Kapitel 6

Funktionen

Reelle Funktion*

Reelle Funktionen sind Abbildungen, in denen sowohl die Definitionsmenge als auch die Wertemenge Teilmengen von $\mathbb{R}$ (üblicherweise Intervalle) sind.

Bei reellen Funktionen wird meist weder Definitionsmenge noch Wertemenge angegeben. In diesem Fall gilt:

- Die *Definitionsmenge* ist die größtmögliche *sinnvolle* Teilmenge von $\mathbb{R}$, in der die Zuordnungsvorschrift definiert ist.
- Die *Wertemenge* ist die **Bildmenge**

$$f(D) = \{y \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\} \ .$$

Beispiel*

Die Produktionsfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist eine Abkürzung für

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

(Es gibt keine „negativen" Produktionsmengen.
Ausserdem ist $\sqrt{x}$ für $x < 0$ nicht reell!)

Die abgeleitete Funktion $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist eine Abkürzung für

$$f'\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ x \mapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

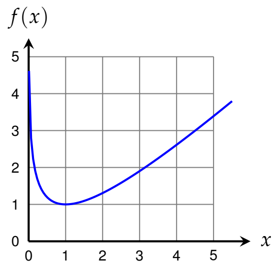
(Beachten sie das offene Intervall $(0,\infty)$.
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist für $x = 0$ nicht definiert!)

Graph einer Funktion*

Jedem Paar $(x, f(x))$ entspricht ein Punkt in der xy-Ebene. Die Menge aller dieser Punkte bildet eine Kurve und heißt **Graph** der Funktion.

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in D_f\}$$

Wir können Funktionen mit Hilfe des Graphen veranschaulichen. Viele Eigenschaften von Funktionen lassen sich bereits aus deren Graphen herauslesen.



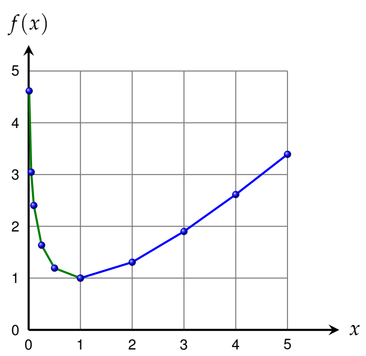
$$f(x) = x - \ln(x)$$

Zeichnen eines Graphen*

1. Wir überlegen uns zuerst wie der Graph wahrscheinlich aussehen wird. Graphen von elementaren Funktionen sollten bereits aus dem Gedächtnis skizziert werden können.
2. Wir wählen einen geeigneten Bereich auf der x-Achse aus. (Er sollte einen charakteristischen Ausschnitt zeigen.)
3. Wir erstellen eine Wertetabelle und zeichnen die entsprechenden Zahlenpaare in der xy-Ebene ein.

   Charakteristische Punkte wie etwa lokale Extrema oder Wendepunkte sollten verwendet werden.
4. Wir überprüfen, ob aus den gezeichneten Punkten der Verlauf der Kurve ersichtlich ist. Andernfalls verlängern wir die Wertetabelle um einige geeignete Werte.
5. Die eingezeichneten Punkte werden in geeigneter Weise miteinander verbunden.

Beispiel*



Graph der Funktion

$$f(x) = x - \ln x$$

Wertetabelle:

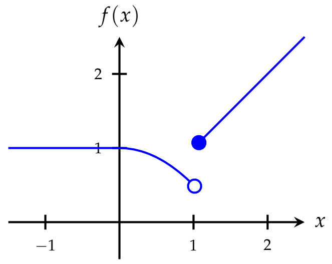
x	$f(x)$
0	ERROR
1	1
2	1,307
3	1,901
4	2,614
5	3,391
0,5	1,193
0,25	1,636
0,1	2,403
0,05	3,046

Stückweise definierte Funktionen*

Die Zuordnungsvorschrift einer Funktion kann auch in verschiedenen Intervallen des Definitionsbereichs verschieden definiert sein.

An den Intervallgrenzen müssen wir dann kennzeichnen, welche Punkte Bestandteil des Graphen sind:

- $\bullet$ (Bestandteil) und $\circ$ (nicht Bestandteil).



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Bijektivität*

Jedes Argument besitzt immer genau ein Bild. Die Anzahl der Urbilder eines Elementes $y \in W$ kann jedoch beliebig sein. Wir können daher Funktionen nach der Anzahl der Urbilder einteilen.

- Eine Abbildung f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *höchstens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus der Wertemenge *mindestens* ein Urbild besitzt.
- Sie heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Eine Funktion besitzt genau dann eine *Umkehrfunktion* wenn sie *bijektiv* ist.

Horizontalen-Test*

Wie kann man feststellen, ob eine reelle Funktion injektiv / surjektiv ist? Wie viele Urbilder kann ein $y \in W_f$ besitzen?

(1) Wir zeichnen den Graphen der zu untersuchenden Funktion.

(2) Wir zeichnen ein $y \in W$ auf der y-Achse ein und legen eine Gerade parallel zur x-Achse (Horizontale) durch diesen y-Wert.

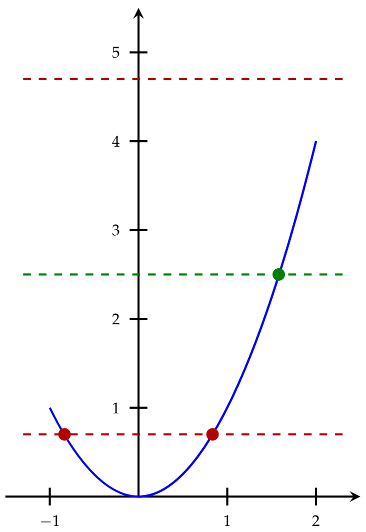
(3) Die Anzahl der Schnittpunkte von Horizontale und Graph ist die Anzahl der Urbilder von y.

(4) Wir wiederholen (2) und (3) für eine *repräsentative* Auswahl von y-Werten.

(5) Interpretation: Schneidet jede Horizontale den Graphen in

- **(a)** *höchstens* einem Punkt, so ist f **injektiv**;
- **(b)** *mindestens* einem Punkt, so ist f **surjektiv**;
- **(c)** *genau* einem Punkt, so ist f **bijektiv**.

Beispiel*



$f\colon [-1{,}2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

- ist nicht injektiv;
- ist nicht surjektiv;

$f\colon [0{,}2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

- ist injektiv;
- ist nicht surjektiv;

$f\colon [0{,}2] \to [0{,}4],\ x \mapsto x^2$

- ist bijektiv;

Definitions- und Wertemenge sind Bestandteil der Funktion!

Die zusammengesetzte Funktion*

Seien $f\colon D_f \to W_f$ und $g\colon D_g \to W_g$ Funktionen mit $W_f \subseteq D_g$.
Dann heißt die Funktion

$$\boxed{g \circ f\colon D_f \to W_g,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

zusammengesetzte Funktion („*g zusammengesetzt f*“).

Seien $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\ x \mapsto g(x) = x^2,$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = 3x - 2.$

Dann ist $(g \circ f)\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),$
$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2$

und $(f \circ g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2$

Inverse Funktion*

Eine **bijektive** Funktion $f\colon D_f \to W_f$ besitzt eine **Umkehrfunktion** $f^{-1}\colon W_f \to D_f$ mit der Eigenschaft $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, i.e.,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Die Zuordnungsvorschrift der inversen Abbildung einer reellen Funktion erhalten wir durch Vertauschen der Rollen von Argument x und Bild y.

Beispiel*

Zur Berechnung der inversen Funktion drücken wir x als Funktion von y aus.

Wir suchen die Umkehrfunktion von

$$y = f(x) = 2x - 1$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(y+1) = x$$

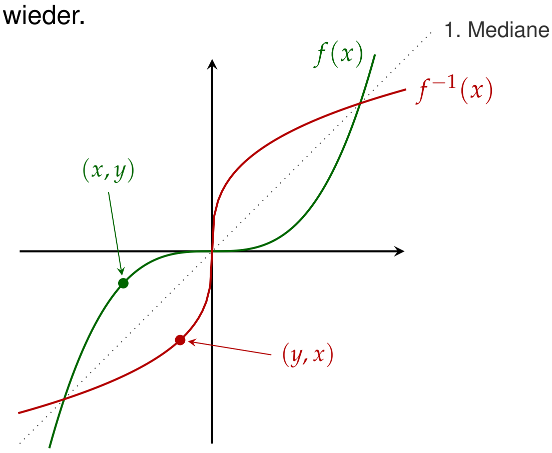
Die Umkehrfunktion lautet daher $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)$.
Da es üblich ist, das Argument mit x zu bezeichnen, schreiben wir

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x+1)$$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Geometrische Interpretation*

Das Vertauschen von x und y spiegelt sich auch im Graphen der Umkehrfunktion wieder.



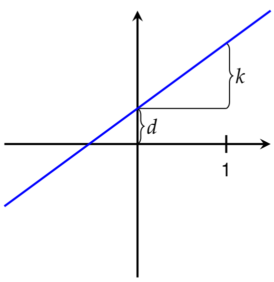
(Graph der Funktion $f(x) = x^3$ und ihrer Inversen.)

Lineare Funktion und Absolutbetrag*

- **lineare Funktion**

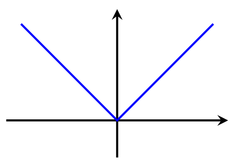
  $$\boxed{f(x) = k\,x + d}$$

  k ... **Steigung**
  d ... **konstantes Glied**



- **Betragsfunktion**

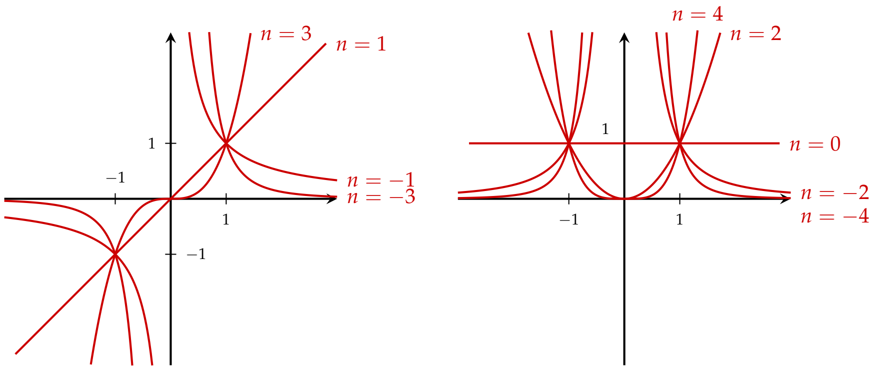
  $$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



Potenzfunktion*

Potenzfunktion mit ganzzahligen Exponenten:

$$\boxed{f\colon x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}} \qquad D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } n \geq 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$



Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x^0 = 1 \qquad (x \neq 0)$$

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m \qquad x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \qquad (x \geq 0)$$

$$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m} \qquad x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad (x \geq 0)$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \qquad (x \geq 0)$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Achtung!

$-x^2$ ist **nicht** gleich $(-x)^2$

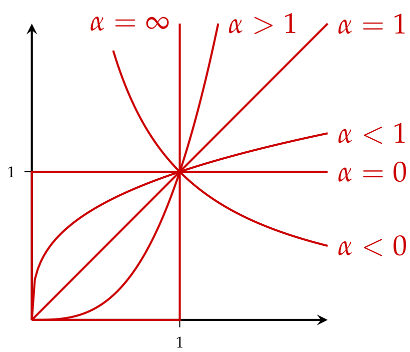
$(x+y)^n$ ist **nicht** gleich $x^n + y^n$

$x^n + y^n$ kann (im Allgemeinen) **nicht** vereinfacht werden!

Potenzfunktion II*

Potenzfunktion mit reellen Exponenten:

$$\boxed{f\colon x \mapsto x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$



Polynome und rationale Funktionen*

- **Polynome** von Grad n:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$

$a_i \in \mathbb{R}$, für $i = 1, \ldots, n$
$a_n \neq 0$

- **Rationale Funktionen:**

$$\boxed{D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}}$$

$p(x)$ und $q(x)$ sind Polynome
$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme*

Seien $b, c, e \neq 0$

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \frac{a}{b} : \frac{e}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{e}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b} \qquad \frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a \cdot c + d \cdot b}{b \cdot c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{e}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot e}$$

Bei der Addition zuerst auf **gemeinsamen Nenner** bringen!

Rechenregeln für Brüche und Bruchterme*

Achtung!

$\frac{a+c}{b+c}$ ist **nicht** gleich $\frac{a}{b}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ist **nicht** gleich $\frac{x+y}{a+b}$

$\frac{a}{b+c}$ ist **nicht** gleich $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

$$\frac{x+2}{y+2} \neq \frac{x}{y} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{1}{5}.$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

Exponentialfunktion*

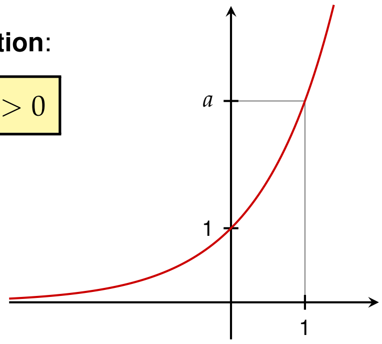
- **Exponentialfunktion**:

$$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(x) = e^x}$$

$e = 2{,}7182818\ldots$ *Eulersche Zahl*

- **Allgemeine Exponentialfunktion**:

$$\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x \qquad a > 0}$$



Logarithmusfunktion*

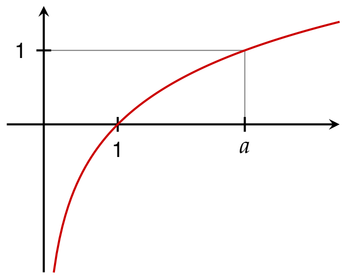
- **Logarithmusfunktion**:

Inverse Funktion zur *Exponentialfunktion*.

$$\boxed{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x) = \ln(x)}$$

- **Allgemeine Logarithmusfunktion** zur Basis a

$$\boxed{\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)}$$



Rechnen mit Exponenten und Logarithmus*

Eine Zahl y heißt Logarithmus von x zur Basis a, falls $a^y = x$. Der Logarithmus ist der Exponent einer Zahl bezüglich einer Basis a. Wir schreiben dafür

$$y = \log_a(x) \qquad [\Leftrightarrow \quad x = a^y\,]$$

Wichtige Logarithmen:

- **natürlicher Logarithmus** $\ln(x)$ zur Basis $e = 2{,}7182818\ldots$ (*Eulersche Zahl*)
- **dekadischer Logarithmus** $\lg(x)$ zur Basis 10

Rechnen mit Exponenten und Logarithmus*

Umrechnungsformel:

$$\boxed{a^x = e^{x\ln(a)} \qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Achtung:
Oft schreibt man nur $\log(x)$ ohne Basisangabe.
In diesem Fall ist (sollte) die verwendete Basis aus dem Zusammenhang oder einer Konvention ersichtlich sein.

- Im mathematischen Bereich: natürlicher Logarithmus
  Finanzmathematik, Programme wie R, *Mathematica*, Maxima, ...
- Im technischen Bereich: dekadischer Logarithmus
  Wirtschaftswissenschaften, Taschenrechner, Excel, ...

Rechenregeln für Exponenten und Logarithmus*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a(a^x) = x$$

$$\log_a(\tfrac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \log_a(1) = 0$$

$$\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x) \qquad \log_a(a) = 1$$

Achtung:
$\log_a(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert!
$\log_a(x + y)$ ist **nicht** gleich $\log_a(x) + \log_a(y)$.

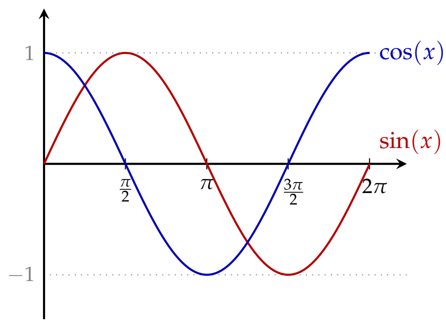
Winkelfunktionen*

- **Sinusfunktion**:

  $$\boxed{\mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)}$$

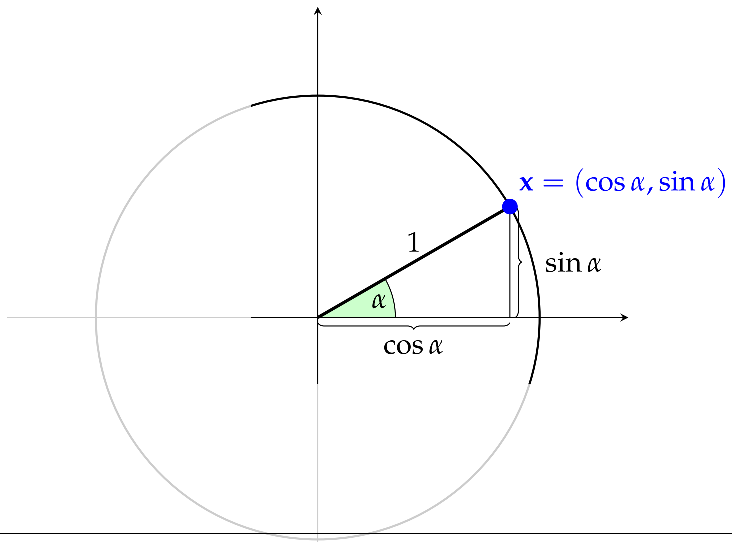
- **Cosinusfunktion**:

  $$\boxed{\mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)}$$



Achtung!
x wird im *Bogenmaß* (*Radiant*) angegeben, d.h., ein rechter Winkel entspricht $x = \pi/2$.

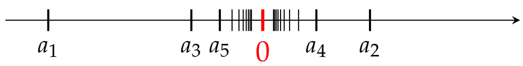
Sinus und Cosinus*



Grenzwert einer Folge*

Betrachten wir die Folge von Zahlen

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n \tfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots\right)$$



Die Folgenglieder *„streben"* mit wachsendem n gegen 0.
Wir sagen, die Folge (a_n) **konvergiert** gegen 0.

Wir schreiben dafür

$$\boxed{(a_n) \to 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Grenzwert einer Folge / Definition*

Definition:
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** (Limes) einer Folge (a_n), wenn es für jedes noch so kleine Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ein N gibt, sodass $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für alle $n \geq N$.
M.a.W.: alle Folgenglieder ab a_N liegen im Intervall.

Äquivalente Formulierung:
Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

[Mathematiker verwenden gerne ε für eine ganz kleine positive Zahl.]

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**.
Sie **konvergiert** gegen ihren Grenzwert.

Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert.
So eine Folge heißt **divergent**.

Grenzwert / Beispiele*

Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{n-1}{n+1})_{n=1}^{\infty} = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots)$ ist konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

Die Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1,1,-1,1,-1,1,\dots)$ ist divergent.

Die Folge $(d_n)_{n=1}^{\infty} = (2^n)_{n=1}^{\infty} = (2,4,8,16,32,\dots)$ ist divergent, strebt aber gegen ∞. Man schreibt daher (nicht ganz korrekt):

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$$

Grenzwerte wichtiger Folgen*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0 \\ 1 & \text{für } a = 0 \\ \infty & \text{für } a > 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \\ \nexists & \text{für } q \leq -1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{q^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| > 1 \\ \infty & \text{für } 0 < q < 1 \\ \nexists & \text{für } -1 < q < 0 \end{cases} \qquad (|q| \notin \{0,1\})}$$

Rechenregeln*

Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$; und $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \lim_{n\to\infty} (k \cdot a_n + d) = k \cdot a + d & \\
(2) & \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b & \\
(3) & \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b & \\
(4) & \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} & \text{für } b \neq 0 \\
(5) & \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = 0 & \text{falls } a = 0 \\
(6) & \lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k &
\end{array}$$

Rechenregeln / Beispiele*

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2 + 3 \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{-2}}_{=0} = 2 + 3 \cdot 0 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}(2^{-n}\cdot n^{-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{3}{n^2})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(n)}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} = 0$$

Die Eulersche Zahl*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590\ldots}$$

Dieser Grenzwert ist in der Finanzmathematik wichtig (stetige Verzinsung).

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^n \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} && \left(m=\frac{n}{x}\right) \\
&= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x
\end{aligned}$$

Dreiecksungleichung

Für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$$

Beweis:
Wir verwenden

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad x \leq |x|$$

Zwei Fälle:

1. $(a+b) \geq 0$: $\quad |a+b| = a+b \leq |a|+|b|$.

2. $(a+b) < 0$: $\quad |a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) \leq |a|+|b|$.

Dreiecksungleichung / Anwendung

Seien $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$ zwei konvergente Folgen. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \qquad \text{(Regel 2)}$$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
$(a_n) \to a$ heißt: Es gibt ein N_a sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_a$.
$(b_n) \to b$ heißt: Es gibt ein N_b sodass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_b$.
Daher gilt für alle $n \geq N = \max(N_a, N_b)$:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a+b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\overset{\text{[Dreiecksungleichung]}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

I.e.: $(a_n + b_n) \to (a+b)$ q.e.d.

Grenzwert einer Funktion*

Was passiert mit dem Funktionswert einer Funktion f, wenn das Argument x gegen einen bestimmten Wert x_0 strebt?

Wenn für jede konvergente Folge von Argumenten $(x_n) \to x_0$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen eine Zahl a konvergiert, so heißt a der **Grenzwert** (oder **Limes**) der Funktion f *an der Stelle* x_0.
Wir schreiben dafür

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to x_0}$$

x_0 muss nicht in der Definitionsmenge liegen und kann daher auch ∞ sein. Genauso muss a nicht in der Wertemenge der Funktion liegen.

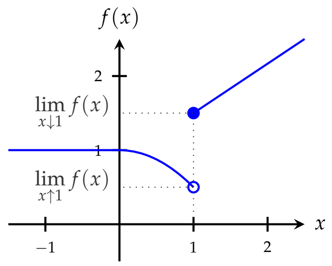
Für Limiten von Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie für Grenzwerte von Folgen.

Bestimmen eines Grenzwertes*

Für einfache Funktionen eignet sich folgende Vorgangsweise:

1. Wir zeichnen den Graphen der Funktion.
2. Wir zeichnen den Wert x_0 auf der x-Achse ein.
3. Wir setzen den Bleistift auf dem Graphen und führen ihn auf dem Graphen von *rechts* bis zum x_0-Wert.
4. Wir lesen den y-Wert dieses Punktes von y-Achse ab. Dieser Wert heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)$.
5. Analog erhalten wir von der *linken* Seite den **linksseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0: $\lim_{x\uparrow x_0} f(x)$.
6. Wenn beide Limiten *gleich* sind, so existiert der Grenzwert und es gilt
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$$

Beispiel*



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

$0{,}5 = \lim_{x\uparrow 1} f(x) \neq \lim_{x\downarrow 1} f(x) = 1{,}5$
d.h., der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ existiert nicht.

Der Grenzwert an anderen Stellen existiert hingegen,
z.B. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Stetigkeit*

Beim Zeichen von Graphen fällt auf, dass es Funktionen gibt, die sich *ohne Absetzen des Bleistifts* zeichnen lassen.
Solche Funktionen heißen **stetig**.

Andere Funktionen besitzen *Sprungstellen* und man muss beim Zeichnen den Bleistift vom Papier heben. Solche Stellen heißen *Unstetigkeitsstellen* der Funktion.

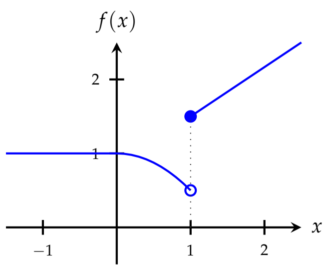
Formal lässt sich das so ausdrücken:

Definition:
Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$, falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist.
Die Funktion heißt *stetig*, falls sie in allen Punkten des Definitionsbereichs stetig ist.

Stetigkeit*

Vorgangsweise für einfache Funktionen:

(1) Wir zeichnen den Graphen der Funktion.
(2) In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir beim Zeichnen *nicht* den Bleistift absetzen müssen, ist die Funktion stetig.
(3) In allen Punkten des *Definitionsbereichs*, in denen wir absetzen müssen ist, die Funktion nicht stetig.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2}, & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

f ist überall stetig
außer im Punkt $x = 1$.

Funktionen in mehreren Variablen*

Eine **reelle Funktion in mehreren Variablen** ist eine Abbildung, die jedem Vektor $\mathbf{x}$ eine reelle Zahl zuordnet.

$$\boxed{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

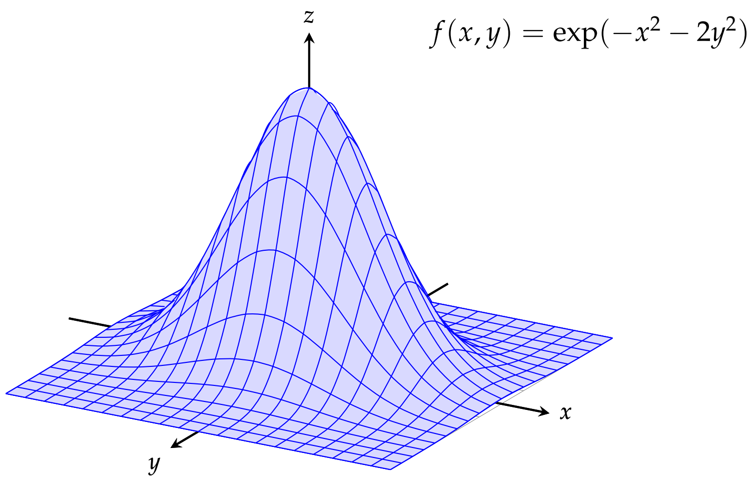
Die Komponenten x_i des Vektors $\mathbf{x}$ heißen die **Variablen** der Funktion f.

Funktionen in *zwei* Variablen lassen sich durch den **Graphen** (Funktionengebirge) veranschaulichen:

$$\mathcal{G}_f = \{(\mathbf{x}, y) \mid y = f(\mathbf{x}) \text{ für ein } \mathbf{x} \in D_f\}$$

(Der Graph einer Funktion mit vielen Variablen ist analog definiert, er dient aber nicht mehr zur Veranschaulichung.)

Graph einer bivariaten Funktion*



Niveaulinien einer bivariaten Funktion*

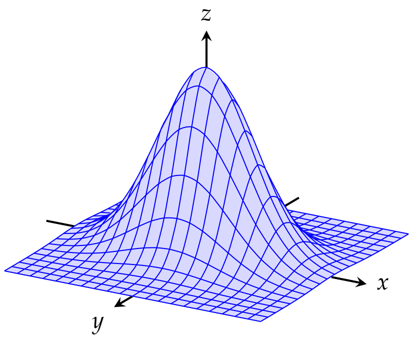
Die Menge aller Punkte (x, y) mit $f(x, y) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ wird als **Niveaulinie** der Funktion f bezeichnet.

Die Funktion f hat daher auf einer Höhenlinie den gleichen Funktionswert.

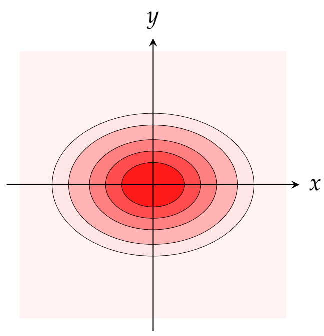
Andere Bezeichnungen:

- *Indifferenzkurve*
- *Isoquante* (Isonutzenlinie)
- *Höhenlinie*
- *Contourlinie*

Niveaulinien einer bivariaten Funktion*



Graph



Niveaulinien

$$f(x,y) = \exp(-x^2 - 2y^2)$$

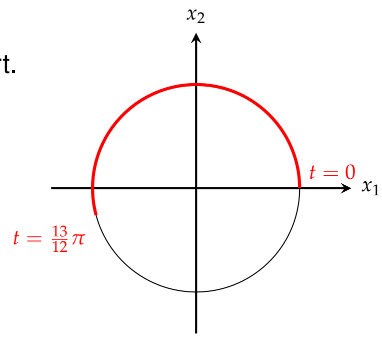
Weg*

Eine Funktion

$$\boxed{s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}}$$

heißt ein **Weg** (oder *Pfad*) im $\mathbb{R}^n$.
Die Variable t wird oft als *Zeit* interpretiert.

$$[0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



Vektorwertige Funktion

Allgemeine vektorwertige Funktionen:

$$\boxed{\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}}$$

- Univariate Funktionen:
  $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^2$
- Multivariate Funktionen:
  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto y = x_1^2 + x_2^2$
- Wege:
  $[0,1) \to \mathbb{R}^n,\ s \mapsto (s, s^2)^t$
- Lineare Abbildungen:
  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ $\mathbf{A} \dots m \times n$-Matrix

Zusammenfassung

- Abbildung
- Reelle Funktionen
- Graph einer Funktion
- Injektive, surjektiv, bijektiv
- Zusammengesetzte und inverse Funktion
- Potenzfunktion, Polynome und rationale Funktionen
- Exponentialfunktion und Logarithmus
- Winkelfunktionen
- Grenzwert
- Stetigkeit
- Funktionen in mehreren Variablen
- Wege und vektorwertige Funktionen