

## Kapitel 9

# Taylorreihen

# Näherung erster Ordnung

Wir wollen eine Funktion  $f$  durch möglichst einfache Funktionen approximieren.

Approximation durch eine **lineare Funktion**:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\doteq$  bedeutet „**in erster Näherung**“.

Wenn wir die Näherung verwenden, rechnen wir mit der Tangente der Funktion an der Stelle  $x_0$  anstatt mit  $f$ .

# Polynome

Besser Approximationen erhalten wir durch Verwendung eines

**Polynoms**  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

**Ansatz:**

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + R_n(x)$$

Dabei wird  $R_n(x)$  als **Restglied** bezeichnet. Es gibt den Fehler an, den wir beim Ersetzen von  $f(x)$  durch  $P_n(x)$  machen.

Wählen dabei die Koeffizienten  $a_i$  so, dass die ersten  $n$  Ableitungen von  $f$  und  $P_n$  an der Stelle  $x_0 = 0$  übereinstimmen.

# Ableitungen

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = P_n(x)$$

$$\Rightarrow f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + \cdots + n \cdot a_nx^{n-1} = P'_n(x)$$

$$\Rightarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2} = P''_n(x)$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_nx^{n-3} = P'''_n(x)$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 3! a_3$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n = P_n^{(n)}(x)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n$$

# MacLaurinpolynom

Die Koeffizienten des Polynoms lauten daher

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$f^{(k)}(x_0)$  bezeichnet dabei die  $k$ -te Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

Das Polynom

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

heißt das **MacLaurinpolynom**  $n$ -ter Ordnung von  $f$ .

# Taylorpolynom

Wenn wir die Ableitungen an einer beliebigen Stelle  $x_0$  betrachten erhalten wir das **Taylorpolynom**  $n$ -ter Ordnung von  $f$  im Punkt  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

Die unendliche Reihe ( $n \rightarrow \infty$ ) heißt die **Taylorreihe** von  $f$ .

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , dann konvergiert die Taylorreihe gegen  $f(x)$ .

Wir sprechen dann von der **Taylorreihenentwicklung** von  $f$  mit **Entwicklungspunkt**  $x_0$ .

# Beispiel – Exponentialfunktion

Taylorreihenentwicklung von  $f(x) = e^x$  an der Stelle  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$$

⋮

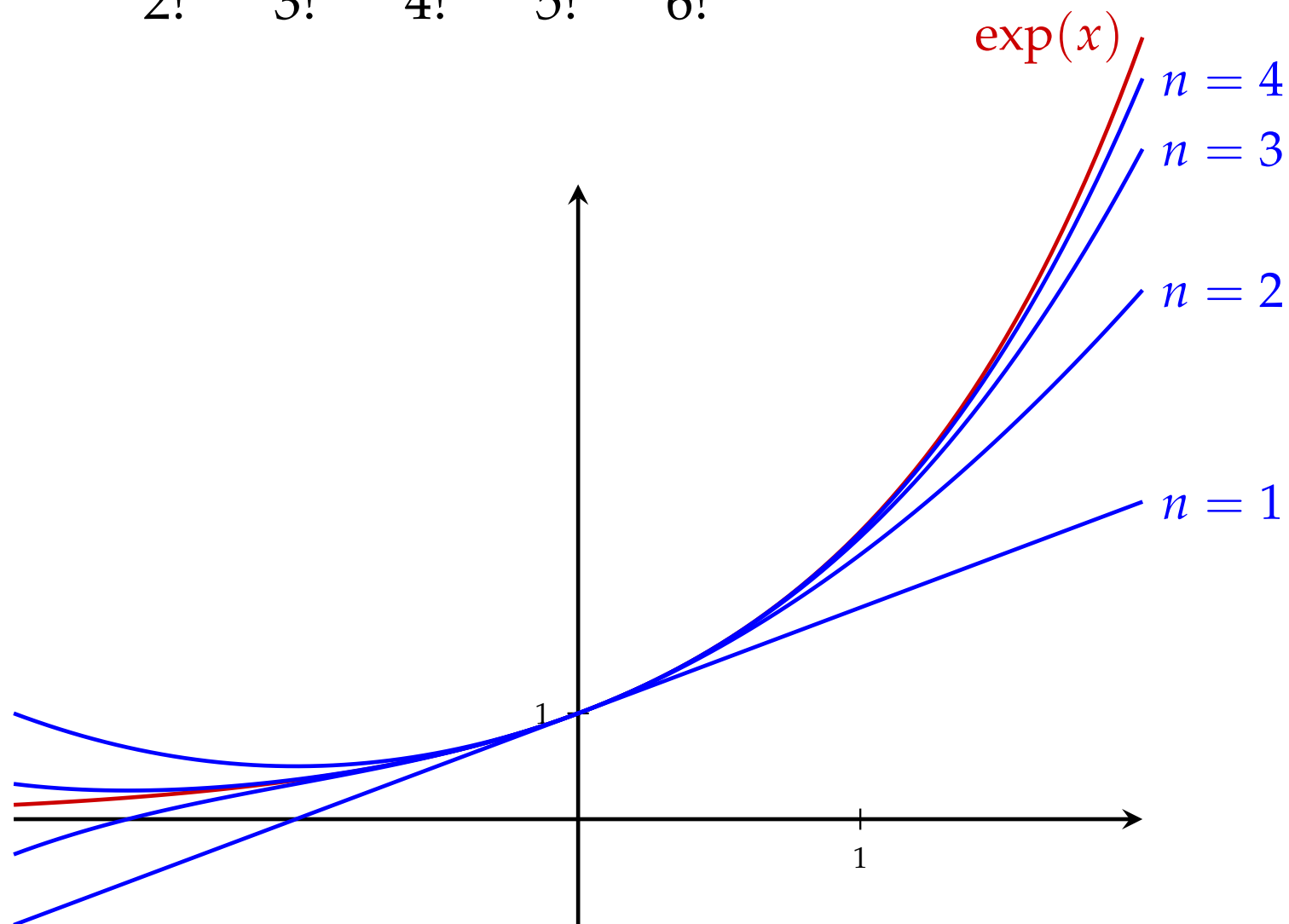
$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

# Beispiel – Exponentialfunktion

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$





# Beispiel – Logarithmus

Taylorreihenentwicklung von  $f(x) = \ln(1 + x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$f(x) = \ln(1 + x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (1 + x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -1 \cdot (1 + x)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 1 \cdot (1 + x)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2!$$

⋮

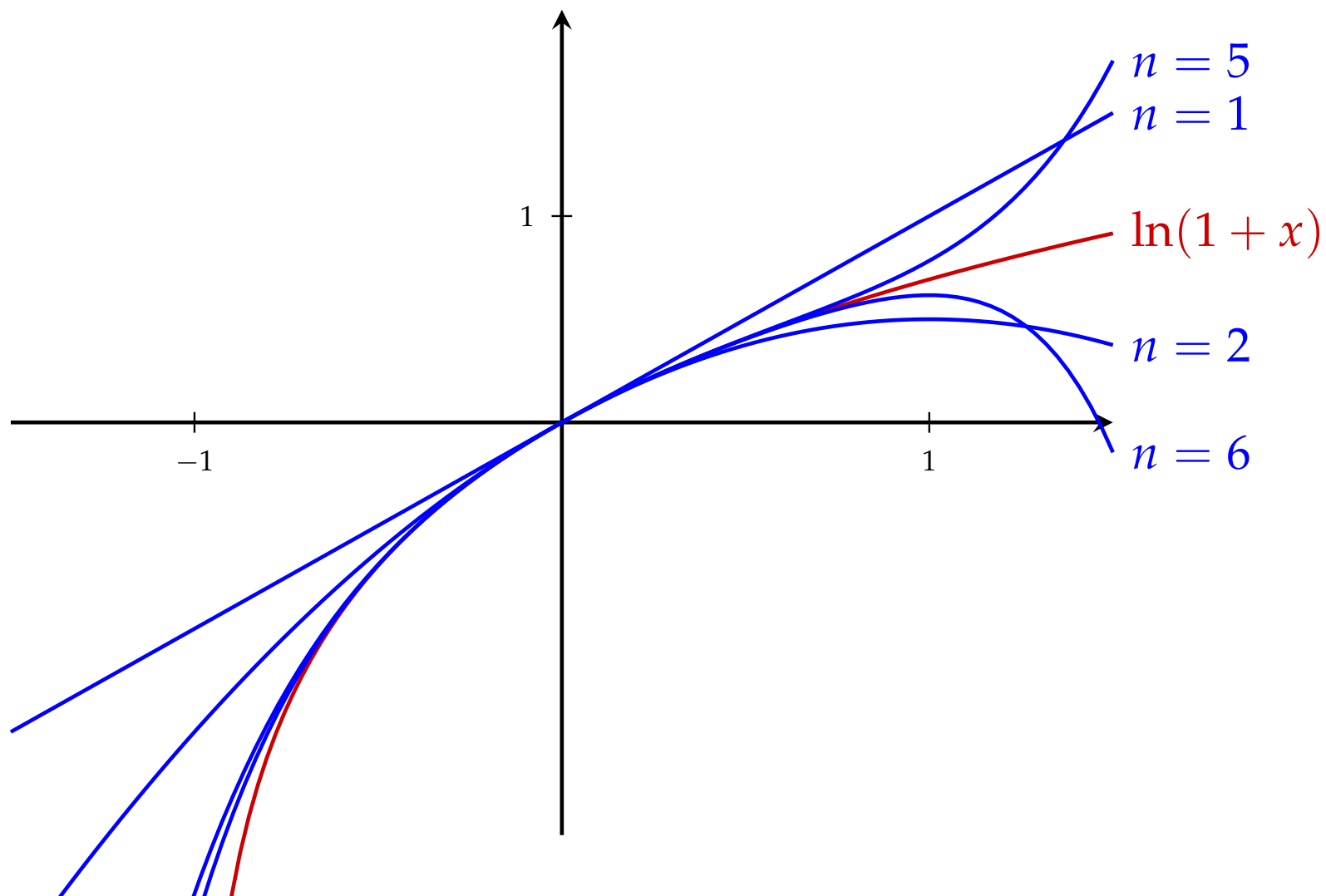
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n+1} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle  $x \in (-1, 1)$ .

# Beispiel – Logarithmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$



# Konvergenzradius

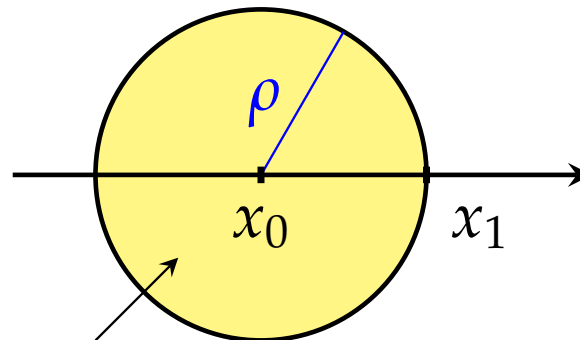
Es gibt Taylorreihen, die nicht für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren.

z.B.:  $\ln(1 + x)$

Es gilt jedoch:

Falls eine Taylorreihe für ein  $x_1$  mit  $|x_1 - x_0| = \rho$  konvergiert, so konvergiert sie für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \rho$ .

Das größtmögliche derartige  $\rho$  heißt der **Konvergenzradius** der Taylorreihe.



Taylorreihe konvergiert

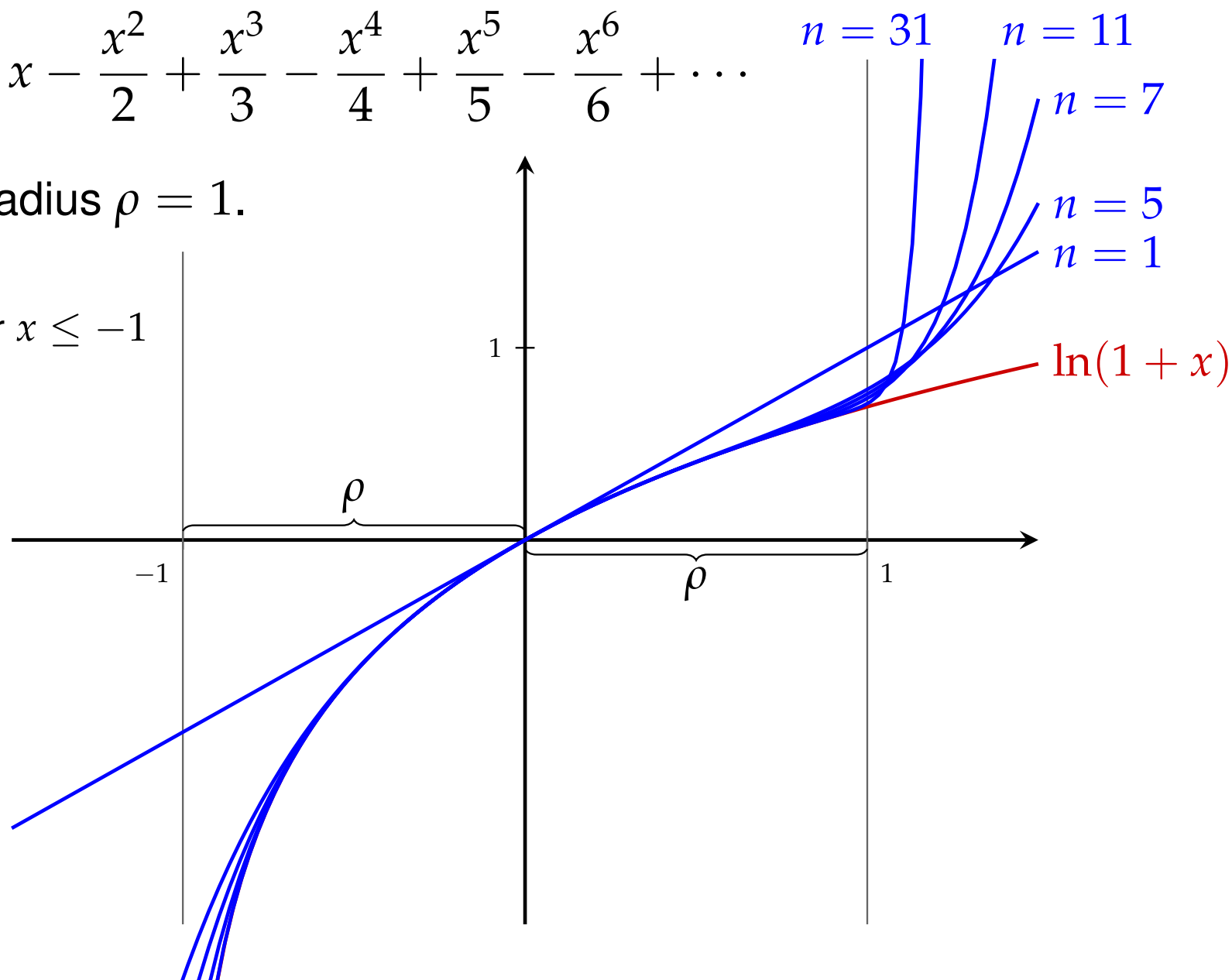
# Beispiel – Logarithmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Konvergenzradius  $\rho = 1$ .

Indiz:

$\ln(1+x)$  ist für  $x \leq -1$   
nicht definiert.



# Approximationsfehler

Das Restglied gibt den Fehler bei der Approximation durch die Taylorreihe an.

$$\text{Fehler} = |R_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right|$$

Der Approximationsfehler  $|R_n(x)|$  ist umso kleiner

- ▶ je näher  $x$  am Entwicklungspunkt  $x_0$  ist;
- ▶ je größer die Ordnung  $n$  ist.

Falls die Taylorreihe konvergiert, dann gilt

$$R_n(x) = O((x - x_0)^{n+1}) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

Wir sagen: der Fehler geht mit groß  $O$  von  $x^{n+1}$  gegen 0.

# Landau-Symbol

Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei Funktionen.

Wir schreiben

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

falls eine Konstante  $C$  existiert, sodass

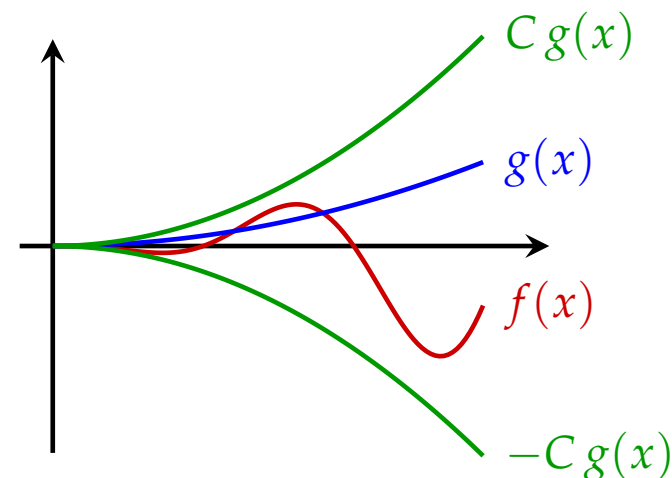
$$|f(x)| < C \cdot |g(x)|$$

für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$ .

$O(\cdot)$  heißt **Landau-Symbol** („groß  $O$  von ...“).

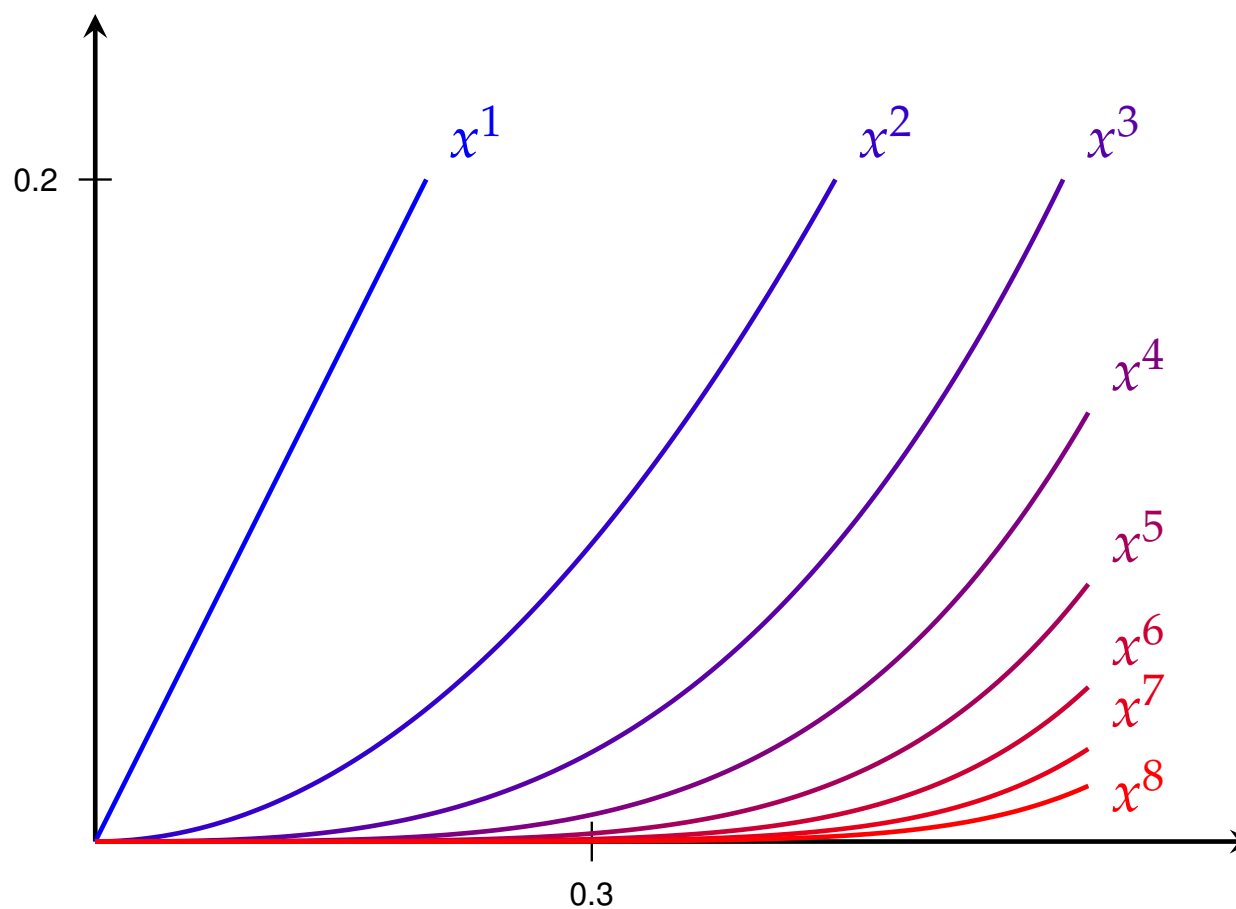
Man schreibt daher auch

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O((x - x_0)^{n+1})$$



# Einfluss der Ordnung der Potenzen

Je höher die Ordnung einer Potenz wird, desto kleiner wird ihr Beitrag in der Taylorreihenentwicklung in der Nähe des Entwicklungspunkt.



# Wichtige Taylorreihen

$f(x)$	MacLaurinreihe	$\rho$
$\exp(x)$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$\infty$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	1
$\sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$\infty$
$\cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$\infty$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	1



# Rechnen mit Taylorreihen

Wir können Taylorreihen bequem

- ▶ addieren (gliedweise)
- ▶ differenzieren (gliedweise)
- ▶ integrieren (gliedweise)
- ▶ multiplizieren
- ▶ dividieren
- ▶ substituieren

Man verwendet daher oft Taylorreihen zur *Definition* einer Funktion.

Etwa

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

# Beispiel

Die erste Ableitung von  $\exp(x)$  erhalten wir durch Ableiten der Taylorreihe:

$$\begin{aligned}(\exp(x))' &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' \\ &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

# Beispiel

Wir erhalten die MacLaurinreihe von  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  durch Multiplizieren der MacLaurinreihe von  $x^2$  mit der MacLaurinreihe von  $\exp(x)$ :

$$\begin{aligned}x^2 \cdot e^x &= x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \dots\end{aligned}$$

Wir erhalten die MacLaurinreihe von  $f(x) = \exp(-x^2)$  durch Substituieren (Einsetzen) von  $-x^2$  in die MacLaurinreihe von  $\exp(x)$ :

$$\begin{aligned}e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \\ e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\end{aligned}$$

# Polynome

Die Idee der Taylorreihe kann auch für Funktionen in zwei oder mehreren Variablen verwirklicht werden.

Ein Polynom  $n$ -ten Grades in zwei Variablen hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} P_n(x_1, x_2) = & a_0 \\ & + a_{10} x_1 + a_{11} x_2 \\ & + a_{20} x_1^2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \\ & + a_{30} x_1^3 + a_{31} x_1^2 x_2 + a_{32} x_1 x_2^2 + a_{33} x_2^3 \\ & \vdots \\ & + a_{n0} x_1^n + a_{n1} x_1^{n-1} x_2 + a_{n2} x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_2^n \end{aligned}$$

Wählen die Koeffizienten  $a_{kj}$  so, dass alle partiellen Ableitungen von  $f$  und  $P_n$  bis zur Ordnung  $n$  am Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_0$  übereinstimmen.

# Taylorpolynom 2. Ordnung

Wir erhalten dadurch die Koeffizienten

$$a_{kj} = \frac{1}{k!} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(0)}{(\partial x_1)^{k-j} (\partial x_2)^j} \quad k \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, k$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung an der Stelle  $\mathbf{x}_0 = 0$  lautet daher

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & f(0) \\ & + f_{x_1}(0) x_1 + f_{x_2}(0) x_2 \\ & + \frac{1}{2} f_{x_1 x_1}(0) x_1^2 + f_{x_1 x_2}(0) x_1 x_2 + \frac{1}{2} f_{x_2 x_2}(0) x_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Der lineare Term kann mittels Gradient dargestellt werden:

$$f_{x_1}(0) x_1 + f_{x_2}(0) x_2 = \nabla f(0) \cdot \mathbf{x}$$

Was ist mit dem quadratischen Term?

# Hesse-Matrix

Wir fassen alle zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  zu einer  $2 \times 2$ -Matrix zusammen.

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix wird als **Hesse-Matrix** von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  bezeichnet.

Der quadratische Term kann mittels Hesse-Matrix dargestellt werden:

$$f_{x_1x_1}(0) x_1^2 + 2 f_{x_1x_2}(0) x_1 x_2 + f_{x_2x_2}(0) x_2^2 = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x}$$

Also

$$f(\mathbf{x}) = f(0) + \nabla f(0) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x} + O(\|\mathbf{x}\|^3)$$

# Hesse-Matrix II

Allgemein fasst die **Hesse-Matrix** alle zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion  $f$  in  $n$  Variablen an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  zu einer  $n \times n$ -Matrix zusammen.

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

- ▶ Die Hesse-Matrix ist symmetrisch.  
(Falls  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist.)
- ▶ Die Hesse-Matrix “spielt“ die gleiche Rolle wie die zweite Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.
- ▶ Andere Notation:  $f''(\mathbf{x}_0)$

# Taylorpolynom 2. Ordnung (II)

Taylorreihenentwicklung von  $f$  zweiter Ordnung an der Stelle  $\mathbf{x}_0$ :

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^t \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)$$

In anderer Notation sieht das ganze analog zur Taylorreihe einer Funktion in einer Variable aus:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^t \cdot f''(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)$$



# Beispiel

Wir suchen das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle  $\mathbf{x}_0 = 0$  von

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} + x$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x^2 - y^2} + x && \Rightarrow f(0,0) = 1 \\ f_x(x, y) &= 2x e^{x^2 - y^2} + 1 && \Rightarrow f_x(0,0) = 1 \\ f_y(x, y) &= -2y e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_y(0,0) = 0 \\ f_{xx}(x, y) &= 2 e^{x^2 - y^2} + 4x^2 e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2 \\ f_{xy}(x, y) &= -4xy e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0 \\ f_{yy}(x, y) &= -2 e^{x^2 - y^2} + 4y^2 e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -2 \end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla f(0) = (1, 0)$$

Hesse-Matrix:

$$\mathbf{H}_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# Beispiel

Das Taylorpolynom lautet daher

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0) + \nabla f(0) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x} \\ &= 1 + (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + x^2 - y^2 \end{aligned}$$

# Zusammenfassung

- ▶ MacLaurin- und Taylorpolynom
- ▶ Taylorreihenentwicklung
- ▶ Konvergenzradius
- ▶ Rechnen mit Taylorreihen
- ▶ Taylorreihen von Funktionen in mehreren Variablen
- ▶ Hesse-Matrix