Kapitel 7

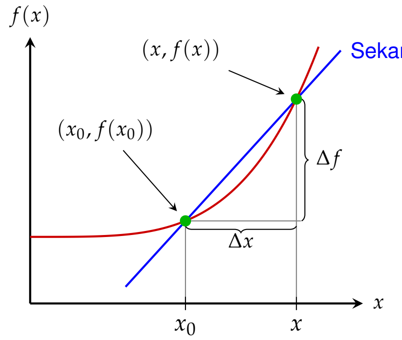
Differentialrechnung

Differenzenquotient*

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Quotient

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

heißt **Differenzenquotient** an der Stelle x_0.



Differentialquotient*

Falls der Limes

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existiert, so heißt die Funktion f **differenzierbar** an der Stelle x_0 und dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **(erste) Ableitung** der Funktion an der Stelle x_0.

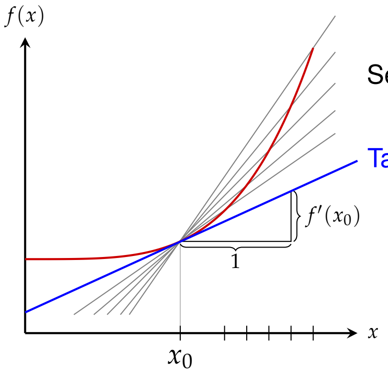
Eine Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Schreibweisen:

$$\boxed{f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

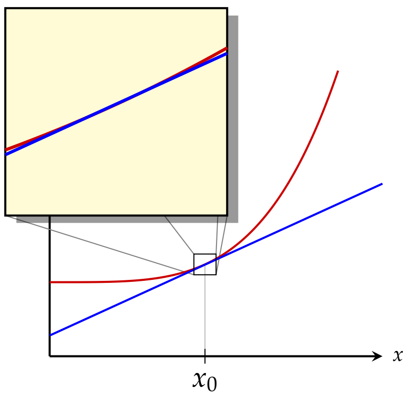
Graphische Interpretation des Differentialquotienten*

- Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.



Interpretation als „Grenzfunktion"*

- Marginalquote, oder „Grenzfunktion" einer Wirkungsgröße $y = f(x)$ bezüglich einer Faktorgröße x.



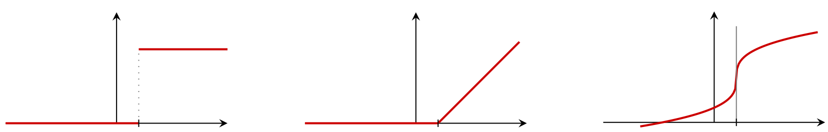
Existenz des Differentialquotienten*

Eine Funktion f ist differenzierbar in allen Punkten, in denen sich eine Tangente mit endlicher Steigung an den Graphen legen lässt.

In allen Punkten in denen das nicht möglich ist, ist die Funktion *nicht* differenzierbar.

Das sind vor allem

- Unstetigkeitsstellen („Sprungstellen")
- „Knicke" im Graph der Funktion
- Senkrechte Tangenten



Berechnung des Differentialquotienten*

Der Differentialquotient kann durch Bestimmen des Grenzwertes berechnet werden.

Sei $f(x) = x^2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - {x_0}^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{{x_0}^2 + 2\,x_0\,h + h^2 - {x_0}^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\,x_0\,h + h^2}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} (2\,x_0 + h) \\
&= 2\,x_0
\end{aligned}$$

Marginale Änderung*

Für kleine Werte von Δx können wir die Ableitung $f'(x_0)$ durch den Differenzenquotienten mit kleinem Δx abschätzen:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Daher können wir umgekehrt die Änderung Δf von f in der Nähe von x_0 für *kleine* Änderungen Δx abschätzen:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot \Delta x$$

Beachte:

- $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ist eine *lineare Funktion* von Δx.
- Diese Funktion ist die *bestmögliche* Approximation von f durch eine lineare Funktion in der *Nähe* von x_0.
- Diese Approximation ist nur für „kleine" Werte von Δx brauchbar.

Differential*

Der Approximationsfehler geht dabei schneller gegen 0 als Δx:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{|f(x+\Delta x) - f(h)) - f'(x_0)\cdot\Delta x|}{|\Delta x|} = 0$$

Wenn wir die Differenzen Δf und Δx durch *infinitesimale* („unendlich kleine") Größen df und dx ersetzen, erhalten wir das **Differential** der Funktion f an der Stelle x_0:

$$\boxed{df = f'(x_0)\,dx}$$

df und dx heißen die **Differentiale** der Funktion f bzw. der unabhängigen Variable x.

Differential*

Wir können das Differential von f als lineare Funktion in dx auffassen und damit die Funktion f näherungsweise berechnen.

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df$$

Sei $f(x) = e^x$.

Differential von f an der Stelle 1:
$df = f'(1)\,dx = e^1\,dx$

Approximation von $f(1{,}1)$ mit Hilfe dieses Differentials:
$\Delta x = (x_0 + dx) - x_0 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$

$f(1{,}1) \approx f(1) + df = e + e \cdot 0{,}1 \approx 2{,}99$

Zum Vergleich: $f(1{,}1) = 3{,}004166\ldots$

Ableitung einer Funktion*

Die Funktion

$$\boxed{f'\colon D \to \mathbb{R},\; x \mapsto f'(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_x}$$

heißt die **erste Ableitung** der Funktion f. Die Definitionsmenge D ist die Menge aller Punkte, in denen der Differentialquotient existiert.

Die Berechnung der Ableitung wird als **Ableiten** oder **Differenzieren** der Funktion bezeichnet.

Ableitung elementarer Funktionen*

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Differentiationsregeln*

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ Summenregel
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ Produktregel
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ Quotientenregel

Beispiel*

$$\left(3\,x^3 + 2\,x - 4\right)' = 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = 9\,x^2 + 2$$

$$\left(e^x \cdot x^2\right)' = (e^x)' \cdot x^2 + e^x \cdot \left(x^2\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2\,x$$

$$\left((3\,x^2 + 1)^2\right)' = 2\,(3\,x^2 + 1) \cdot 6\,x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a) \cdot x}\right)' = e^{\ln(a) \cdot x} \cdot \ln(a) = a^x\ \ln(a)$$

$$\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^3}\right)' = \frac{2x \cdot (1 - x^3) - (1 + x^2) \cdot 3x^2}{(1 - x^3)^2}$$

Höhere Ableitungen*

Die Ableitung einer Funktion kann wiederum differenziert werden.

Dadurch erhalten wir die

- **zweite Ableitung** $f''(x)$ der Funktion f,
- **dritte Ableitung** $f'''(x)$, usw.
- **n-te Ableitung** $f^{(n)}(x)$.

Die ersten 5 Ableitungen der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x - 3$ sind

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^4 + 2x^2 + 5x - 3)' = 4x^3 + 4x + 5 \\
f''(x) &= (4x^3 + 4x + 5)' = 12x^2 + 4 \\
f'''(x) &= (12x^2 + 4)' = 24x \\
f^{\mathrm{IV}}(x) &= (24x)' = 24 \\
f^{\mathrm{V}}(x) &= 0
\end{aligned}$$

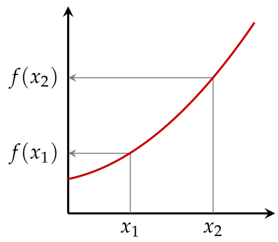
Monotonie*

Eine Funktion f heißt **monoton steigend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton steigend*, falls

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

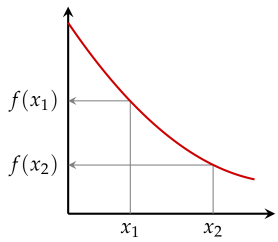


Eine Funktion f heißt **monoton fallend**, falls

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Sie heißt *streng monoton fallend*, falls

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$



Monotonie*

Für differenzierbare Funktionen gilt:

$$\boxed{\begin{array}{rcll} f \text{ monoton steigend} & \Leftrightarrow & f'(x) \geq 0 & \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ monoton fallend} & \Leftrightarrow & f'(x) \leq 0 & \text{für alle } x \in D_f \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcll} f \text{ streng monoton steigend} & \Leftarrow & f'(x) > 0 & \text{für alle } x \in D_f \\ f \text{ streng monoton fallend} & \Leftarrow & f'(x) < 0 & \text{für alle } x \in D_f \end{array}}$$

Die Funktion $f\colon (0,\infty),\ x \mapsto \ln(x)$ ist streng monoton steigend, da

$$f'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

Lokale Monotonie*

Eine Funktion kann in einem bestimmten Intervall monoton steigend, in einem anderen monoton fallend sein. Sie wird dann als **lokal monoton**, auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne erste Ableitung $f'(x)$.
2. Bestimme Nullstellen von $f'(x)$.
3. Erhalte Intervalle, in denen $f'(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle “geeigneten” Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von $f'(x)$.
5. $f'(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

Beispiel – Lokale Monotonie*

In welchen Bereichen ist $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 18\,x - 1$ monoton?

Suchen den Bereich, wo $f'(x) \geq 0$:

1. $f'(x) = 6\,x^2 - 24\,x + 18$
2. Nullstellen: $x^2 - 4\,x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$
3. Erhalte 3 Intervalle: $(-\infty,1]$, $[1,3]$ und $[3,\infty)$
4. Vorzeichen von $f(x)$ an "geeigneten" Punkt in jedem Intervall: $f'(0) = 3 > 0$, $f'(2) = -1 < 0$ und $f'(4) = 3 > 0$.
5. $f'(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern: $f'(x) \geq 0$ in $(-\infty,1]$ und $[3,\infty)$.

Die Funktion $f(x)$ ist monoton steigend in $(-\infty,1] \cup [3,\infty)$.

Monontonie und inverse Funktion*

Beachte:
Falls f *streng monoton* steigend ist, dann folgt aus

$$x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

sofort auch

$$x_1 \neq x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

M.a.W., f ist injektiv. Falls f auch surjektiv ist, ist f somit *invertierbar*.

Falls eine surjektive Funktion f streng monoton steigend oder fallend ist, dann ist sie auch invertierbar.

(Die Umkehrung gilt jedoch nicht.)

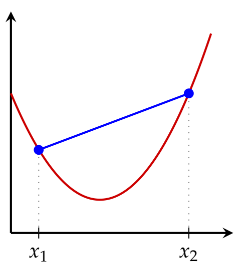
Konvexität und Konkavität*

Eine Funktion f heißt **konvex**, wenn

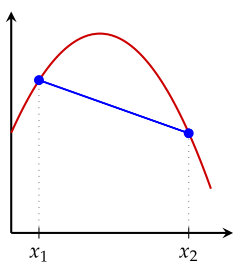
$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) \leq (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$

für alle $x_1, x_2 \in D_f$ und alle $h \in [0,1]$. Sie heißt **konkav**, wenn

$$\boxed{f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) \geq (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)}$$



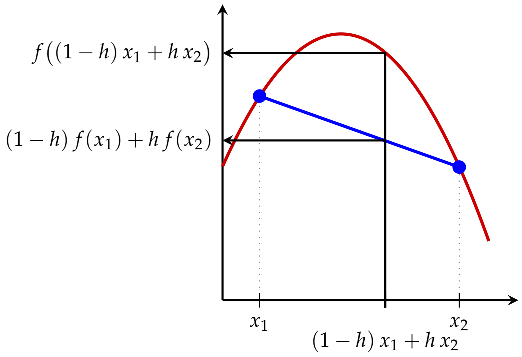
konvex



konkav

Konkave Funktion*

$$f\big((1-h)\,x_1 + h\,x_2\big) \;\geq\; (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)$$

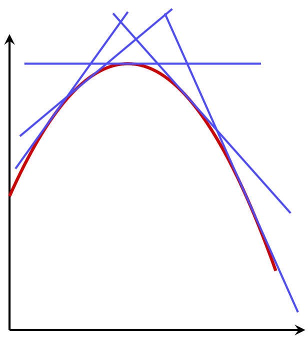


Sehne unterhalb des Funktionsgraphen.

Konvexität und Konkavität*

Für differenzierbare Funktionen gilt:

f konvex	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$	für alle $x \in D_f$
f konkav	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$	für alle $x \in D_f$



$f'(x)$ ist monoton fallend,
daher $f''(x) \leq 0$

Streng konvex / konkav*

Eine Funktion f heißt **streng konvex**, wenn

$$f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) < (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ und alle $h \in (0,1)$.

Sie heißt **streng konkav**, wenn

$$f((1-h)\,x_1 + h\,x_2) > (1-h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)$$

Für differenzierbare Funktionen gilt:

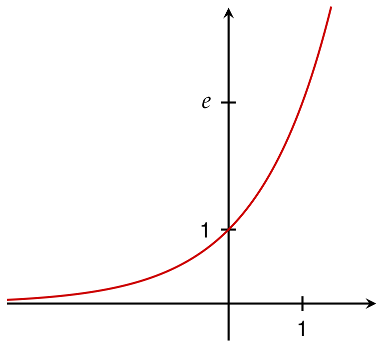
f streng konvex	$\Leftarrow$	$f''(x) > 0$	für alle $x \in D_f$
f streng konkav	$\Leftarrow$	$f''(x) < 0$	für alle $x \in D_f$

Beispiel – konvex*

Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\exp(x)$ ist (streng) konvex.

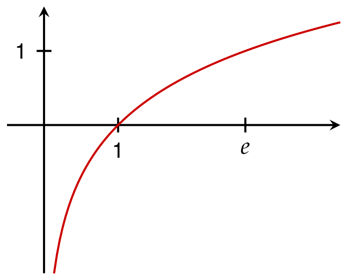


Beispiel – konkav*

Logarithmusfunktion: $(x > 0)$

$$f(x) = \ln(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{für alle } x > 0$$

$\ln(x)$ ist (streng) konkav.



Lokale Konkavität*

Eine Funktion kann auch auf einem bestimmten Intervall konkav, auf einem anderen konvex sein. Sie wird dann als **lokal konkav**, bzw. **lokal konvex** auf dem entsprechenden Abschnitt bezeichnet.

Für *stetig* differenzierbare Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Berechne zweite Ableitung $f''(x)$.
2. Bestimme Nullstellen von $f''(x)$.
3. Erhalte Intervalle, in denen $f''(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt.
4. Wähle "geeigneten" Punkt in jedem Intervall und bestimme dort das Vorzeichen von $f''(x)$.
5. $f''(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern.

Beispiel – Lokale Konkavität*

In welchem Bereich ist $f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 18\,x - 1$ konkav?

Suchen den Bereich, wo $f''(x) \leq 0$.

1. $f''(x) = 12\,x - 24$
2. Nullstellen: $12\,x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
3. Erhalte 2 Intervalle: $(-\infty{,}2]$ und $[2, \infty)$
4. Vorzeichen von $f(x)$ an "geeigneten" Punkt in jedem Intervall: $f''(0) = -24 < 0$ und $f''(4) = 24 > 0$.
5. $f''(x)$ kann innerhalb eines Intervalls das Vorzeichen nicht ändern: $f''(x) \leq 0$ in $(-\infty{,}2]$

Die Funktion $f(x)$ ist konkav in $(-\infty{,}2]$.

Elastizität*

Die erste Ableitung einer Funktion gibt die *Änderungsrate* einer Funktion f an der Stelle x_0 in *absoluten* Zahlen an. Sie ist somit abhängig von der *Skalierung* von Argument und Funktionswert.

Wir sind aber in vielen Fällen an *relativen* Änderungsraten interessiert.

Skaleninvarianz und *relative* Änderungsraten erhalten wir durch

$$\frac{\text{Änderung des Funktionswertes in \% des Funktionswertes}}{\text{Änderung des Arguments in \% des Argumentes}}$$

bzw. für die marginale Änderungsrate

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Elastizität*

Der Ausdruck

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

heißt die **Elastizität** von f an der Stelle x.

Sei $f(x) = 3\,e^{2x}$. Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{6\,e^{2x}}{3\,e^{2x}} = 2\,x$$

Sei $f(x) = \beta\,x^\alpha$. Dann ist

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{\beta\,\alpha\,x^{\alpha-1}}{\beta\,x^\alpha} = \alpha$$

Elastische Funktionen*

Eine Funktion f heißt in x

- **elastisch**, falls $\left| \varepsilon_f(x) \right| > 1$
- **1-elastisch**, falls $\left| \varepsilon_f(x) \right| = 1$
- **unelastisch**, falls $\left| \varepsilon_f(x) \right| < 1$

Für eine elastische Funktion gilt daher:
Der Funktionswert ändert sich *relative* stärker als das Argument.

Die Funktion $f(x) = 3\,e^{2x}$ ist [$\varepsilon_f(x) = 2\,x$]

- 1-elastisch, für $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$;
- unelastisch, für $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$;
- elastisch, für $x < -\frac{1}{2}$ oder $x > \frac{1}{2}$.

elastische Nachfragefunktion*

Sei $q(p)$ eine *elastische* Nachfragefunktion, p der Preis.
Es gilt: $p > 0$, $q > 0$, und $q' < 0$ (q ist monoton fallend). Also gilt

$$\varepsilon_q(p) = p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)} < -1$$

Was passiert mit dem Umsatz (= Preis $\times$ Absatz)?

$$\begin{aligned} u'(p) &= (p \cdot q(p))' = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p) \\ &= q(p) \cdot (1 + \underbrace{p \cdot \frac{q'(p)}{q(p)}}_{=\varepsilon_q < -1}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Das heißt, der Umsatz nimmt ab, falls wir den Preis erhöhen.

Elastizität II*

Wir können die relative Änderungsrate von f ausdrücken als Ableitung

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Was passiert, wenn wir $\ln(f(x))$ nach $\ln(x)$ ableiten?

Sei $v = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^v$

Ableiten mittels Kettenregel ergibt:

$$\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \frac{d(\ln(f(e^v)))}{dv} = \frac{f'(e^v)}{f(e^v)}\, e^v = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x = \varepsilon_f(x)$$

$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))}}$$

Elastizität II*

Wir können die Kettenregel *formal* auch so schreiben:

Sei

- $u = \ln(y)$,
- $y = f(x)$,
- $x = e^v \quad \Leftrightarrow \quad v = \ln(x)$

Dann erhalten wir

$$\frac{d(\ln f)}{d(\ln x)} = \frac{du}{dv} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = \frac{1}{y} \cdot f'(x) \cdot e^v = \frac{f'(x)}{f(x)}\, x$$

Partielle Ableitung*

Wir untersuchen die Änderung einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, wenn wir eine Variable x_i variieren und alle anderen konstant lassen.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}}$$

heißt die (erste) **partielle Anleitung** von f nach x_i.

Es haben sich eine Reihe von weiteren Symbolen für die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eingebürgert:

- $f_{x_i}(\mathbf{x})$ (Ableitung nach der Variable x_i)
- $f_i(\mathbf{x})$ (Ableitung nach der i-ten Variable)
- $f_i'(\mathbf{x})$ (i-te Komponente des Gradienten)

Berechnung der partiellen Ableitung*

Wir erhalten die partielle Ableitung nach x_i, wenn wir alle anderen Variablen als Konstante auffassen und f nach den bekannten Regeln für Funktionen in einer Variable nach x_i ableiten.

Erste partiellen Ableitungen von

$$f(x_1, x_2) = \sin(2\,x_1) \cdot \cos(x_2)$$

$$f_{x_1} = 2 \cdot \cos(2\,x_1) \cdot \underbrace{\cos(x_2)}_{\text{als Konstante betrachtet}}$$

$$f_{x_2} = \underbrace{\sin(2\,x_1)}_{\text{als Konstante betrachtet}} \cdot (-\sin(x_2))$$

Höhere partielle Ableitungen*

Analog zu den Funktionen in einer Variablen können wir partielle Ableitungen nochmals ableiten und erhalten so **höhere partielle Ableitungen**.

$$\boxed{f_{x_i x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})}$$

Falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und *stetig* sind, dann kommt auf die Reihenfolge beim Differenzieren nicht an.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x})}$$

Beispiel*

Gesucht sind alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = x^2 + 3\,x\,y$$

Erste partielle Ableitungen:

$$f_x = 2\,x + 3\,y \qquad f_y = 0 + 3\,x$$

Zweite partielle Ableitungen:

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 2 & f_{xy} = \boxed{3} \\ f_{yx} = \boxed{3} & f_{yy} = 0 \end{array}$$

Partielle Elastizitäten*

Die **partiellen Elastizitäten** geben *relative* Änderungsraten bezüglich den einzelnen Variablen an.

$$\boxed{\varepsilon_{f,i}(\mathbf{x}) = x_i \cdot \frac{f_{x_i}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}}$$

Gesucht sind die partiellen Elastizitäten von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$$

$$\varepsilon_{f,1}(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \frac{f_{x_1}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = x_1 \cdot \frac{2\,x_1}{x_1^2 + x_2^3} = \frac{2\,x_1^2}{x_1^2 + x_2^3}$$

$$\varepsilon_{f,2}(\mathbf{x}) = x_2 \cdot \frac{f_{x_2}(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} = x_2 \cdot \frac{3\,x_2^2}{x_1^2 + x_2^3} = \frac{3\,x_2^3}{x_1^2 + x_2^3}$$

Kreuzpreiselastizität*

Zwei Güter werden zu den Preisen p_1 bzw. p_2 angeboten. Die Nachfrage q_1 nach Gut 1 hängt nicht nur vom Preis für Gut 1 ab, sondern auch vom Preis des anderen Gutes:

$$\mathbf{q}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} q_1(p_1, p_2) \\ q_2(p_1, p_2) \end{pmatrix}$$

Die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{q_1,2}(\mathbf{p})$ und $\varepsilon_{q_2,1}(\mathbf{p})$ heißen die **Kreuzpreiselastizitäten**.

- $\varepsilon_{q_i,j}(\mathbf{p}) > 0 \quad \Rightarrow$ Güter sind *Substitute*
- $\varepsilon_{q_i,j}(\mathbf{p}) < 0 \quad \Rightarrow$ Güter sind *komplementär*
- $\varepsilon_{q_i,j}(\mathbf{p}) = 0 \quad \Rightarrow$ Güter ohne Beziehung

Im Allgemeinen ist $\quad \varepsilon_{q_1,2}(\mathbf{x}) \neq \varepsilon_{q_2,1}(\mathbf{x})$.

Der Gradient

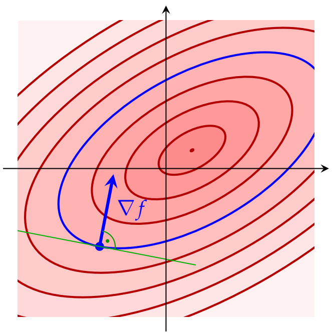
Wir fassen die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu einem Zeilenvektor, dem **Gradienten** an der Stelle $\mathbf{x}$, zusammen.

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}))}$$

- ∇f heißt auch „Nabla f“.
- Der Gradient wird oft auch als Spaltenvektor geschrieben.
- Andere Notationen: $\quad f'(\mathbf{x})$
- Der Gradient „spielt“ die gleiche Rolle wie die erste Ableitung bei Funktionen in einer Variablen.

Eigenschaften des Gradienten

- Der Gradient einer Funktion f zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von f.
- Seine Länge gibt diese Steigung an.
- Der Gradient steht immer normal auf die entsprechende Niveaulinie.



Beispiel

Gesucht ist der Gradient von

$$f(x,y) = x^2 + 3\,x\,y$$

an der Stelle $\mathbf{x} = (3,2)$.

$$f_x = 2\,x + 3\,y$$
$$f_y = 0 + 3\,x$$

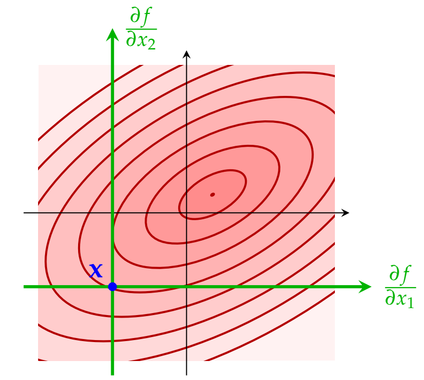
$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x + 3y,\ 3x)$$

$$\nabla f(3{,}2) = (12, 9)$$

Die Richtungsableitung

Wir erhalten die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ durch Ableiten der univariaten Funktion $g(t) = f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) = f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{h})$ mit $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$ an der Stelle $t = 0$:

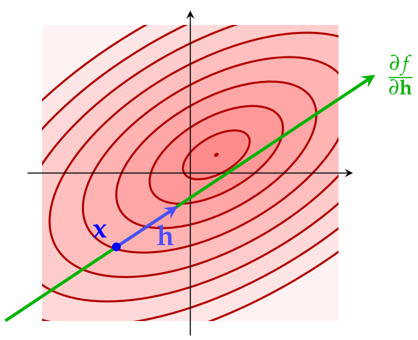
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{h})\right|_{t=0}$$



Die Richtungsableitung

Verallgemeinerung:
Wir erhalten die **Richtungsableitung** $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}$ in Richtung $\mathbf{h}$ mit Länge 1 durch Ableiten der univariaten Funktion $g(t) = f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{h})$ an der Stelle $t = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{h})\right|_{t=0}$$



Die Richtungsableitung gibt die Änderung von f an, wenn wir $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{h}$ verschieben.

Die Richtungsableitung

Es gilt (für $\|\mathbf{h}\| = 1$):

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(\mathbf{x}) \cdot h_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}) \cdot h_n = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

Falls $\mathbf{h}$ nicht Norm 1 hat, muss zuerst normiert werden:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}}$$

Beispiel

Wir suchen die Richtungsableitung von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3\,x_1\,x_2$$

nach $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ an der Stelle $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Norm von $\mathbf{h}$:

$$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{\mathbf{h}^t\,\mathbf{h}} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Die Richtungsableitung lautet daher

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(12, 9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Das totale Differential

Wir wollen eine Funktion f durch eine lineare Funktion so approximieren, dass der Fehler möglichst klein ist.
Den Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ können wir näherungsweise analog zur Richtungsableitung berechnen.

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx f_{x_1}(\mathbf{x})\,h_1 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\,h_n$$

Das totale Differential erhalten wir, wenn wir die h_i durch „unendlich kleine“ Differentiale dx_i ersetzen.

Die *lineare Funktion*

$$\boxed{df = f_{x_1}(\mathbf{x})\,dx_1 + \ldots + f_{x_n}(\mathbf{x})\,dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\,dx_i}$$

heißt das **totale Differential** von f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Beispiel

Wir suchen das totale Differential von

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3\, x_1\, x_2$$

an der Stelle $\mathbf{x} = (3{,}2)$.

$$df = f_{x_1}(3{,}2)\, dx_1 + f_{x_2}(3{,}2)\, dx_2 = 12\, dx_1 + 9\, dx_2$$

Approximation von $f(3{,}1; 1{,}8)$ mit Hilfe des totalen Differentials:

$$\begin{aligned} f(3{,}1; 1{,}8) &\approx f(3; 2) + df \\ &= 27 + 12 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot (-0{,}2) = 26{,}40 \end{aligned}$$

Zum Vergleich: $f(3{,}1; 1{,}8) = 26{,}35$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$$

Differenzierbarkeit

Satz:
Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 genau dann, wenn es eine lineare Abbildung ℓ gibt, die f in x_0 bestmöglich approximiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|(f(x_0 + h) - f(x_0)) - \ell(h)|}{|h|} = 0$$

Offensichtlich: $\ell(h) = f'(x_0) \cdot h$ ist das Differential von f.

Definition:
Eine Abbildung $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *heißt* differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, wenn es eine lineare Abbildung ℓ gibt, die $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ bestmöglich approximiert:

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\|(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) - \ell(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

$\ell(\mathbf{h}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{h}$ heißt das Differential von $\mathbf{f}$.

Jacobische Matrix

Die $m \times n$-Matrix

$$\boxed{D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

heißt die **Jacobische Matrix** von $\mathbf{f}$ and der Stelle $\mathbf{x}_0$.

Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $Df(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

Wir können $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ auch schreiben als

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Beispiel

- $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \nabla f(\mathbf{x}) \\ &= (-2\,x_1 \exp(-x_1^2 - x_2^2), -2\,x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2)) \end{aligned}$$

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 2\,x_2 \\ 2\,x_1 & -2\,x_2 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$D\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Kettenregel

Seien $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\boxed{D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \qquad D\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,x & -2\,y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) &= D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\,e^x & 2\,e^y \\ 2\,e^x & -2\,e^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\,e^{2x} & 2\,e^{2y} \\ 2\,e^{2x} & -2\,e^{2y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel – Richtungsableitung

Wir können die Richtungsableitung von $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
in Richtung $\mathbf{h}$ (mit $\|\mathbf{h}\| = 1$) an der Stelle $\mathbf{x}_0$ auch so herleiten:

Sei $\mathbf{s}(t)$ ein Weg in Richtung $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{s}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &Df(\mathbf{s}(0)) = Df(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \\ &D\mathbf{s}(0) = \mathbf{h} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}} = D(f \circ \mathbf{s})(0) = Df(\mathbf{s}(0)) \cdot D\mathbf{s}(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$

Beispiel – Indirekte Abhängigkeit

Sei $f(x_1, x_2, t)$ wobei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ebenfalls von t abhängen.
Wie ändert sich f mit t?

Kettenregel:

Sei $\mathbf{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= D(f \circ \mathbf{x})(t) = Df(\mathbf{x}(t)) \cdot D\mathbf{x}(t) \\
&= \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = (f_{x_1}(\mathbf{x}(t)), f_{x_2}(\mathbf{x}(t)), f_t(\mathbf{x}(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= f_{x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + f_{x_2}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_2'(t) + f_t(\mathbf{x}(t)) \\
&= f_{x_1}(x_1, x_2, t) \cdot x_1'(t) + f_{x_2}(x_1, x_2, t) \cdot x_2'(t) + f_t(x_1, x_2, t)
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Differenzen- und Differentialquotient
- Differential
- Ableitung und höhere Ableitungen
- Monotonie
- Konkav und konvex
- Elastizität
- Partielle Ableitungen und Elastizität
- Gradient
- Richtungsableitung
- Totales Differential
- Jacobische Matrix
- Kettenregel