

Kapitel 9

Taylorreihen

Näherung erster Ordnung

Wir wollen eine Funktion f durch möglichst einfache Funktionen approximieren.

Approximation durch eine **lineare Funktion**:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

\doteq bedeutet „in erster Näherung“.

Wenn wir die Näherung verwenden, rechnen wir mit der Tangente der Funktion an der Stelle x_0 anstatt mit f .

Polynome

Besser Approximationen erhalten wir durch Verwendung eines **Polynoms** $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + R_n(x)$$

Dabei wird $R_n(x)$ als **Restglied** bezeichnet. Es gibt den Fehler an, den wir beim Ersetzen von $f(x)$ durch $P_n(x)$ machen.

Wählen dabei die Koeffizienten a_i so, dass die ersten n Ableitungen von f und P_n an der Stelle $x_0 = 0$ übereinstimmen.

Ableitungen

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = P_n(x)$$

$$\Rightarrow f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + \dots + n \cdot a_nx^{n-1} = P'_n(x)$$

$$\Rightarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2} = P''_n(x)$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_nx^{n-3} = P'''_n(x)$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 3! a_3$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_n = P^{(n)}_n(x)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n$$

MacLaurinpolynom

Die Koeffizienten des Polynoms lauten daher

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$f^{(k)}(x_0)$ bezeichnet dabei die k -te Ableitung von f an der Stelle x_0 .

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

Das Polynom

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

heißt das **MacLaurinpolynom** n -ter Ordnung von f .

Taylorpolynom

Wenn wir die Ableitungen an einer beliebigen Stelle x_0 betrachten erhalten wir das **Taylorpolynom** n -ter Ordnung von f im Punkt x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

Die unendliche Reihe ($n \rightarrow \infty$) heißt die **Taylorreihe** von f .

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dann konvergiert die Taylorreihe gegen $f(x)$.

Wir sprechen dann von der **Taylorreihenentwicklung** von f mit **Entwicklungspunkt** x_0 .

Beispiel – Exponentialfunktion

Taylorreihenentwicklung von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$$

⋮

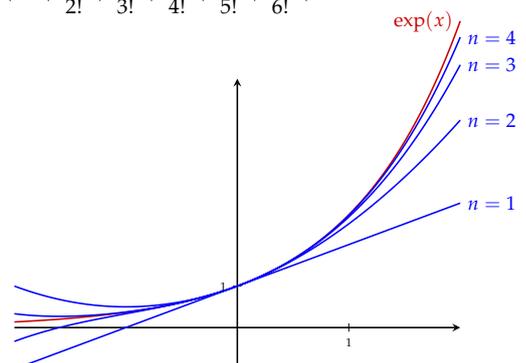
$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel – Exponentialfunktion

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$



Beispiel – Logarithmus

Taylorreihenentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

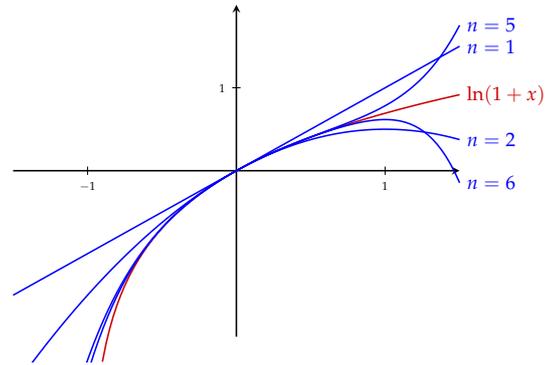
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) && \Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} && \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2} && \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-3} && \Rightarrow f'''(0) = 2! \\ &\vdots && \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n+1} && \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x \in (-1, 1)$.

Beispiel – Logarithmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$



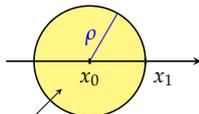
Konvergenzradius

Es gibt Taylorreihen, die nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.
z.B.: $\ln(1+x)$

Es gilt jedoch:

Falls eine Taylorreihe für ein x_1 mit $|x_1 - x_0| = \rho$ konvergiert, so konvergiert sie für alle x mit $|x - x_0| < \rho$.

Das größtmögliche derartige ρ heißt der **Konvergenzradius** der Taylorreihe.



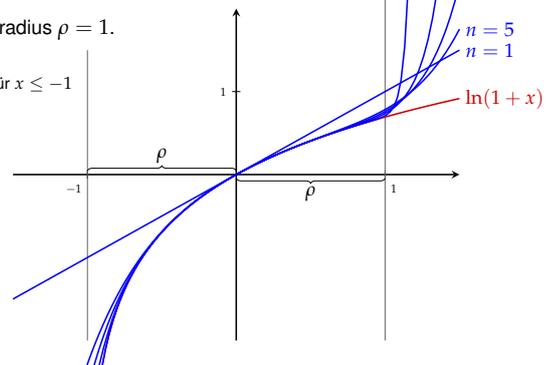
Taylorreihe konvergiert

Beispiel – Logarithmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Konvergenzradius $\rho = 1$.

Indiz:
 $\ln(1+x)$ ist für $x \leq -1$ nicht definiert.



Approximationsfehler

Das Restglied gibt den Fehler bei der Approximation durch die Taylorreihe an.

$$\text{Fehler} = |R_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right|$$

Der Approximationsfehler $|R_n(x)|$ ist umso kleiner

- ▶ je näher x am Entwicklungspunkt x_0 ist;
- ▶ je größer die Ordnung n ist.

Falls die Taylorreihe konvergiert, dann gilt

$$R_n(x) = O((x - x_0)^{n+1}) \text{ für } x \rightarrow x_0$$

Wir sagen: der Fehler geht mit groß O von x^{n+1} gegen 0.

Landau-Symbol

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen.

Wir schreiben

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0$$

falls eine Konstante C existiert, sodass

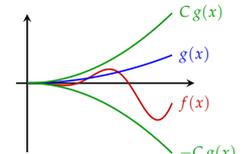
$$|f(x)| < C \cdot |g(x)|$$

für alle x mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

$O(\cdot)$ heißt **Landau-Symbol** („groß O von ...“).

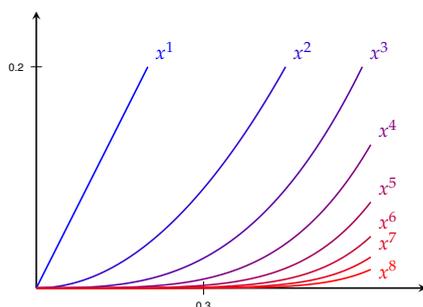
Man schreibt daher auch

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O((x - x_0)^{n+1})$$



Einfluss der Ordnung der Potenzen

Je höher die Ordnung einer Potenz wird, desto kleiner wird ihr Beitrag in der Taylorreihenentwicklung in der Nähe des Entwicklungspunkt.



Wichtige Taylorreihen

$f(x)$	MacLaurinreihe	ρ
$\exp(x)$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	∞
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	1
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	∞
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	∞
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	1

Rechnen mit Taylorreihen

Wir können Taylorreihen bequem

- ▶ addieren (gliedweise)
- ▶ differenzieren (gliedweise)
- ▶ integrieren (gliedweise)
- ▶ multiplizieren
- ▶ dividieren
- ▶ substituieren

Man verwendet daher oft Taylorreihen zur *Definition* einer Funktion. Etwa

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Beispiel

Die erste Ableitung von $\exp(x)$ erhalten wir durch Ableiten der Taylorreihe:

$$\begin{aligned}(\exp(x))' &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' \\ &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

Beispiel

Wir erhalten die MacLaurinreihe von $f(x) = x^2 \cdot e^x$ durch Multiplizieren der MacLaurinreihe von x^2 mit der MacLaurinreihe von $\exp(x)$:

$$\begin{aligned}x^2 \cdot e^x &= x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \dots\end{aligned}$$

Wir erhalten die MacLaurinreihe von $f(x) = \exp(-x^2)$ durch Substituieren (Einsetzen) von $-x^2$ in die MacLaurinreihe von $\exp(x)$:

$$\begin{aligned}e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \\ e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\end{aligned}$$

Taylorpolynom 2. Ordnung

Wir erhalten dadurch die Koeffizienten

$$a_{kj} = \frac{1}{k!} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(0)}{(\partial x_1)^{k-j} (\partial x_2)^j} \quad k \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, k$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung an der Stelle $\mathbf{x}_0 = 0$ lautet daher

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= f(0) \\ &+ f_{x_1}(0) x_1 + f_{x_2}(0) x_2 \\ &+ \frac{1}{2} f_{x_1 x_1}(0) x_1^2 + f_{x_1 x_2}(0) x_1 x_2 + \frac{1}{2} f_{x_2 x_2}(0) x_2^2 + \dots\end{aligned}$$

Der lineare Term kann mittels Gradient dargestellt werden:

$$f_{x_1}(0) x_1 + f_{x_2}(0) x_2 = \nabla f(0) \cdot \mathbf{x}$$

Was ist mit dem quadratischen Term?

Hesse-Matrix

Wir fassen alle zweiten partiellen Ableitungen von f an der Stelle \mathbf{x}_0 zu einer 2×2 -Matrix zusammen.

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix wird als **Hesse-Matrix** von f an der Stelle \mathbf{x}_0 bezeichnet.

Der quadratische Term kann mittels Hesse-Matrix dargestellt werden:

$$f_{x_1 x_1}(0) x_1^2 + 2 f_{x_1 x_2}(0) x_1 x_2 + f_{x_2 x_2}(0) x_2^2 = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x}$$

Also

$$f(\mathbf{x}) = f(0) + \nabla f(0) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x} + O(\|\mathbf{x}\|^3)$$

Hesse-Matrix II

Allgemein fasst die **Hesse-Matrix** alle zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion f in n Variablen an der Stelle \mathbf{x}_0 zu einer $n \times n$ -Matrix zusammen.

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_2 x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_n x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

- ▶ Die Hesse-Matrix ist symmetrisch. (Falls f zweimal stetig differenzierbar ist.)
- ▶ Die Hesse-Matrix "spielt" die gleiche Rolle wie die zweite Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.
- ▶ Andere Notation: $f''(\mathbf{x}_0)$

Taylorpolynom 2. Ordnung (II)

Taylorreihenentwicklung von f zweiter Ordnung an der Stelle \mathbf{x}_0 :

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^t \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)$$

In anderer Notation sieht das ganze analog zur Taylorreihe einer Funktion in einer Variable aus:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^t \cdot f''(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)$$

Beispiel

Wir suchen das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $\mathbf{x}_0 = 0$ von

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} + x$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{x^2 - y^2} + x && \Rightarrow f(0, 0) = 1 \\ f_x(x, y) &= 2x e^{x^2 - y^2} + 1 && \Rightarrow f_x(0, 0) = 1 \\ f_y(x, y) &= -2y e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_y(0, 0) = 0 \\ f_{xx}(x, y) &= 2 e^{x^2 - y^2} + 4x^2 e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2 \\ f_{xy}(x, y) &= -4xy e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 0 \\ f_{yy}(x, y) &= -2 e^{x^2 - y^2} + 4y^2 e^{x^2 - y^2} && \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = -2 \end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla f(0) = (1, 0)$$

Hesse-Matrix:

$$\mathbf{H}_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Das Taylorpolynom lautet daher

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0) + \nabla f(0) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x} \\ &= 1 + (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- ▶ MacLaurin- und Taylorpolynom
- ▶ Taylorreihenentwicklung
- ▶ Konvergenzradius
- ▶ Rechnen mit Taylorreihen
- ▶ Taylorreihen von Funktionen in mehreren Variablen
- ▶ Hesse-Matrix