Kapitel 9

Taylorreihen

Näherung erster Ordnung

Wir wollen eine Funktion f durch möglichst einfache Funktionen approximieren.

Approximation durch eine **lineare Funktion**:

$$\boxed{f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

$\doteq$ bedeutet „**in erster Näherung**".

Wenn wir die Näherung verwenden, rechnen wir mit der Tangente der Funktion an der Stelle x_0 anstatt mit f.

Polynome

Besser Approximationen erhalten wir durch Verwendung eines **Polynoms** $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R_n(x)$$

Dabei wird $R_n(x)$ als **Restglied** bezeichnet. Es gibt den Fehler an, den wir beim Ersetzen von $f(x)$ durch $P_n(x)$ machen.

Wählen dabei die Koeffizienten a_i so, dass die ersten n Ableitungen von f und P_n an der Stelle $x_0 = 0$ übereinstimmen.

Ableitungen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n && = P_n(x) \\
&\Rightarrow f(0) = a_0 \\
f'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 x + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1} && = P_n'(x) \\
&\Rightarrow f'(0) = a_1 \\
f''(x) &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} && = P_n''(x) \\
&\Rightarrow f''(0) = 2\, a_2 \\
f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n x^{n-3} && = P_n'''(x) \\
&\Rightarrow f'''(0) = 3!\, a_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_n && = P_n^{(n)}(x) \\
&\Rightarrow f^{(n)}(0) = n!\, a_n
\end{aligned}
$$

MacLaurinpolynom

Die Koeffizienten des Polynoms lauten daher

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$f^{(k)}(x_0)$ bezeichnet dabei die k-te Ableitung von f an der Stelle x_0.

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + R_n(x)}$$

Das Polynom

$$f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

heißt das **MacLaurinpolynom** n-ter Ordnung von f.

Taylorpolynom

Wenn wir die Ableitungen an einer beliebigen Stelle x_0 betrachten erhalten wir das **Taylorpolynom** n-ter Ordnung von f im Punkt x_0:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k + R_n(x)}$$

Die unendliche Reihe ($n \to \infty$) heißt die **Taylorreihe** von f.

Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, dann konvergiert die Taylorreihe gegen $f(x)$.

Wir sprechen dann von der **Taylorreihenentwicklung** von f mit **Entwicklungspunkt** x_0.

Beispiel – Exponentialfunktion

Taylorreihenentwicklung von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x)$$

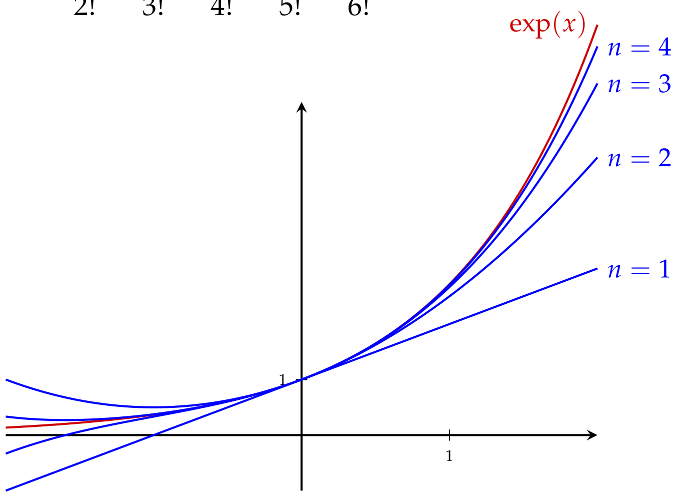
$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x &\Rightarrow\quad & f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^x &\Rightarrow\quad & f'(0) = 1 \\
f''(x) &= e^x &\Rightarrow\quad & f''(0) = 1 \\
f'''(x) &= e^x &\Rightarrow\quad & f'''(0) = 1 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= e^x &\Rightarrow\quad & f^{(n)}(0) = 1
\end{aligned}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel – Exponentialfunktion

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$



Beispiel – Logarithmus

Taylorreihenentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x)$$

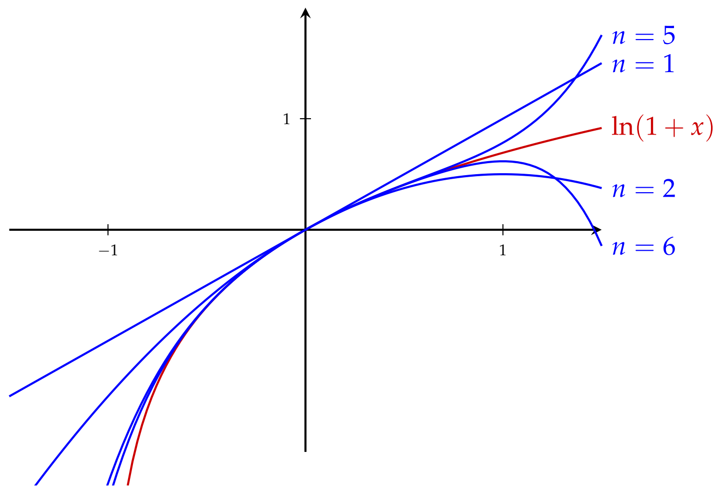
$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) &\Rightarrow\quad & f(0) = 0 \\
f'(x) &= (1+x)^{-1} &\Rightarrow\quad & f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2} &\Rightarrow\quad & f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-3} &\Rightarrow\quad & f'''(0) = 2! \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n+1} &\Rightarrow\quad & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x \in (-1,1)$.

Beispiel – Logarithmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

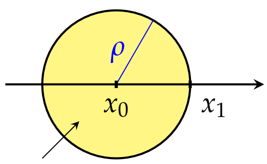


Konvergenzradius

Es gibt Taylorreihen, die nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.
z.B.: $\ln(1+x)$

Es gilt jedoch:

Falls eine Taylorreihe für ein x_1 mit $|x_1 - x_0| = \rho$ konvergiert, so konvergiert sie für alle x mit $|x - x_0| < \rho$.
Das größtmögliche derartige ρ heißt der **Konvergenzradius** der Taylorreihe.



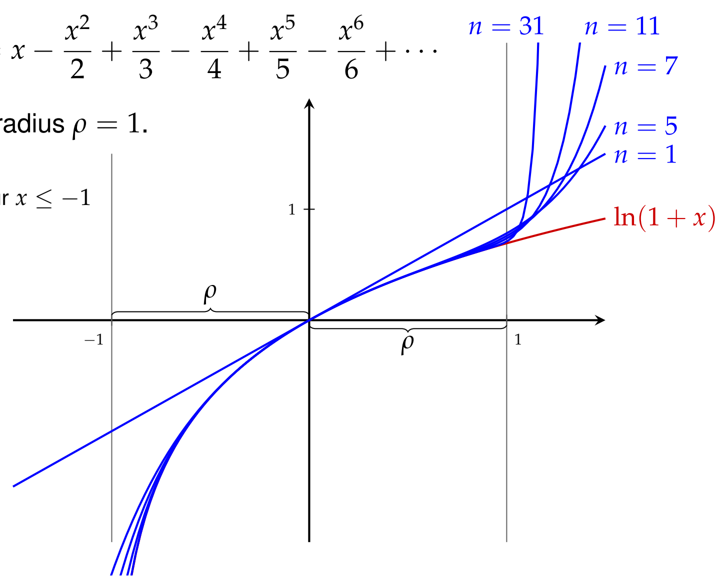
Taylorreihe konvergiert

Beispiel – Logarithmus

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Konvergenzradius $\rho = 1$.

Indiz:
$\ln(1+x)$ ist für $x \leq -1$ nicht definiert.



Approximationsfehler

Das Restglied gibt den Fehler bei der Approximation durch die Taylorreihe an.

$$\text{Fehler} = |R_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right|$$

Der Approximationsfehler $|R_n(x)|$ ist umso kleiner

- je näher x am Entwicklungpunkt x_0 ist;
- je größer die Ordnung n ist.

Falls die Taylorreihe konvergiert, dann gilt

$$\boxed{R_n(x) = O((x-x_0)^{n+1}) \quad \text{für} \quad x \to x_0}$$

Wir sagen: der Fehler geht mit groß O von x^{n+1} gegen 0.

Landau-Symbol

Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen.

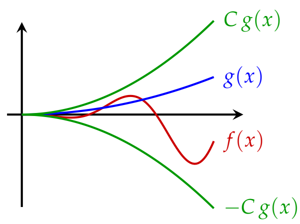
Wir schreiben

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \quad \text{für} \quad x \to x_0}$$

falls eine Konstante C existiert, sodass

$$|f(x)| < C \cdot |g(x)|$$

für alle x mit $|x - x_0| < \varepsilon$.



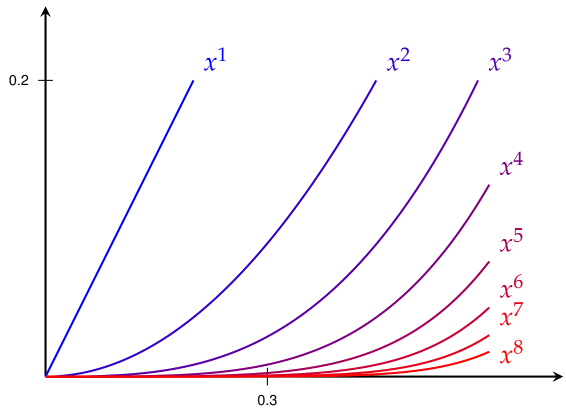
$O(\cdot)$ heißt **Landau-Symbol** („groß O von ...“).

Man schreibt daher auch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O((x-x_0)^{n+1})$$

Einfluss der Ordnung der Potenzen

Je höher die Ordnung einer Potenz wird, desto kleiner wird ihr Beitrag in der Taylorreihenentwicklung in der Nähe des Entwicklungspunkt.



Wichtige Taylorreihen

$f(x)$		MacLaurinreihe	ρ
$\exp(x)$	$=$	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	∞
$\ln(1+x)$	$=$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	1
$\sin(x)$	$=$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	∞
$\cos(x)$	$=$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	∞
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$	1

Rechnen mit Taylorreihen

Wir können Taylorreihen bequem

- addieren (gliedweise)
- differenzieren (gliedweise)
- integrieren (gliedweise)
- multiplizieren
- dividieren
- substituieren

Man verwenden daher oft Taylorreihen zur *Definition* einer Funktion. Etwa

$$\exp(x) := 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Beispiel

Die erste Ableitung von $\exp(x)$ erhalten wir durch Ableiten der Taylorreihe:

$$\begin{aligned}(\exp(x))' &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)' \\ &= 0+1+\frac{2\,x}{2!}+\frac{3\,x^2}{3!}+\frac{4\,x^3}{4!}+\cdots \\ &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

Beispiel

Wir erhalten die MacLaurinreihe von $f(x) = x^2 \cdot e^x$ durch Multiplizieren der MacLaurinreihe von x^2 mir der MacLaurinreihe von $\exp(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot e^x &= x^2 \cdot \left(1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

Wir erhalten die MacLaurinreihe von $f(x) = \exp(-x^2)$ durch Substituieren (Einsetzen) von $-x^2$ in die MacLaurinreihe von $\exp(x)$:

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \tfrac{u^2}{2!} + \tfrac{u^3}{3!} + \tfrac{u^4}{4!} + \cdots \\ e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \tfrac{(-x^2)^2}{2!} + \tfrac{(-x^2)^3}{3!} + \tfrac{(-x^2)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 - x^2 + \tfrac{x^4}{2!} - \tfrac{x^6}{3!} + \tfrac{x^8}{4!} - \cdots \end{aligned}$$

Polynome

Die Idee der Taylorreihe kann auch für Funktionen in zwei oder mehreren Variablen verwirklicht werden.

Ein Polynom n-ten Grades in zwei Variablen hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} P_n(x_1, x_2) = \;& a_0 \\ &+ a_{10}\, x_1 + a_{11}\, x_2 \\ &+ a_{20}\, x_1^2 + a_{21}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 \\ &+ a_{30}\, x_1^3 + a_{31}\, x_1^2\, x_2 + a_{32}\, x_1\, x_2^2 + a_{33}\, x_2^3 \\ &\quad \vdots \\ &+ a_{n0}\, x_1^n + a_{n1}\, x_1^{n-1}\, x_2 + a_{n2}\, x_1^{n-2}\, x_2^2 + \cdots + a_{nn}\, x_2^n \end{aligned}$$

Wählen die Koeffizienten a_{kj} so, dass alle partiellen Ableitungen von f und P_n bis zur Ordnung n am Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0$ übereinstimmen.

Taylorpolynom 2. Ordnung

Wir erhalten dadurch die Koeffizienten

$$a_{kj} = \frac{1}{k!} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(0)}{(\partial x_1)^{k-j}\, (\partial x_2)^j} \qquad k \in \mathbb{N},\ j = 0, \cdots, k$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung an der Stelle $\mathbf{x}_0 = 0$ lautet daher

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = \;& f(0) \\ &+ f_{x_1}(0)\, x_1 + f_{x_2}(0)\, x_2 \\ &+ \tfrac{1}{2}\, f_{x_1 x_1}(0)\, x_1^2 + f_{x_1 x_2}(0)\, x_1\, x_2 + \tfrac{1}{2}\, f_{x_2 x_2}(0)\, x_2^2 + \cdots \end{aligned}$$

Der lineare Term kann mittels Gradient dargestellt werden:

$$f_{x_1}(0)\, x_1 + f_{x_2}(0)\, x_2 = \nabla f(0) \cdot \mathbf{x}$$

Was ist mit dem quadratischen Term?

Hesse-Matrix

Wir fassen alle zweiten partiellen Ableitungen von f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ zu einer 2×2-Matrix zusammen.

$$\boxed{\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}}$$

Diese Matrix wird als **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ bezeichnet.

Der quadratische Term kann mittels Hesse-Matrix dargestellt werden:

$$f_{x_1x_1}(0)\, x_1^2 + 2\, f_{x_1x_2}(0)\, x_1\, x_2 + f_{x_2x_2}(0)\, x_2^2 = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x}$$

Also

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(0) + \nabla f(0) \cdot \mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0) \cdot \mathbf{x} + O(\|\mathbf{x}\|^3)}$$

Hesse-Matrix II

Allgemein fasst die **Hesse-Matrix** alle zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion f in n Variablen an der Stelle $\mathbf{x}_0$ zu einer $n \times n$-Matrix zusammen.

$$\boxed{\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}}$$

- Die Hesse-Matrix ist symmetrisch.
  (Falls f zweimal stetig differenzierbar ist.)
- Die Hesse-Matrix “spielt“ die gleiche Rolle wie die zweite Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.
- Andere Notation: $f''(\mathbf{x}_0)$

Taylorpolynom 2. Ordnung (II)

Taylorreihenentwicklung von f zweiter Ordnung an der Stelle $\mathbf{x}_0$:

$$\boxed{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{h}^t \cdot \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)}$$

In anderer Notation sieht das ganze analog zur Taylorreihe einer Funktion in einer Variable aus:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{h}^t \cdot f''(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)$$

Beispiel

Wir suchen das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $\mathbf{x}_0 = 0$ von

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2} + x$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{x^2-y^2} + x & \Rightarrow\quad & f(0,0) = 1\\
f_x(x,y) &= 2x\, e^{x^2-y^2} + 1 & \Rightarrow\quad & f_x(0,0) = 1\\
f_y(x,y) &= -2y\, e^{x^2-y^2} & \Rightarrow\quad & f_y(0,0) = 0\\
f_{xx}(x,y) &= 2\, e^{x^2-y^2} + 4x^2\, e^{x^2-y^2} & \Rightarrow\quad & f_{xx}(0,0) = 2\\
f_{xy}(x,y) &= -4xy\, e^{x^2-y^2} & \Rightarrow\quad & f_{xy}(0,0) = 0\\
f_{yy}(x,y) &= -2\, e^{x^2-y^2} + 4y^2\, e^{x^2-y^2} & \Rightarrow\quad & f_{yy}(0,0) = -2
\end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla f(0) = (1,0)$$

Hesse-Matrix:

$$\mathbf{H}_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Das Taylorpolynom lautet daher

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\approx f(0) + \nabla f(0)\cdot \mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{H}_f(0)\cdot \mathbf{x}\\
&= 1 + (1,0)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,(x,y)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\\
&= 1 + x + x^2 - y^2
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

- MacLaurin- und Taylorpolynom
- Taylorreihenentwicklung
- Konvergenzradius
- Rechnen mit Taylorreihen
- Taylorreihen von Funktionen in mehreren Variablen
- Hesse-Matrix