Kapitel 8

Inverse und implizite Funktionen

Inverse Funktion

Sei $\mathbf{f}\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to W_f \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Eine Funktion

$$\boxed{\mathbf{f}^{-1}\colon W_f \to D_f,\ \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})}$$

heißt **inverse Funktion** zu $\mathbf{f}$, falls

$$\boxed{\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{id}}$$

$\mathbf{id}$ ist die **Einheitsfunktion** oder **identische Funktion**: $\mathbf{id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

$\mathbf{f}^{-1}$ existiert genau dann, wenn $\mathbf{f}$ bijektiv ist.

Wir erhalten $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ als **eindeutige** Lösung $\mathbf{x}$ der Gleichung $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Lineare Funktion

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = a\,x + b$.

$$y = a\,x + b \quad \Leftrightarrow \quad a\,x = y - b \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{a}\,y - \tfrac{b}{a}$$

Also:

$$f^{-1}(y) = a^{-1}\,y - a^{-1}\,b$$

Vorausgesetzt: $a \neq 0$ $\quad [\, a = f'(x)\,]$

Beachte:

$$(f^{-1})'(y) = a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{f'(x)}$$

Lineare Funktion

Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ mit $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{y} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

Also:

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{y} - \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

Vorausgesetzt: $\mathbf{A}$ ist invertierbar. $[\,\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})\,]$
(Insbesondere: $n = m$)

Beachte:

$$D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1} = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$$

Lokal invertierbare Funktion

Die Funktion ist nicht bijektiv:

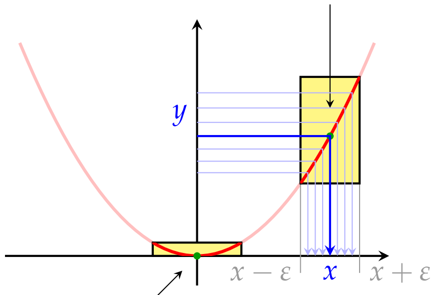
$f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $x \mapsto f(x) = x^2$

f^{-1} existiert daher nicht *global*.

Für manche x_0 gibt es ein *offenes* Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ über dem $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösbar ist.

Wir sagen:
f ist um x_0 **lokal invertierbar**.

Für manche x_0 gibt kein derartiges (noch so kleines) Intervall.

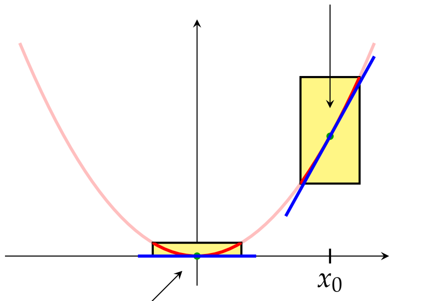


Existenz und Ableitung

1. Für welche $\mathbf{x}_0$ ist $\mathbf{f}$ lokal invertierbar?
2. Wie lautet die Ableitung von $\mathbf{f}^{-1}$ an der Stelle $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Idee:
Ersetze $\mathbf{f}$ durch das Differential:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$



Daher:

1. $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ muss invertierbar sein.
2. $D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}_0) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))^{-1}$

Satz über inverse Funktionen

Sei $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Punkt mit $f'(x_0) \neq 0$.
Dann existiert ein Intervall $\mathcal{U}$ um x_0, sodass f $\mathcal{U}$ bijektiv in ein Intervall $\mathcal{V}$ um $y_0 = f(x_0)$ abbildet.
Es existiert daher die inverse Funktion $f^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Für die Ableitung gilt:

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}}$$

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = x^2$ und $x_0 = 3$, $y_0 = f(x_0) = 9$.
Da $f'(x_0) = 6 \neq 0$, ist f um $x_0 = 3$ lokal invertierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{6}$$

Für $x_0 = 0$ liefert dieser Satz keine Aussage, da $f'(0) = 0$.

Satz über inverse Funktionen II

Seien $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{x}_0$ ein Punkt mit $|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| \neq 0$.
Dann existiert ein Rechteck $\mathcal{U}$ um $\mathbf{x}_0$, sodass $\mathbf{f}$ $\mathcal{U}$ bijektiv in ein Rechteck $\mathcal{V}$ um $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ abbildet.
Es existiert daher in $\mathcal{V}$ die inverse Funktion $\mathbf{f}^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Für die Ableitung gilt:

$$\boxed{D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}_0) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))^{-1}}$$

Die Determinante der Jacobischen Matrix wird auch als **Funktionaldeterminate** bezeichnet. Notation:

$$\boxed{\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = |D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|}$$

Beispiel

Sei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 \neq 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \neq 0.$$

$\mathbf{f}$ ist um alle $\mathbf{x}_0 \neq 0$ lokal invertierbar.

$$D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(1,1)) = (D\mathbf{f}(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{f}$ ist jedoch nicht bijektiv: $\quad \mathbf{f}(1,1) = \mathbf{f}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Explizite und implizite Funktion

Der Zusammenhang zwischen zwei Variablen x und y kann gegeben werden durch eine

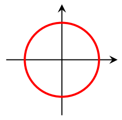
explizite Funktion:

$$y = f(x)$$

Beispiel:

$$y = x^2$$

existiert nicht



implizite Funktion:

$$F(x, y) = 0$$

Beispiel:

$$y - x^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Fragen:

- Wann kann man eine implizite Funktion (**lokal**) auch als explizite Funktion darstellen?
- Wie lautet die Ableitung von y nach der Variable x?

Fall: Lineare Funktion

Im Falle einer linearen Funktion

$$F(x, y) = ax + by$$

sind beide Fragen leicht zu beantworten:

$$ax + by = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x \qquad \textbf{(falls } F_y = b \neq 0\textbf{)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Fall: Allgemeine Funktion

Sei $F(x, y)$ eine Funktion und (x_0, y_0) ein Punkt mit $F(x_0, y_0) = 0$.

Wenn F nicht linear ist, dann können wir die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ im Punkt x_0 berechnen, indem wir die Funktion *lokal* durch das totale Differential von F ersetzen.

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy = d0 = 0$$

Daraus erhalten wir

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Beispiel

Gesucht ist die implizite Ableitung $\frac{dy}{dx}$ von

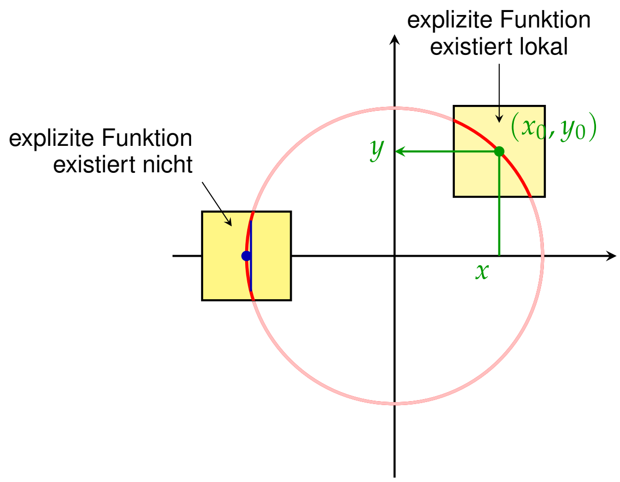
$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Wir können auch die Ableitung von x nach der Variable y ausrechnen:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}$$

Lokale Existenz einer expliziten Funktion



$y = f(x)$ existiert lokal, wenn $F_y \neq 0$.

Satz über implizite Funktionen

Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und sei (x_0, y_0) ein Punkt mit

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0\,.$$

Dann existiert ein Rechteck um (x_0, y_0), sodass gilt:

- $F(x,y) = 0$ hat dort eine eindeutige Lösung $y = f(x)$, und
- $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$

Sei $F(x,y) = x^2 + y^2 - 8$ und $(x_0, y_0) = (2,2)$.
Da $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) = 2\,y_0 = 4 \neq 0$, lässt sich y lokal als Funktion von x darstellen und $\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2x_0}{2y_0} = -1\,.$

Satz über implizite Funktionen II

Sei $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, y) \mapsto F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$, und sei $(\mathbf{x}_0, y)$ ein Punkt mit

$$F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad F_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0\,.$$

Dann existiert ein Rechteck um $(\mathbf{x}_0, y_0)$, sodass gilt:

- $F(\mathbf{x}, y) = 0$ hat dort eine eindeutige Lösung $y = f(\mathbf{x})$, wobei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und
- $\boxed{\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = -\dfrac{F_{x_i}}{F_y}}$

y ist die von uns ausgewählte Variable und muss nicht notwendigerweise an letzter Position stehen.

Beispiel

Gesucht ist $\frac{\partial x_2}{\partial x_3}$ der impliziten Funktion

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2\,x_3 + x_3^2 - x_3\,x_4 - 1 = 0$$

an der Stelle $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1{,}0{,}1{,}1)$.

Da $F(1{,}0{,}1{,}1) = 0$ und $F_{x_2}(1{,}0{,}1{,}1) = 1 \neq 0$ können wir x_2 lokal als Funktion von (x_1, x_3, x_4) darstellen: $x_2 = f(x_1, x_3, x_4)$.

Für die partielle Ableitung nach x_3 erhalten wir

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_3} = -\frac{F_{x_3}}{F_{x_2}} = -\frac{x_2 + 2\,x_3 - x_4}{x_3} = -1$$

An den Stellen $(1{,}1{,}1{,}1)$ und $(1{,}1{,}0{,}1)$ kann der Satz über implizite Funktionen nicht für x_2 angewendet werden:
$F(1{,}1{,}1{,}1) \neq 0$ und $F_{x_2}(1{,}1{,}0{,}1) = 0$.

Jacobische Matrix

Sei

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix} = 0$$

dann heißt

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Jacobische Matrix von $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bezüglich $\mathbf{y}$.

Analog: $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}}$

Satz über implizite Funktionen III

Sei $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$,

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \end{pmatrix}$$

und sei $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ ein Punkt mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\right| \neq 0 \quad \text{für } (\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0).$$

Dann existiert ein Rechteck um $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$, sodass gilt:

- $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ hat dort eine eindeutige Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, wobei $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und
- $\boxed{\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right)}$

Beispiel

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,x_2,y_1,y_2) \\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 + 3 \\ x_1^3 + x_2^3 + y_1^3 + y_2^3 - 11 \end{pmatrix}$

und $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = (1{,}1,\ 1{,}2)$.

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(1{,}1,\ 1{,}2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 & -2y_2 \\ 3y_1^2 & 3y_2^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(1{,}1,\ 1{,}2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbf{F}(1{,}1,\ 1{,}2) = 0$ und $\left|\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\right| = -12 \neq 0$ können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden und es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right) = -\frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Lokale Existenz einer inversen Funktion
- Ableitung einer inversen Funktion
- Explizite und implizite Funktionen
- Lokale explizite Darstellung einer impliziten Funktion
- Ableitung einer impliziten Funktion