	dérivée	производная
7	**Absolutbetrag**	absolute value	valeur absolue	абсолютная величина
8	**addieren**	add	adder	адаптированный базис прибавлять
9	**Addition**	addition	addition	сложение
10	**algebraische Gleichung**	algebraic equation	équation algébraique	алгебраическое уравнение
11	**alternierende Folge**	alternating sequence	séquence alternée	чередующаяся последовательность
12	**Anstieg (Steigung)**	slope		наклон
13	**Äquivalenz**	equivalence	éqivalence	равнозначность, эквивалентность
14	**äquivalent**	equivalent	équivalent	равноценный, эквивалентный
15	**Argument**	argument	argument	аргумент
16	**arithmetische Folge**	arithmetic sequence	suite arithmétique	арифметический ряд
17	**arithmetische Reihe**	arithmetic series	séri arithmétique	арифметическая прогрессия
18	**arithmetisches Mittel**	arithmetic mean	moyenne arithmétique	среднее арифметическое
19	**Assoziativegesetz**	associative law	permutabilité de deux lois externes	закон ассоциативности
20	**Aufzinsungsfaktor**	growth factor	facteur $(1+r)$ ou r est le taux	множитель $(1+r)$ в формуле $A=P(1+r)^n$
21	**Aussage**	sentence, proposition	proposition	высказывание
22	**Aussagenlogik**	propositional calculus	calcul des propositions	исчисление высказываний
23	**Axiom**	axiom	axiome	аксиома
	B			
24	**Barwert** (einer Rente)	cash equivalent, net present value		
25	**Basis** (einer Potenz)	base, radix	base	базис, основание
26	**beschränkt**	bounded, limited		ограниченный

	Deutsch	English	Français	Русский
27	**beschränkte Folge**	bounded sequence	suite borné	ограниченная последовательность
28	**bestimmt divergente Folge**	properly divergent sequence	suite simplement divergente	собственно расходящаяся последовательность
29	**bestimmtes Integral**	definite integral	intégrale définie	определенный интеграл
30	**Beweis**	proof	démonstration	доказательство
31	**beweisen**	prove, demonstrate, verify, show	démontrer	доказывать
32	**bijektiv**	one-to-one	bijective	биективный
33	**Bild** (einer Funktion)	image	image	образ
34	**Bildungsgesetz**	law of formation	loi de formation	закон образования
35	**Billiarde**	quadrillion		квадрильон
36	**Billion**	trillion	billion	триллион
37	**Binomialkoeffizient**	binomial coefficient	coefficient binomial	биномиальный коэффициент
38	**binomischer Lehrsatz**	binomial theorem	formule du binôme	формула бинома
39	**Bruch**	fraction	fraction	дробь
40	**Bruchstrich**	fraction bar	barre de fraction	черта дроби
41	**Bruchzahl**	fractional number, fraction	nombre fractionnaire	дробное число
	D			
42	**definieren**	define	définir	определять
43	**Definition**	definition	définition	определение
44	**Definitionsbereich**	domain	domaine	область определения
45	**Definitionsmenge**	domain	domaine	множество определения
46	**dekadischer Logarithmus**	common logarithm	logarithme décimal	десятичный логарифм
47	**Dezimaldarstellung**	decimal representation	notation décimale	представление в десятичной системе
48	**Dezimalpunkt**	decimal point	virgule (décimale)	(десятичная) запятая
49	**Dezimalzahl**	decimal (number)	nombre décimal	десятичное число
50	**diagonal**	diagonal	diagonal	диагональ
51	**Differentialquotient**	differential quotient	quotient différentiel	производная
52	**Differentialrechnung**	calculus	calcul différentiel	дифференциальное исчисление
53	**Differenz**	difference	différence	разность
54	**Differenzenquotient**	difference quotient	quotient des différences	разностное отношение
55	**differenzierbar**	differentiable	dérivable	дифференцируемый
56	**differenzieren** (einer Funktion)	differentiate	dériver	дифференцировать
57	**disjunkt**	disjoint	disjoint	дисъюнктный
58	**diskontieren**	discount	escompter	дисконтировать
59	**Distributivgesetz**	distributive law	loi distributive	дистрибутивный закон
60	**divergent**	divergent	divergent	расходящаяся
61	**divergente Folge**	divergent sequence	suite divergente	расходящаяся последовательность
62	**Dividend**	dividend	dividende	делимое
63	**dividieren**	divide	diviser	делить
64	**Division**	division	division	деление
65	**Divisor**	divisor	diviseur	делитель
66	**Doppelbruch**	compound (complex) fraction	fraction complexe (double)	сложная дробь
67	**dreidimensional**	three-dimensional	á trois dimensions (tridimensionnel)	трехмерный
68	**Dreieck**	triangle	triangle	треугольник
69	**dreieckig**	triangular	triangulaire	треугольный

	Deutsch	English	Français	Русский
70	a **durch** b ($\frac{a}{b}$)	a over b		a разделить на b
71	**Durchschnitt** (von Zahlen)	average	moyenne	среднее
72	**Durchschnitt** (von Mengen)	intersection	intersection	пересечение
	E			
73	**Ebene**	plane	plan	плоскость
74	**Eckpunkt** (eines Vielecks)	vertex, corner	sommet, coin	вершина
75	**Eigenschaft**	property	propriété	свойство
76	**eindeutig**	unique, single-valued		единстбенный, однозначный
77	**Einheitsfunktion**	identity function	fonction identité	тождественная функция
78	**Einheitskugel**	unit sphere	sphère unitaire	единичный шар
79	**Element** (einer Menge)	element	élément	элемент
80	**elementar**	elementary	élémentaire	элементарный
81	**Ellipse**	ellipse	ellipse	эллипс
82	**endlich**	finite	fini	конечный
83	**Endwert** (einer Rente)	accumulation		накопительная стоимость
84	**erste Ableitung**	first derivative	dérivée première	первая производная
85	**erweitern** (eines Bruches)	reduce a fraction in higher terms		
86	**Eulersche Zahl**	Euler's constant	constante d'Euler	постоянная Эйлера
87	**ewige Rente**	perpetual annuity		
88	**existieren**	exist		существовать
89	**Exponent**	exponent	exposant	показатель степени
90	**Exponentialfunktion**	exponential function	fonction exponentielle	показательная функция, экспоненциальная функция
91	**Extremum**	extremum	extrémum	экстремум
92	**Extremwert**	extreme value	valeur extrême	экстремальное значение
	F			
93	**Faktor**	factor	facteur	фактор
94	**faktorisieren**	factor, factorize		
95	**Fakultät** (einer Zahl)	factorial	factorielle	факториал
96	**Festkommaformat**	fixed point representation		
97	**Fläche**	surface	surface	поверхность
98	**Flächeninhalt**	area	aire	площадь
99	**Folge**	sequence	suite	последовательность
100	**Fünfeck**	pentagon		пятиугольник
101	**Funktion**	function	fonction	функция
	G			
102	**ganze Zahl**	integer	nombre entier	целое число
103	**Geometrie**	geometry	géométrie	геометрия
104	**geometrische Folge**	geometric progression	progression (suite) géométrique	геометрическая прогрессия
105	**geometrische Reihe**	geometric series	série géométrique	геометрический ряд
106	**geometrisches Mittel**	geometric mean	moyenne géométrique	среднее геометрическое
107	**Gerade**	(straight) line	droite	прямая
108	**gerade (Zahl)**	even (number)	(nombre) paire	четное число
109	**gleich**	equal, equivalent	égal	равный
110	**Gleichheitszeichen**	equals sign	signe d'égalité	знак (символ) равенства

	Deutsch	English	Français	Русский
111	**gleichseitiges Dreieck**	equilateral triangle	triangle équilatéral	равносторонний треугольник
112	**gleichsetzen**	equate	poser égal	приравнять
113	**Gleichung**	equation	équation	уравнение
114	**Gleichungssystem**	system of equations	système d'équations	система уравнений
115	**Gleitkommaformat**	floating point representation		
116	**Glied** (einer Folge)	term (of a sequence)	terme	член
117	**global**	global	global	глобальный
118	**globales Maximum**	global maximum	maximum global	глобальный максимум
119	**Grad**	degree	degré	степень; градус
120	**Graph**	graph, diagram	graphe	график
121	**graphisch**	graphic(al)	graphique	графический
122	**Grenzkosten**	marginal cost		предельные издержки
123	**Grenznutzen**	marginal utility		предельная полезность
124	**Grenzübergang**	take the limit, limiting process	passage à la limite	предельный переход
125	**Grenzwert**	limit	limite	предел
126	**Grundfläche, Basis**	base	base	основание
127	**Grundmenge**	fundmental set	ensemble fondamental	основное множество
	H			
128	**herausheben** (eines Faktors)	factor out		
129	**herleiten**	derive, deduce		выводить
130	**Hilfsvariable**	auxiliary variable	variable auxiliare	вспомогательная переменная
131	**hinreichende Bedingung**	sufficient condition	condition suffisante	достаточное условие
132	x **hoch** n (x^n)	x (raised) to the power n, x to the n-th power	x puissance n, puissance n-e de x	x в стелени n
133	**Hyperbel**	hyperbola	hyperbole	гипербола
	I			
134	**identisch**	identical	identique	тождественный
135	**Implikation**	implication	implication	импликация
136	**implizit**	implicit	implicite	неявный
137	**injektiv**	one-to-one	injective	инъективный
138	**Integral**	integral	intégral	интеграл
139	**Integralrechnung**	integral calculus	calcul intégral	интегральное исчисление
140	**Integralzeichen**	integral sign	signe d'intégration	знак интегрирования
141	**Integrationskonstante**	integration constant	constante d'intégration	постоянная интегрирования
142	**Integrationsverfahren**	method of integration		
143	**integrieren**	integrate		интегрировать
144	**Intervall**	interval	intervalle	интервал
145	**inverse Funktion**	inverse function	fonction inverse	обратная функция
146	**irrationale Zahl**	irrational (number)	nombre irrationnel	иррациональное число
	K			
147	**Kehrwert**	reciprocal (value)	valeur inverse	обратное значение
148	**Klammer**	bracket, parenthesis, brace	parenthèse	скобка
149	**Kommutativgesetz**	commutative law	loi commutative	закон коммутативности
150	**Komplement** (einer Menge)	complement	complémentaire	дополнение
151	**Komplementärmenge**	complementary set	enemble complémentaire	дополнительное множество

	Deutsch	English	Français	Русский
152	**komplexe Zahl**	complex number	nombre complexe	комплексное число
153	**Konjunktion**	conjunction	conjonction	конъюнкция
154	**konkav**	concave	concave	вогнутый
155	**Konstante**	constant	constante	постоянная, константа
156	**konvergent**	convergent	convergente	сходящийся
157	**konvergente Folge**	convergent sequence	suite convergente	сходящаяся последовательность
158	**konvergieren**	converge, be convergent	converger	сходиться
159	**konvex**	convex	convexe	выпуклый
160	**Koordinate**	coordinate	coordonnée	координата
161	**Koordinatenachse**	coordinate axis	axe coordonnées	координатная ось
162	**Kostenfunktion**	cost function	fonction coût	функция издержек
163	**Kredit**	credit		
164	**Kreis**	circle	cercle	окружность
165	**Kreisscheibe**	disk	disque	круг
166	**kritischer Punkt**	critical point	point critique	особая точка
167	**Krümmung**	curvature	courbure	кривизна
168	**Kugel**	sphere	sphère, boule	шар
169	**Kugeloberfläche**	spherical surface	surface sphèrique	сфера, поверхность шара
170	**Kurve**	curve	courbe	кривая
171	**kürzen** (eines Bruches)	reduce, cancel		сокращать (дробь)
	L			
172	**leere Menge**	empty set, null set	ensemble vide	пустое множество, нуль-множество
173	**Limes**	limit	limite	предел
174	**linear**	linear	linéaire	линейный
175	**lineare Funktion**	linear function	fonction linéaire	линейная функция
176	**lineare Gleichung**	linear equation	équation linénaire	линейное уравнение
177	**lineare Ungleichung**	linear inequality	inéquation linéaire	линейное неравенство
178	**Linearfaktor**	linear factor		
179	**linksseitiger Grenzwert**	limit on the left	limite à gauche	предел слева
180	**logarithmieren**	take the logarithm		
181	**Logarithmus**	logarithm	logarithme	логарифм
182	**Logarithmusfunktion**	logarithmic function	fonction logarithmique	логарифмическая функция
183	**Logik**	logic		логика
184	**lokal**	local	local	локальный
185	**lokales Maximum**	local maximum	maximum local	локальный максимум
186	**Lösung**	solution	solution	решение
187	**Lösungsmenge**	solution set	ensemble des solutions	множество решений
	M			
188	**Mantisse**	mantissa	mantisse	мантисса
189	a **mal** b ($a \cdot b$)	a times b		a умножить на b
190	**marginale Kosten**	marginal cost		
191	**Mathematik**	mathematics		математика
192	**Maximum**	maximum	maximum	максимум
193	**Mediane**	median	médiane	медиана
194	**Menge**	set	ensemble	множество
195	**Mengenlehre**	set theory	théorie des ensembles	теория множеств
196	**Milliarde**	billion (Am.)		миллиард
197	**Million**	million		миллион

	Deutsch	English	Français	Русский
198	**Minimum**	minimum	minimum	минимум
199	**minus**	minus		минус
200	**Mittel**	mean	moyenne	среднее
201	**Mittelwert**	mean (value), average	valeur moyenne	среднее значение
202	**Monom**	monomial	monôme	одночлен, моном
203	**monoton fallend**	monotonically decreasing	monotone décroissante	монотонно убывающий
204	**monoton steigend**	monotonically increasing	monotone croissante	монотонно возрастающий
205	**Multiplikation**	multiplication	multiplication	умножение
206	**multiplizieren (mit)**	multiply (by)	(par)	умножать (на)
	N			
207	**natürliche Zahl**	natural number	(nombre) entier naturel	натуральное (число)
208	**natürlicher Logarithmus**	natural logarithm	logarithme naturel	натуральный логарифм
209	**Nebenrechnung**	auxiliary calculation	calcul auxiliaire	вспомогательное вычисление
210	**Negation**	negation	négation	отрицание
211	**Nenner** (eines Bruches)	denominator	dénominateur	знаменатель
212	**notwendige Bedingung**	necessary condition	condition nécessaire	необходимое условие
213	**Nullfolge**	null sequence	suite convergeant vers zéro	нулевая последовательность
214	**Nullstelle**	root, zero	zéro	нуль
	O			
215	**Obermenge**	including set, superset	sur-ensemble	надмножество
216	**offen**	open	ouverte	открытый
	P			
217	**Parabel**	parabola	parabole	парабола
218	**parallel**	parallel	parallèle	параллельный
219	**Parallelepiped**	parallelepiped	parallélépipède	параллелепипед
220	**Parallelogramm**	parallelogram	parallélogramme	параллелограмм
221	**Parameter**	parameter	paramètre	параметр
222	**Parameterdarstellung**	parametric representation	représentation paramétrique	параметрическое представление
223	**Partialsumme**	partial sum	somme partielle	частичная сумма
224	**partielle Integration**	integration by parts	intégration par parties	интегрирование по частям
225	**periodische Zahl**	periodical decimal	nombre décimal périodique	периодическая десятичная дробь
226	**plus**	plus	plus	плюс
227	**Polynom**	polynomial	polynôme	многочлен, полином
228	**Potenz**	power	puissance	степень
229	**Potenzfunktion**	power function	fonction puissance	степенная функция
230	**Potenzieren**	raising to a power, exponentiation	élévation à une puissance, exponentiation	возведение в степень, потенцирование
231	**Probe** (einer Gleichung)	check	preuve	проверка
232	**Produkt**	product	produit	произведение
233	**Produktmenge**	product set	ensemble produit	множество-произведение
234	**Punkt**	point	point	точка
235	**Pyramide**	pyramid		пирамида
	Q			
236	**Quader**	rectangular solid	cuboïd	кубоид, кирпич, брус

	Deutsch	English	Français	Русский
237	**Quadrat** (Viereck)	square		квадрат
238	**Quadrat** (Potenz)	square, second power		квадрат, вторая степень
239	**quadratische Gleichung**	quadratic (equation)	équation quadratique	квадратичное уравнение
240	**Quadratwurzel**	square root	racine carrée	квадратный корень
241	**quadrieren**	square, raise to the second power	élever au carré, carrer	возводить в квадрат
242	**Quotient**	quotient	quotient	частное
	R			
243	**Radius**	radius	rayon	радиус
244	**rationale Funktion**	rational function	fonction rationnel	рациональная функция
245	**rationale Zahl**	rational (number)	(nombre) rationnel	рациональное число
246	**rationaler Ausdruck**	rational term		
247	**Raum**	space	espace	пространство
248	**rechnen**	calculate, compute		считать, вычислять
249	**Rechteck**	rectangle	rectangle	прямоугольник
250	**rechtsseitiger Grenzwert**	limit on the right	limite à droite	предел справа
251	**reell**	real	réelle	действительный
252	**reelle Funktion**	real-valued function	fonction réelle	действительная функция, вещественная функция
253	**reelle Zahl**	real (number)	(nombre) réel	действительное число, вещественное число
254	**Regel**	rule	règle, loi	правило
255	**Reihe**	series	série	ряд
256	**Rekursion**	recursion	récursion	рекурсия
257	**Rente**	annuity, rent		
258	**Rentenrechnung**	calculus of annuity		
	S			
259	**Sattelpunkt**	saddle point	point (de) col	точка перевала
260	**Satz**	proposition, theorem	proposition, théorème, loi	теорема, предложение, положение
261	**Seitenfläche**	face	face	грань
262	**Seitenkante**	(lateral) edge	arête latérale	боковое ребро
263	**Sekante**	secant line, intersection line	sécante	секущая
264	**senkrecht**	normal, perpenticular	perpendiculaire	ортогональный
265	**singulärer Punkt**	singular point	singularité	особая точка
266	**Sprungstelle**	jump discontinuity	point de (discontinuité à) saut	точка скачка
267	**Stammfunktion**	antiderivative, primitive	primitive, antidérivée	первообразная
268	**stationärer Punkt**	stationary point	point stationnaire	стационарная точка
269	**Steigung**	slope		наклон
270	**stetig**	continuous	continue	непрерывный
271	**Stetigkeit**	continuity	continuité	непрерывность
272	**Strecke**	line segment	segment linéaire	отрезок прямой
273	**streng monoton fallend**	strictly monotonically decreasing	strictement décroisssante	строго убывающий
274	**substituieren**	substitute		подставлять
275	**Substitution**	substitution	substitution	подстановка, подставление
276	**subtrahieren**	subtract		вычесть
277	**Subtraktion**	subtraction	soustraction	вычитание

	Deutsch	English	Français	Русский
278	**Summe**	sum	somme	сумма
279	**surjektiv**	onto	surjective	сюръективный
280	**Symbol**	symbol, sign	symbole, signe	символ, знак
	T			
281	**Tangente**	tangent (line)	tangente	касательная
282	**Taschenrechner**	calculator		калькулятор
283	**Teiler**	divisor, factor	diviseur	делитель
284	**Teilmenge**	subset	sous-ensemble	подмножество
285	**Teilsumme**	partial sum	somme partielle	частичная сумма
286	**Term**	term	terme, membre	член
287	**Tilgungsformel**	repayment formula	formule de remboursement	формула погашения
288	**Treppenfunktion**	step function	fonction en escalier	ступенчатая функция
	U			
289	**Umfang**	perimeter	périmètre	периметр
290	**Umkehrfunktion**	inverse function	fonction inverse	обратная функция
291	**unabhängig** (Variable)	independent	indépendante	независимый
292	**unbestimmt**	indefinite, indetermined	indéfinie	неопределенный
293	**unbestimmt divergente Folge**	improperly divergent sequence	suite impropre divergente	несобственно расходящаяся последовательность
294	**unbestimmtes Integral**	indefinite integral	intégrale indéfinie	неопределенный интеграл
295	**uneigentliches Integral**	improper integral	intégrale impropre	несобственный интеграл
296	**unendlich**	infinite	infinie	бесконечный
297	**ungerade (Zahl)**	odd (number)	(nombre) impair	нечетное число
298	**Ungleichung**	inequality	inéquation, inégalité	неравенство
299	**Unstetigkeitsstelle**	(point of) discontinuity	point de discontinuité	точка разрыва
300	**Urbild**	inverse image, pre-image	image inverse	прообраз
	V			
301	**Variable**	variable	variable	переменная
302	**Vektor**	vector	vecteur	вектор
303	**Vektorrechnung**	vector calculus	calcul vectoriel	векторное исчисление
304	**Venn-Diagramm**	Venn diagram	diagramme de Venn	диаграмма Эйлера-Венна
305	**Vereinigung** (von Mengen)	join, union (of sets)	réunion	сложение
306	**Vereinigungsmenge**	(set) union	réunion (d'ensembles)	объединение
307	**Verzinsung**	yield of interest		
308	**Vieleck**	polygon	polygone	многоугольник, полигон
309	**Viereck**	quadrangle	quadrangle	четырехугольник
310	**Volumen**	volume	volume	объем
311	**voraussetzen**	assume, suppose		предполагать
312	**Voraussetzung**	assumption	prémisse, assomption	предположение
313	**Vorzeichen**	(algebraic) sign	signe	знак
	W			
314	**Wahrheitswert**	truth value	valeur logique	значение истинности
315	**Wendepunkt**	point of inflection	point d'inflexion	точка перегиба
316	**Wertebereich**	range	ensemble d'arrivée	область значений
317	**Wertemenge**	range	ensemble d'arrivée	множество значений
318	**Wertetabelle**	table of values	table des valeurs	таблица значений
319	**Widerspruch**	contradiction	contradiction	противоречие

	Deutsch	English	Français	Русский
320	**Winkel**	angle	angle	угол
321	**Würfel**	cube	cube	куб
322	**Wurzel**	root, radix	racine	корень
323	**Wurzelfunktion**	root function	fonction de racines	степенная функция с дробным показателем
324	**Wurzelgleichung**	radical equation	équation irrationnelle	иррациональное (алгебраическое) управнение
325	**Wurzelzeichen**	radical sign	signe radical	знак корня
326	**Wurzelziehen**	taking the root	extraction de racine	извлечение корня
	X			
327	***x*-Achse**	x-axis	axe des x	ось абсцисс
328	***xy*-Ebene**	xy-plane	plan des xy	плоскость
	Z			
329	**Zahl**	number	nombre	число
330	**Zahlenebene**	number plane	plan numérique	числовая плоскость
331	**Zähler** (eines Bruches)	numerator	numérateur	числитель
332	**Ziffer**	figure	chiffre	цифра
333	**Zins**	interest	intérêt	процент
334	**Zinsertrag**	interest	produit de l'intérêt	взнос
335	**Zinsenrechnung**	interest calculation	calcul des intérêts	исчисление процентов
336	**Zinssatz**	interest rate	intérêt	процентная ставка
337	**Zuordnungsvorschrift**	rule of assignment	loi de correspondance	правило сопоставления
338	**zusammengesetzte Funktion**	composite function	fonction composée	сложная функция

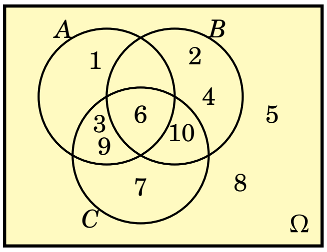
Register zum kleinen Wörterbuch

Die Zahlen beziehen sich auf die Einträge im kleinen Wörterbuch (☞ Seite 98).

Lösungen

Das Verstehen ist ein Sport wie ein anderer. Ein sehr vornehmer Sport und ein sehr kostspieliger.
Der Weg ins Freie
ARTHUR SCHNITZLER (1862–1931)

1. (a) $\{1,3,6,7,9,10\}$; (b) $\{6\}$; (c) $\{1\}$; (d) $\{2,4,5,7,8,10\}$; (e) $\{6,10\}$; (f) $\{2,4,5,8\}$; (g) $\{2,4\}$; (h) $\{5,8\}$; (i) $\{3,6,9\}$.



2. Obermenge Ω ist die Menge aller Einwohner des Wahlbezirks. (a) alle männlichen Wahlberechtigten; (b) alle weiblichen Wahlberechtigten; (c) alle unselbständig beschäftigten Männer; (d) alle nicht pensionierten Wahlberechtigen; (e) alle nicht wahlberechtigten Frauen; (f) alle Männer ($= B$); (g) alle pensionierten Frauen; (h) alle Frauen, die pensioniert oder unselbständig beschäftigt sind.

3. A.

4. (a) $\overline{A} \cap \overline{B}$; (b) A; (c) $\emptyset$; (d) C.

5. (a) keine Teilmenge; (b) keine Teilmenge; da Menge $= \{-11, 11\}$; (c) Teilmenge; (d) keine Teilmenge.

6. (a) keine Abbildung; (b) bijektive Abbildung; (c) Abbildung, weder injektiv noch surjektiv; (d) injektive Abbildung, nicht surjektiv.

7. (a) 1.493×10^0, `1.493 E0`; (b) -1.372×10^2, `-1.372 E2`; (c) -9.729×10^1, `-9.729 E1`; (d) 1.635×10^5, `1.635 E5`; (e) 6.504×10^1, `6.504 E1`; (f) 6.263×10^0, `6.263 E0`; (g) 1.539×10^3, `1.539 E3`; (h) 2×10^{-3}, `2 E-3`; (i) 1×10^2, `1 E2`; (j) -1×10^{-3}, `-1 E-3`; (k) 2.841×10^2, `2.841 E2`.

8. (a) 89 300; (b) −0,000 893; (c) 2,932; (d) −0,002 255; (e) 0,000 001 1; (f) 11,409468, (g) $156250\underbrace{0\ldots0}_{146\text{ Nullen}}$; (h) −2,13; (i) −108 450 000 000; (j) 0,0199; (k) 960,1; (l) 132 550 000 000.

9. (a) $b^5 + ab^4 + a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b + a^5$; (b) $(-2)^{1+2+3+4+5} = (-2)^{15} = -32768$.

10. (a) 2 und 4; (b) 2.

11. (a) $\sum_{i=1}^{n} 2a_ib_i$; (b) 0; (c) $2\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$; (d) $x_0 - x_n$; (e) 0.

12. (a) $4xh$; (b) $a(c-1)$; (c) $\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{xy(x-y)}$; (d) $\frac{2x}{x^2-1}$; (e) $\frac{2}{1-x^2}$; (f) $\frac{1}{xyz}$.

13. (a) $A^3 - B^3$; (b) $2(A^2 + x^2)$; (c) xy; (d) $\frac{1}{st}$; (e) $\frac{(x^2+y)(2x+y)}{(2x+1)2xy}$; (f) $\frac{x(a-b)+a}{x(a+b)+b}$; (g) x.

14. (a) 96; (b) 15; (c) 24; (d) 96; (e) 216; (f) -27.

15. (a) $8xy(x^2 + y^2)$; (b) $2(x^4 + 6x^2y^2 + y^2)$; (c) $x^3(1 - 3x\sqrt{y} + 3x^2y - x^3\sqrt{y^3}$; (d) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$; (e) $27x^3 + 54xy + 36\frac{y^2}{x} + 8\frac{y^3}{x^3}$; (f) $x^4(1 + 4rx + 6r^2x^2 + 4r^3x^3 + r^4x^4$.

16. $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$.

17. (a) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$; (b) $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$; (c) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$; (d) $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$.

18. (a) $x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}$; (b) $x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{6}}$; (c) $x^{\frac{1}{4}} + 2$; (d) $x^{\frac{3}{4}}$; (e) $2x^{\frac{51}{14}}$; (f) $|x|$.

19. (a) $(1 + \frac{y}{\sqrt{x}})^{\frac{1}{3}}$; (b) $\frac{1}{3x-\frac{1}{3}}$; (c) $\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{6}}+3}$; (d) $x + \sqrt{xy} + y$.

20. (a) 1, 2, 4, nicht definiert, 0, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, nicht reell; (b) 2,47712, 4,7712.

21. (a) 10 000; (b) -4; (c) 27; (d) $-\frac{\log_{10}(2)}{4} - \frac{1}{2}$; (e) -3; (f) -4.

22. (a) $y = \frac{1}{10}e^{x\ln 10}$: (b) $y = 16e^{x\ln 4}$; (c) $y = e^{x(\ln 3+\ln 25)}$; (d) $y = e^{x\ln\sqrt{1{,}08}}$; (e) $y = 0{,}9e^{x\,\frac{1}{10}\ln 1{,}1}$; (f) $y = \sqrt{q}\,e^{x\ln\sqrt{2}}$.

23. (a) $g_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$; (b) $g_2(x) = -x^2 + 7x + 8$; (c) $g_3(x) = -3x^3 + x + 8$; (d) $g_4(x) = 7x^2 - 8x + 2$.

24. Alle Polynome 4. Grades mit diesen Nullstellen haben die Form $c(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)$ mit $c \neq 0$. Ein Polynom 4. Grades kann nicht mehr als 4 Nullstellen haben.

25. (a) $(x+1)(x-1)(x+7)$; (b) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$; (c) $2(x+\frac{1}{2})(x-2)(x+5)$.

26. (a) $3\left(x - \frac{9+\sqrt{57}}{6}\right)\left(x - \frac{9-\sqrt{57}}{6}\right)$; (b) $2\left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$; (c) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1+\sqrt{97}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{97}}{2}\right)$; (d) $(x+1)(x+3)$; (e) $5\left(x - \frac{5+\sqrt{145}}{10}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{145}}{10}\right)$; (f) $4\left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$.

27. Die meisten Lösungen erhalten wir durch Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen (☞ S. 24) oder durch Umformen (Faktorisieren) der Gleichungen (in eckigen Klammern [...]).
(a) $x = \frac{y}{y+1}$, $y = \frac{x}{1-x}$, $[x(y+1) = y$ bzw. $y(x-1) = -x]$;
(b) $x = \frac{4y+1}{3y+2}$, $y = \frac{1-2x}{3x-4}$, $[x(3y+2) = 1+4y$ bzw. $y(3x-4) = 1-2x]$;
(c) $x = y-1$ und $x = -y$, bzw. $y = x+1$ und $y = -x$, $[(x-y+1)(x+y) = 0]$;
(d) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$, $[(x+y)\cdot(xy-1) = 0]$;
(e) $x = 2-y$ und $x = -2-y$, bzw. $y = 2-x$ und $y = -2-x$, $[(x+y)^2 = 4]$;
(f) $x = -\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$, bzw. $y = 5-3x$ und $y = -5-3x$, $[(3x+y)^2 = 25]$;
(g) $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$;
(h) $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}$, $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$;
(i) $x = y - 2\sqrt{y} + 1$, $y = x - 2\sqrt{x} + 1$.

28. Die meisten Lösungen erhalten wir durch Umformen der Gleichungen und Einsetzen in die Formel für quadratische Gleichungen (☞ S. 24). In eckigen Klammern [...] stehen Ausdrücke, die durch Umformungen (Faktorisieren) erhalten werden können.
(a) $x = -\frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2y}\sqrt{y^4+24y}$, $y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2x}\sqrt{x^4+24x}$;
(b) $x = -y$ und $x = \frac{1}{y}$, bzw. $y = -x$ und $y = \frac{1}{x}$, $[(x+y)\cdot(xy-1)=0]$;
(c) $x = (1\pm\sqrt{2})y$, $y = \frac{1}{1\pm\sqrt{2}}x$, or equivalently $y = (-1\pm\sqrt{2})x$, $[x^2-2xy-y^2=0]$;
(d) $x \in \mathbb{R}\setminus\{-y, \pm\sqrt{-y}\}$ beliebig falls $y=-1$ und $x=0$ sonst, $y \in \mathbb{R}\setminus\{-x,-x^2\}$ beliebig falls $x=0$ und $y=-1$ sonst, $[x^2(1+y)=0]$;
(e) $x = \frac{1+3y-y^2}{y-1}$, $y = \frac{1}{2}(3-x)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+4(x+1)}$, $[y^2-3y+xy-x-1=0]$;
(f) $x = \frac{y}{y^2-1}$, $y = \frac{1\pm\sqrt{1+4x^2}}{2x}$, $[x(y^2-1)=y$ bzw. $xy^2-y-x=0]$;
(g) $x = -\frac{1}{8}(y+4)\pm\sqrt{\frac{1}{64}(y+4)^2-\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)}$, $y = -2x\pm\sqrt{4x^2+\frac{1}{x+1}}$,
$[4x^2y+4xy+xy^2+y^2-1=0]$;
(h) $x = \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ und $x = y-1$, bzw. $y = 2x-1$ und $y = y+1$, $[(2x-y-1)\cdot(x-y+1)=0]$;
(i) $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}y$ und $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}y$, bzw. $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}x$ und $y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}x$,
$[2x^2+3xy-y^2=0]$.

29. (a) $x = \frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2} \approx 2{,}710$; (b) $x = \frac{\ln 9}{\ln 3+\ln 2} \approx 1{,}2263$; (c) $x = \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2{,}861$;
(d) $x = \frac{\ln 50}{4\ln 10} \approx 0{,}425$; (e) $x = -\frac{\ln 2+4\ln 10}{\ln 0{,}4} \approx 10{,}808$; (f) $x = \frac{\ln 4}{\ln 9-\ln 125} \approx -0{,}527$.

30. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{27}{32}+\frac{\sqrt{217}}{32} \approx 1{,}304$, $x_3 = \frac{27}{32}-\frac{\sqrt{217}}{32} \approx 0{,}383$.

31. $x_1 = 2{,}9$, $x_2 = 2{,}892$, $x_3 = 2{,}89195$.

32. (a) $L = [-1,0]\cup[3,\infty)$; (b) $L = (-1,0)\cup(3,\infty)$; (c) $L = \{1\}$; (d) $L = \mathbb{R}$; (e) $L = \emptyset$; (f) $L = \mathbb{R}$.

33. (a) $(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[\frac{1}{2},\infty)$; (b) $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$; (c) $(-\infty,\frac{22}{5}]\cup(5,\infty)$;
(d) $\left[\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{25}{2}},-1\right)\cup\left(4,\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{25}{2}}\right]$; (e) $(-\frac{13}{2},-4]\cup[3,\frac{11}{2})$; (f) $[-14,-9]\cup[1,6]$.

34. (a) $[-\frac{2}{3},0]$; (b) $[\frac{1}{4},2]$; (c) $\emptyset$; (d) $(-2,-1]$.

35. (a) $\langle 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\rangle$; (b) $\langle\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{1}{12}\rangle$;
(c) $\langle 2{,}718; 4{,}113; 5{,}652; 7{,}389; 9{,}356; 11{,}582; 14{,}094; 16{,}919; 20{,}086; 23{,}624\rangle$;
(d) $\langle 0{,}368; 0{,}243; 0{,}177; 0{,}135; 0{,}1069; 0{,}0863; 0{,}0710; 0{,}0591; 0{,}0498; 0{,}0423\rangle$;
(e) $\langle 1; 1{,}260; 1{,}442; 1{,}587; 1{,}710; 1{,}817; 1{,}913; 2; 2{,}080; 2{,}154\rangle$;
(f) $\langle 1; 1{,}414; 1{,}442; 1{,}414; 1{,}380; 1{,}348; 1{,}320; 1; 297; 1{,}277; 1{,}259\rangle$;
(g) $\langle -0{,}368; 0{,}243; -0{,}177; 0{,}135; -0{,}107; 0{,}086; -0{,}071; 0{,}0591; -0{,}0498; 0{,}0423\rangle$;
(h) $\langle 0{,}667; 0{,}846; 1{,}193; 1{,}778; 2{,}743; 4{,}340; 6{,}996; 11{,}448; 18{,}963; 31{,}733\rangle$.

36. (a) $\langle 2,6,12,20,30\rangle$; (b) $\langle 0{,}333; 0{,}583; 0{,}783; 0{,}95; 1{,}093\rangle$;
(c) $\langle 1{,}072; 2{,}220; 3{,}452; 4{,}771; 6{,}185\rangle$; (d) $\langle 0{,}368; 0{,}611; 0{,}788; 0{,}923; 1{,}030\rangle$;
(e) $\langle 1; 2{,}260; 3{,}702; 5{,}290; 7{,}000\rangle$; (f) $\langle -1; -0{,}5; -0{,}833; -0{,}583; -0{,}783\rangle$;
(g) $\langle -0{,}368; -0{,}125; -0{,}302; -0{,}166; -0{,}273\rangle$;
(h) $\langle 0{,}667; 1{,}067; 1{,}289; 1{,}407; 1{,}467\rangle$.

37. (a) 565; (b) −36; (c) 35; (d) 210.

38. (a) 7; (b) $\frac{2}{7}$; (c) unbestimmt divergent; (d) bestimmt divergent gegen ∞; (e) 0.

39. (a) unbestimmt divergent; (b) 0; (c) $e^2 \approx 7{,}38906$; (d) $e^{-2} \approx 0.135335$; (e) 0; (f) 1;
(g) bestimmt divergent gegen $+\infty$; (h) 0.

40. (a) 0; (b) $\frac{29}{6}$; (c) 0.

41. (a) e^x; (b) e^x; (c) $e^{1/x}$.

42. $a_n = 2\cdot 1{,}1^{n-1}$; $a_7 = 3{,}543$.

43. $a_1 = 12 \cdot 0{,}7^{-6} = 102$; $a_n = 102 \cdot 0{,}7^{n-1}$.

44. $\langle s_n \rangle = \left\langle \frac{n(n-1)}{2} \right\rangle = \langle 0,1,3,\ldots,45 \rangle$ bzw. $\langle s_n \rangle = \langle n^2 \rangle = \langle 1,4,9,\ldots,100 \rangle$.

45. (a) $s_7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^7-1}{3-1} = 364{,}33$; (b) $s_7 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1/4)^7-1}{-1/4-1} = -0{,}400$; (c) $s_{10} = 110 \cdot \frac{1{,}1^{10}-1}{1{,}1-1} = 1753{,}12$; (d) $s_\infty = 0{,}95 \cdot \frac{1}{1-0{,}95} = 19$.

46. Relative Wachstumsrate $q = \sqrt[15]{\frac{5}{4}} = 1{,}015$, verdoppelt im Jahre 2007.

47. (a) $180\,000 \cdot \frac{1{,}06^{21}-1}{1{,}06-1} = 7\,198\,690{,}77$; (b) $\frac{21}{2}(2 \cdot 180\,000 + 20 \cdot 12\,000) = 6\,300\,000$.

48. $12\,000 \cdot 1{,}06^5 = 16\,058{,}71$.

49. $p = q - 1 = \sqrt[15]{3} - 1 = 7{,}6\%$.

50. $q^8 = 1{,}05^{10} \Rightarrow p = q - 1 = 1{,}05^{\frac{10}{8}} - 1 = 6{,}29\%$, Endwert $= 1{,}629 \times$ Startkapital.

51. 1982: $73\,792{,}43 \cdot 1{,}03^{-7} = 60\,000$, 2000: $73\,792{,}43 \cdot 1{,}03^{11} = 102\,145{,}98$.

52. $100\,000 \le R \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{10}-1}{1{,}05-1} \Rightarrow R \ge 7571{,}86$.

53. (a) $B_n = 18\,215{,}83$, $E_n = 50\,258{,}04$; (b) $28\,571{,}43$; (c) 20 Jahre.

54. (a) $17\,529{,}42$; (b) 10 Jahre; (c) $18\,273{,}24$.

55. $100\,000 \cdot 1{,}07^3 \cdot 1{,}035^{-3} = 110\,491{,}86$

56. $100\,000 \cdot (1 + (0{,}05 - 0{,}25 \cdot 0{,}05))^{10} \cdot 1{,}0375^{-10} = 100\,000$.

57. $n \ge (\ln(18\,000) - \ln(18\,000 - 100\,000(1{,}1125 - 1)))/\ln(1{,}1125) = 9{,}2$. Die Laufzeit muss mindestens 10 Jahre betragen.

58. 1 Verzinsungsperiode: $(1 + p)^1 = 1{,}2 \Rightarrow p = 20\%$, 2 Verzinsungsperioden: $(1 + \frac{p}{2})^2 = 1{,}2 \Rightarrow p = 19{,}1\%$, 12 Verzinsungsperioden: $(1 + \frac{p}{12})^{12} = 1{,}2 \Rightarrow p = 18{,}4\%$ (n Verzinsungsperioden: $(1 + \frac{p}{n})^n = 1{,}2$).

59. Der Barwert konvergiert für $n \to \infty$.

60. 1. Angebot: $B = 1\,000\,000$, $E = 1\,000\,000 \cdot 1{,}08^{10} = 2\,158\,925$,
2. Angebot: $B = 2\,000\,000 \cdot 1{,}08^{-10} = 926\,387$, $E = 2\,000\,000$,
3. Angebot: $B = 939\,411$, $E = 2\,028\,119$.

61. $400\,000 = R \cdot \frac{1{,}05^{10}-1}{1{,}05-1} \cdot 1{,}03^{10} + R \cdot \frac{1{,}03^{10}-1}{1{,}03-1} \Rightarrow R = 14\,100{,}64$.

62. $B_\infty = \frac{4500}{1{,}045-1} = 100\,000$.

63. (a) injektiv, nicht surjektiv; (b) injektiv, nicht surjektiv.

64. (a) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(9) = 98$; (b) $(f \circ g)(-9) = f(g(-9)) = f(28) = 839$;
(c) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 2$; (d) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) \approx 3{,}828$.

65. (a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $(f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2(x-1)$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$;
(b) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0,\infty)$; $(f+g)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$, $(f \cdot g)(x) = (x^2+1) \cdot \sqrt{x}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$, $(f \circ g)(x) = x + 1$;
(c) $D_f = [1,\infty)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+2}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{x-1}(x+2)$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - 1}$;
(d) $D_f = [0,\infty)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $(f+g)(x) = 1 + \sqrt{x} + \frac{2x+1}{x+2}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(2x+1)}{x+2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(x+2)}{2x+1}$, $(f \circ g)(x) = 1 + \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$;

(e) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; $(f+g)(x) = (x+1)^2 + \frac{1}{x^2-1}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$, $(f \circ g)(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^2$.

66. (a) $(f\circ g)(x) = (1+x)^2$, $(g \circ f)(x) = 1+x^2$, $D_f = D_g = D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$;
(b) $(f\circ g)(x) = |x|+1$, $(g\circ f)(x) = (\sqrt{x}+1)^2$, $D_f = D_{g\circ f} = [0,\infty)$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$;
(c) $(f\circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$, $(g\circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} + 1$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $D_g = D_{f\circ g} = [0,\infty)$, $D_{g\circ f} = (-1,\infty)$,
(d) $(f\circ g)(x) = 2+|x-2|$, $(g\circ f)(x) = |x|$, $D_f = D_{g\circ f} = [0,\infty)$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$,
(e) $(f\circ g)(x) = (x-3)^2+2$, $(g\circ f)(x) = x^2-1$, $D_f = D_g = D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$;
(f) $(f\circ g)(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}$, $(g\circ f)(x) = 1+x^2$, $D_f = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$,
(g) $(f\circ g)(x) = x^2$, $(g\circ f)(x) = \exp(\ln(x)^2) = x^{\ln x}$, $D_f = D_{g\circ f} = (0,\infty)$, $D_g = D_{f\circ g} = \mathbb{R}$,
(h) $(f\circ g)(x) = \ln(x^3)$, $(g\circ f)(x) = (\ln(x-1))^3+1$, $D_f = D_{g\circ f} = (1,\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_{f\circ g} = (0,\infty)$.

67. $h(12) = f(g(12)) = f(1{,}5764) = 3{,}8059$.

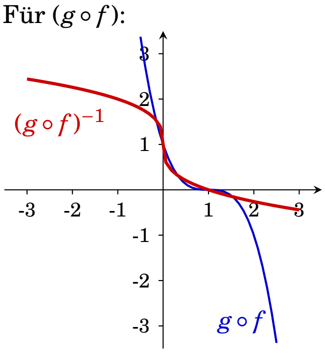
68. (a) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; (b) $(0,2)\cup(2,\infty)$; (c) $[0,\infty)$; (d) $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$;
(e) $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$; (f) $(-\infty,\infty)$; (g) $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$; (h) $(-\infty,\infty)$; (i) $(-\infty,\infty)$.

75. (a) $D_h = \mathbb{R}\setminus\{2\}$; (b) $D_D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; (c) $D_f = [2,\infty)$; (d) $D_F = [\frac{2}{3},\infty)$; (e) $D_g = (\frac{3}{2},\infty)$; (f) $D_G = (-\infty,\frac{3}{2})$; (g) $D_f = [-2,2]$; (h) $D_f = [-3,3]$; (i) $D_g = (-\infty,3)$; (j) $D_f = (-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; (k) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; (l) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$; (m) $D_f = \mathbb{R}$; (n) $D_f = \mathbb{R}$; (o) $D_f = \mathbb{R}$; (p) $D_g = \mathbb{R}$; (q) $D_f = \mathbb{R}$; (r) $D_F = \mathbb{R}$; (s) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$; (t) $D_G = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

77. (a) $\boxed{18}$; (b) $\boxed{11}$; (c) $\boxed{1}$; (d) $\boxed{12}$; (e) $\boxed{9}$; (f) $\boxed{4}$; (g) $\boxed{6}$; (h) $\boxed{16}$; (i) $\boxed{10}$; (j) $\boxed{3}$; (k) $\boxed{8}$; (l) $\boxed{13}$; (m) $\boxed{15}$; (n) $\boxed{5}$; (o) $\boxed{14}$; (p) $\boxed{17}$; (q) $\boxed{2}$; (r) $\boxed{7}$.

78. (a) injektiv, nicht surjektiv, (b) injektiv, nicht surjektiv, (c) bijektiv, (d) nicht injektiv, nicht surjektiv, (e) nicht injektiv, surjektiv, (f) bijektiv. Beachten Sie, dass Definitions- und Wertemenge Bestandteil der Funktion sind.

79. Für $(g\circ f)$:

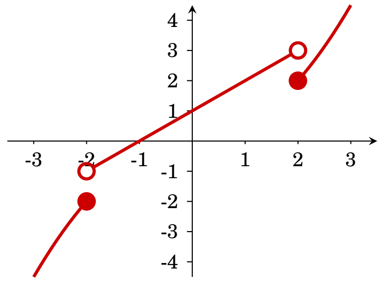


$(g\circ f)(x) = (1-x)^3$,
$(g\circ f)^{-1}(x) = 1-\sqrt[3]{x}$

80. Hier sind die größtmöglichen Intervalle angegeben. Gültige Definitionsmengen sind aber auch alle Teilmengen. (Durch Vereinigung *geeigneter* Teilmengen entstehen unter Umständen auch gültige Definitionsmengen.)
(a) $D = (-\infty,0]$ oder $D = [0,\infty)$; (b) $D = (-\infty,-\frac{3}{2}]$ oder $D = [-\frac{3}{2},0]$ oder $D = [0,\frac{3}{2}]$ oder $D = [\frac{3}{2},\infty)$; (c) $D = (-\infty,-1]$ oder $D = [-1,0]$ oder $D = [0,1]$ oder $D = [1,\infty)$; (d) $D = (1,\infty)$ oder $D = (-\infty,1)$; (e) $D = (-\infty,2]$ oder $D = [2,\infty)$; (f) $D = [0,\infty)$; (g) $D = \mathbb{R}$; (h) $D = (-\infty,0]$ oder $D = [0,\infty)$.

81. (a) $x = -\frac{1}{3}(y+4)$; (b) $x = y+1$; (c) $x = -\frac{5}{2}(p-4)$; (d) $p = \frac{1}{3}q-2$; (e) $x = \frac{1}{3}(y^2+4)$; (f) $x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}$; (g) $x = \sqrt[5]{y}$; (h) $x = y^2$; (i) $x = 4-y^2$.

82.



$\lim\limits_{x\downarrow -2} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\uparrow -2} f(x) = -2, \quad \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existiert nicht;

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1;$

$\lim\limits_{x\downarrow 2} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x\uparrow 2} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht;

f ist stetig in 0 und nicht stetig in -2 und 2.

83. (a) $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$; (b) $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$; (c) $\lim_{x\uparrow 1} x = \lim_{x\downarrow 1} x = 1$.

84. (a) $\frac{1}{2}$; (b) -4; (c) -1; (d) 0; (e) 5; (f) -5; (g) 0; (h) $-\infty$; (i) $-\frac{1}{5}$.

85. (a) 0; (b) 0; (c) ∞; (d) $-\infty$; (e) 1.

86. (a) -2; (b) 0.

87. Die Funktion sind stetig in
(a) D; (b) D; (c) D; (d) D; (e) D; (f) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; (g) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

88. $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -1$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$. Nicht stetig an der Stelle 0. (Daher auch nicht differenzierbar.)

89. $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$. Stetig im Punkt 1, aber nicht differenzierbar.

90. (a) $h = 2$; (b) $h = 0$; (c) $h = \frac{2}{5}$; (d) $h = 2$.

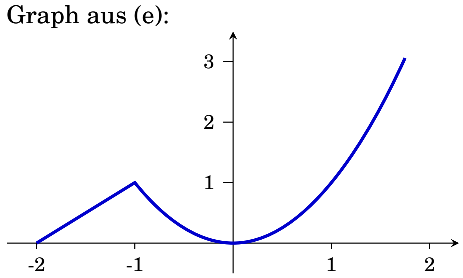
91.

Δx	3	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	21	7	1	4,75	3,31

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1^3+3\,1^2\,h+3\,h^2+h^3-1^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3+3h+h^2 = 3.$

92. Differenzenquotient: (a) $2ax + ah + b$; (b) $2a - 17$; (c) $2a + h + 1$;
(d) $-\frac{6}{(2(x+h)+1)(2x+1)}$.

93. differenzierbar in (a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}$; (c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; (d) $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; (e) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Graph aus (e):



94. Durchschnittliche Wachstumsrate (Differenzenquotient): 0,25,
momentane Wachstumsrate 1958 (Differentialquotient, $x = 8$): 0,26.

95. (a) $\lim_{h\to 0} \frac{(2-5(x+h))-(2-5x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-5h}{h} - 5$;
(b) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(t+h)+1} - \frac{1}{t+1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{\cancel{t}+\cancel{1}-(\cancel{t}+h+\cancel{1})}{(t+h+1)(t+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}}\frac{-\cancel{h}}{(t+h+1)(t+1)} = -\frac{1}{(t+1)^2}$;
(c) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(y+h)^2} - \frac{1}{y^2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-2y-h}{y^2(y+h)^2} = -\frac{2y}{y^4} = -\frac{2}{y^3}$;
(d) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2(t+h)+1} - \frac{1}{2t+1}\right) = \ldots = \frac{-2}{(2t+1)^2}$;
(e) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{y+h+1}{(y+h)^2} - \frac{y+1}{y^2}\right) = \lim_{h\to 0} -\frac{y^2+yh+2y+h}{y^2(y+h)^2} = -\frac{y^2+2y}{y^4} = -\frac{y+2}{y^3}$;
(f) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((x+h+1)^2-(x+1)^2) = \ldots = 2(x+1)$.

96. (a) 0; (b) 1 (die Funktion ist am Rand des Definitionsbereichs nicht differenzierbar); (c) 0; (d) überall differenzierbar.

97. Funktion und erste Ableitung müssen an den Stellen 1 (und -1) für beide Terme übereinstimmen: $a = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{4}$.

98. Die Kostenfunktion ist stetig. Sie ist in 50 nicht differenzierbar.

99. (a) $f'(x) = 27x^2 - 6x^{-\frac{1}{2}}$; (b) $h'(x) = 4x^3 - 4x$; (c) $f'(x) = 12x^3 + 8x - 4$;
(d) $f'(y) = 2 + \frac{7}{y^2}$ (Kürzen!); (e) $g'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}t^{-\frac{5}{2}}$; (f) $g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;
(g) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 0{,}6x^{-1{,}6}$; (h) $f'(x) = -0{,}4x^{-1{,}4} - 0{,}4x^{-0{,}6}$.

100. (a) $6x - 5\sin(x)$; (b) $6x^2 + 2x$; (c) $1 + \ln(x)$; (d) $-2x^{-2} - 2x^{-3}$; (e) $\ln(2)\cdot 2^x$; (f) 1; (g) $18x - 6$; (h) $6x\cos(3x^2)$.

101. (a) $4x - 1$ (Kürzen!); (b) $\frac{3x^2+6x+1}{(x+1)^2}$;
(c) $6e^{3x+1}(5x^2+1)^2 + 40e^{3x+1}(5x^2+1)x + \frac{3(x-1)(x+1)^2-(x+1)^3}{(x-1)^2} - 2$.

102. (a) $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$; (b) $\frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$;
(c) $y'(t) = \frac{t^2-10t+35}{(t-5)^2}$; (d) $y'(u) = \frac{2(u^2-1)}{(u^2+u+1)^2}$;
(e) $x'(u) = -\frac{1}{(\sqrt{u}-1)^2\sqrt{u}}$; (f) $t'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

103. (a) $y'(x) = 21(3x+5)^6$; (b) $y'(t) = -(5-2t)^{-\frac{1}{2}}$; (c) $h'(t) = t(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$;
(d) $x'(y) = 18y^2(y^3+7)^5$; (e) $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+1)^5}$; (f) $g'(x) = \frac{-6x-3}{(x^2+x+1)^4}$; (g) $u'(x) = 6x(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}$;
(h) $F'(x) = (x^2+1)(x^3+3x)^{-\frac{2}{3}}$; (i) $v'(u) = 2(1+u^2)^2(1+3u+7u^2)$.

104. (a) $f'(x) = \frac{(2-x)x}{e^x}$; (b) $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$; (c) $f'(x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$; (d) $f'(x) = -\frac{1}{x+1}$;
(e) $f'(x) = (3ax^2+2bx+c)e^{ax^3+bx^2+cx+d}$; (f) $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$;
(g) $f'(x) = 2\ln(x) + (\ln(x))^2$; (h) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$; (i) $f'(x) = \frac{2\,e^{(\ln(x))^2}\ln(x)}{x}$; (j) $f'(x) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$;
(k) $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2+1} + 2x\ln(x^2+1)$; (l) $f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$; (m) $f'(x) = \left(-2\left(\frac{3}{2}\right)^{x^{-2}}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)x^{-3}$;
(n) $f'(x) = \ln(a)a^x$; (o) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3}\left(1+3x^3\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

105. Gleichung der Tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
(a) $y = 1 - \frac{1}{2}x$; (b) $y = x - 1$; (c) $y = 1 - x$; (d) $y = 1$; (e) $y = 1 + \frac{3}{2}(x-1)$;
(f) $x = -1$ (Achtung: $f'(-1)$ ist existiert nicht (∞)).

106. Gleichung der Tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
(a) $y = x$; (b) $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}(x-1)$; (c) $y = 4 - 2(x+1)$; (d) $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2)$; (e) $y = 0$; (f) $y = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x+1)$.

107. Gleichung der Tangente: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
(a) $y = \frac{5}{2} + 2(x-1)$; (b) $y = 2$; (c) $y = \frac{1}{4}$; (d) $y = x$;
(e) $x = 0$ (Achtung: $f'(-1)$ ist existiert nicht (∞)); (f) $y = \frac{1}{\ln(\frac{1}{2})}x$.

108. $h'(x) = 4e^{2x}(e^{2x}+1)$.

109. (a) $y' = -\frac{1+\ln(x)}{x^2\ln(x)^2}$; (b) $y' = -\frac{e^{-1/(x+1)}(2x+1)}{(x+1)^4}$; (c) $-\frac{2x^2+6x+5}{(x+1)^2(x+2)^2}$; (d) $y' = \frac{3^{1/x}(\ln 3)^2}{x^3}$;
(e) $y' = e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)$; (f) $y' = (4x^2-2)e^{-x^2}$.

110. (a) $f'''(x) = -x(x^4-9x^2+12)e^{-\frac{x^2}{2}}$; (b) $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$; (c) $f''(x) = -\frac{x^4+16x^2-16}{4x^{11/2}}e^{-1/x^2}$;
(d) $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$; (e) $f'''(x) = \frac{3\ln(x)-2}{8x^{5/2}}$; (f) $f''(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$.

111. (a) $f''(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^{5/2}(x+1)^{3/2}}$; (b) $f'''(x) = -\frac{12}{(x-1)^4}$; (c) $f''(x) = \frac{3x^2+18x+11}{4(x-1)^3(x+1)^{3/2}}$;
(d) $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$; (e) $f''(x) = -\frac{6x^4+16x^3+12x^2+2}{(x+1)^3}$; (f) $f'''(x) = 6$; (g) $f''(x) = \frac{6x^2-6x+2}{x^3(x-1)^3}$.

112. (a) $R'(x) = 1 - 0{,}02x$; (b) $R'(x) = 0{,}1 - 0{,}002x - 0{,}000025x^{\frac{3}{2}}$;
(c) $R'(x) = 5 - 0{,}025x^{\frac{3}{2}}$; (d) $R'(x) = 100 - 3\ln(5)x^2 - \frac{7}{2}\ln(5)x^{5/2}$.

113. Durchschnittliche Kosten: $\frac{C(x)}{x}$.
(a) $C'(x) = 30 - 0{,}2x + 0{,}006x^2$, $C''(x) = -0{,}2 + 0{,}012x$, $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = 0{,}004 + \frac{1000}{x^3}$;
(b) $C'(x) = 18 + 0{,}02x - 2\ln(x)$, $C''(x) = 0{,}02 - \frac{2}{x}$, $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = \frac{2}{x^2} + \frac{1000}{x^3}$.

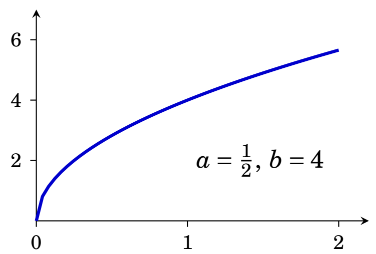
114. (a) konvex; (b) konkav; (c) konkav; (d) konvex falls $\alpha \geq 1$ und $\alpha \leq 0$, konkav falls $0 \leq \alpha \leq 1$.

115. (a) $f(x)$: monoton fallend in $(-\infty,-4]\cup[0,3]$, monoton steigend in $[-4,0]\cup[3,\infty)$. Konvex in $(-\infty,-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{37}}{3}]\cup[-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{37}}{3},\infty)$, konkav in $[-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{37}}{3},-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{37}}{3}]$;
(b) $g(x)$: monoton fallend in $(-\infty,0]\cup[6,\infty)$, monoton steigend in $[0,6]$. Konvex für $x \geq 9$, konkav für $x \leq 9$.

116. Monoton fallend in $[-1,3]$, monoton steigend in $(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$;
Konkav in $(-\infty,1]$, konvex in $[1,\infty)$.

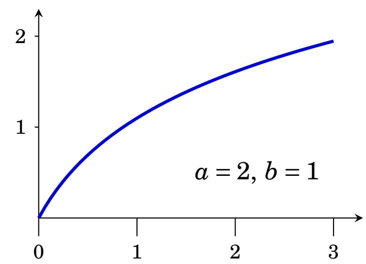
117. (a) fallend in $[2,4]$, steigend in $(-\infty,2]\cup[4,\infty)$,
konkav in $(-\infty,3]$, konvex in $[3,\infty)$;
(b) fallend in $(-\infty,-2]\cup[0,2]$, steigend in $[-2,0]\cup[2,\infty)$,
konkav in $[-\sqrt{\frac{12}{5}},\sqrt{\frac{12}{5}}]$, konvex in $(-\infty,-\sqrt{\frac{12}{5}}]\cup[\sqrt{\frac{12}{5}},\infty)$;
(c) fallend in $[-1,1]$, steigend in $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$,
konkav in $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}]\cup[0,\sqrt{\frac{1}{2}}]$, konvex in $[-\sqrt{\frac{1}{2}},0]\cup[\sqrt{\frac{1}{2}},\infty)$;
(d) fallend in $[\frac{9}{4},\infty)$, steigend in $(-\infty,\frac{9}{4}]$, konkav in $\mathbb{R}$, nirgendwo konvex;
(e) fallend in $(-\infty,0]$, steigend in $[0,\infty)$,
konkav in $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, konvex in $[-1,1]$;
(f) steigend in $\mathbb{R}$, konkav in $(-\infty,0]$, konvex in $[0,\infty)$.

118.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.:
$f''(x) = \underbrace{b\,a}_{>0}\,\underbrace{(a-1)}_{<0}\underbrace{x^{-a-1}}_{>0} < 0$.

119.



Hinweis: Bilden Sie die erste und zweite Ableitung und überprüfen Sie, ob die angegebenen Eigenschaften von der Funktion auch tatsächlich erfüllt werden. Beachten Sie dabei, welche Einschränkungen a und b genügen. Z.B.: $f''(x) = -a^2 b(ax+1)^{-2} < 0$, da $a, b, x > 0$.

120. (a) $x = -\frac{1}{4}$ ist lokales Maximum; (b) $x = 0$ ist lokales Maximum, $x = 1$ ist lokales Minimum; (c) $x = 0$ ist lokales Minimum, $x = -\frac{2}{3}$ ist lokales Maximum; (d) $x = \frac{1}{2}$ ist Minimum ($D = (0, \infty)$); (e) keine stationären Punkte, f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar; (f) $x = \frac{1}{6}$ ist lokales Maximum, $x = 1$ ist lokales Minimum.

121. (a) Lokales Minimum in $x = 3$; (b) Lokales Minimum in $x = 1$, lokales Maximum in $x = -1$; (c) Lokales Maximum in $x = 0$.

122. (a) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum; (b) globales Maximum in $x = \frac{1}{4}$, kein globales Minimum; (c) globales Minimum in $x = 0$, kein globales Maximum; (d) globales Minimum in $x = 1$, kein globales Maximum.

123. (a) Globales Maximum in $x = 12$, globales Minimum in $x = 8$; (b) globales Maximum in $x = 6$, globales Minimum in $x = 3$; (c) globales Maximum in $x = 0$, kein globales Minimum.

124. Globale Maxima in -2 und 2, globale Minima in -1 und 1.

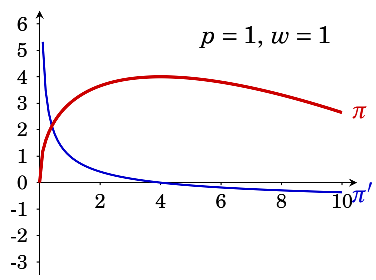
125. Globales Maximum in 3, globales Minimum in 1; die Funktion ist in $[0, 3]$ weder konvex noch konkav.

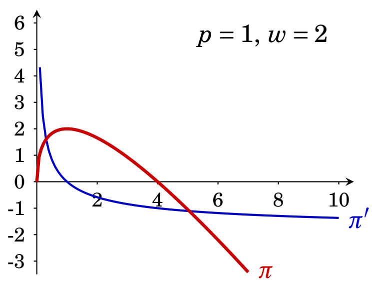
126. (a) globale Maxima in -1 und 2, globales Minimum in $\frac{1}{2}$; (b) globales Maximum in 4, globales Minimum in -3; (c) globale Maxima in $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$, globales Minimum in 1; (d) globales Maximum in $\frac{1}{2}$, globales Minimum in 1; (e) globales Minimum in $\frac{1}{4}$, globales Maximum in 2.

127. (a) globales Maximum in 3, globales Minimum in 1; (b) globales Maximum in 1, globales Minimum in 0; (c) globales Maximum in $\sqrt{2}$, globales Minimum in 0; (d) globales Maximum in 1, globales Minimum in $\frac{7}{2}$; (e) globales Maximum in $\frac{3}{2}$, globales Minimum in 1.

128. Globales Maximum bei 20 Einheiten.

129.





(c) $\pi(x) = 4p\sqrt{x} - wx$. kritische Punkte: $x_0 = 4\frac{p^2}{w^2}$, $\pi''(x) < 0$, $\Rightarrow x_0$ ist Maximum, für $p = 1$ und $w = 1$: $x_0 = 4$; (d) analog, das Maximum ist bei $x = 1$.

130. (a) $\frac{1}{4}x^4 + c$; (b) $-\frac{3}{x} + c$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$; (d) $2\sqrt{x} + c$; (e) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$; (f) $\frac{1}{3\ln(2)}2^{3x} + c$; (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + c$; (h) $5x + c$; (i) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + c$; (j) $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) + c$.

131. (a) $\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+c$; (b) $\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{2}x^2+6\ln|x+1|+c$; (c) $e^x+\frac{1}{e+1}x^{e+1}+e\,x+\frac{1}{2}x^2+c$; (d) $\frac{2}{3}x^{3/2}+2\sqrt{x}+c$; (e) $x^4+x^3+x^2+x+\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+c$.

132. (a) $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{3/2}+c$; (b) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$; (c) $2\ln|x|+c$; (d) $-\cos(x)-3\sin(x)+c$.

133. (a) $2(x-1)e^x+c$; (b) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+c$; (c) $\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c$; (d) $\frac{1}{4}x^4\ln(x)-\frac{1}{16}x^4+c$; (e) $\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2-\frac{1}{2}x^2\ln(x)+\frac{1}{4}x^2+c$; (f) $2x\sin(x)+(2-x^2)\cos(x)$.

134. (a) $z=x^2$: $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$; (b) $z=x^2+6$:$\frac{2}{3}\left(x^2+6\right)^{\frac{3}{2}}+c$; (c) $z=3x^2+4$: $\frac{1}{6}\ln|3x^2+4|+c$; (d) $z=x+1$: $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$; (e) $z=\ln(x)$: $\frac{1}{2}(\ln(x))^2+c$ (f) $z=\ln(x)$: $\ln|\ln(x)|+c$; (g) $z=x^3+1$: $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}+c$; (h) $z=5-x^2$: $-\sqrt{5-x^2}+c$; (i) $z=x+3$: $7\ln|x-3|+\frac{1}{2}x^2+2x+c$; (j) $z=x-8$: $\frac{2}{5}(x-8)^{5/2}+\frac{16}{3}(x-8)^{3/2}+c$.

135. (a) $\frac{3}{2}x^2+4\ln|x|+c$; (b) $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+c$; (c) $\frac{1}{9}(6x+1)e^{3x}$; (d) $-(x^2+2)e^{-\frac{x^2}{2}}+c$; (e) $\frac{1}{3}e^{3x+2}+c$; (f) $-\frac{1}{2}\ln|3-2x|+c$; (g) $\frac{1}{3}e^{3x-5}+c$; (h) $\frac{1}{2}e^{t^2}+c$; (i) $\frac{1}{4}(\ln(x))^4+c$; (j) $\sqrt{1+y^2}+c$.

136. (a) $4\sqrt{x}+2x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+c$; (b) $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+c$; (c) $2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^{3/2}+c$; (d) $-\frac{2}{3}x^{-3/2}-\frac{1}{x}+4\sqrt{x}+2x+c$; (e) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+c$; (f) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$.

137. $-\ln|\cos(x)|+c$.

138. $C(x)=2000+30x-0{,}025x^2$.

139. Kostenfunktion: $C(x)=2500+24x-0{,}015x^2+0{,}002x^3$;
Fixkosten: $C(0)=2500$; Gesamtkosten von 500 Stück: $C(500)=260\,750$.

140. $R(x)=4x-0{,}005x^2$.

141. $C(x)=1000+10x-0{,}05x^2+0{,}001x^3$; Fixkosten: $C(0)=1000$.

142. (a) $\int_0^1 f(x)dx = 1\cdot(0{,}2-0)+0{,}5\cdot(0{,}5-0{,}2)+2{,}5\cdot(0{,}6-0{,}5)+3{,}5\cdot(0{,}7-0{,}6)+(-3{,}5)\cdot(1-0{,}7)=-0{,}1$; (b) $\int_0^1 f(x)dx=\ldots=-0{,}55$.

143. $\int_0^{10} f(x)dx=\frac{1}{2}(5+0)\cdot(2-0)+\frac{1}{2}(2+5)\cdot(6-2)+\frac{1}{2}(-5+2)\cdot(10-6)=13$.

144. (a) 39; (b) $3e^2-3=19.17$; (c) 93; (d) $-\frac{1}{6}$ (Taschenrechner auf Bogenmaß umschalten!); (e) $\frac{1}{2}\ln(8)\approx 1{,}0397$.

145. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{781}{10}$; (c) $\frac{8}{3}$; (d) $\frac{1}{2}\ln(5)-\frac{1}{2}\ln(2)\approx 0{,}4581$; (e) $1-e^{-2}\approx 0{,}8647$; (f) $\frac{27}{4}$; (g) 1; (h) $2e^2-2\approx 12{,}778$; (i) $\frac{8}{3}\ln(2)-\frac{7}{9}\approx 1{,}07061$.

146. (a) $\int_0^\infty -e^{-3x}\,dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t -e^{-3x}\,dx=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$;
(b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx=\lim\limits_{t\to 0}\int_t^1 \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx=\lim\limits_{t\to 0}8-8t^{\frac{1}{4}}=8$;
(c) $=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x}{x^2+1}\,dx=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^{t^2+1}\frac{1}{z}\,dz=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2}(\ln(t^2+1)-\ln(1))=\infty$,
das uneigentliche Integral existiert nicht.

147. (a) $\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{1+t}+1=1$; (b) $\lim_{t\to\infty}-(2+2t+t^2)e^{-t}+2=2$;
(c) $\lim_{t\to\infty}-e^{-t^2/2}+1=1$;
(d) $\lim_{t\to\infty}\ln(t)-\ln(1+t)-\frac{\ln(t)}{1+t}+\ln(2)=\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)-\frac{\ln(t)}{1+t}+\ln(2)=\ln(2)$.

148. (a) $\lim_{t\to\infty}\ln(\ln(t))-\ln(\ln(2))=\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
(b) $\lim_{t\to 1}\ln(\ln(2))-\ln(\ln(t))=-\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
(c) $\lim_{t\to 0}-1+\frac{1}{t}=\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht;
(d) $\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{t}+1=1$; (e) $\lim_{t\to 0}2-2\sqrt{t}=2$;
(f) $\lim_{t\to\infty}2\sqrt{t}-2=\infty$, das uneigentliche Integral existiert nicht.

149. (a) Es müssen drei Fälle unterschieden werden:

$\alpha < -1$: $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 x^\alpha \, dx = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right) = \infty$, da $\alpha + 1 < 0$ ist;

$\alpha = -1$: $\int_0^1 x^{-1} \, dx = \lim_{t\to 0} (\ln(1) - \ln(t)) = \infty$;

$\alpha > -1$: $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha+1}$;

Das uneigentliche Integral existiert genau dann, wenn $\alpha > -1$;

(b) analog: $\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^\alpha \, dx = \frac{1}{1+\alpha}$ falls $\alpha < -1$ und ∞ sonst;

(c) $\int_0^\infty x^\alpha \, dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 x^\alpha \, dx + \lim_{s\to\infty} \int_1^s x^\alpha \, dx = \infty$ für alle α.

Symbolverzeichnis

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε oder ϵ	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ oder ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ oder φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

1. Mengen und Abbildungen

2. Terme, Gleichungen und Ungleichungen

3. Folgen und Reihen

4. Reelle Funktionen

5. Differentialrechnung

6. Stammfunktion und Integral

Index