Kapitel 5

Eigenwerte

Geschlossenes Leontief-Modell

Ein Leontief-Modell für eine Volkswirtschaft heißt geschlossen, wenn der Konsum gleich der Produktion ist, d.h. wenn

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Es handelt sich dabei um einen Spezialfall eines **Eigenwertproblems**.

Eigenwert und Eigenvektor

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, heißt **Eigenvektor** einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ zum **Eigenwert** λ, falls

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}}$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind alle Zahlen λ für die ein Eigenvektor existiert.

Für eine 3×3-Diagonalmatrix gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \mathbf{e}_1$$

$\mathbf{e}_1$ ist also Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = a_{11}$.

Berechnung der Eigenwerte

Für eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ müssen wir die Gleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

lösen. Falls $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ invertierbar ist, dann ist

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1} 0 = 0$$

Dann ist aber λ kein Eigenwert.

λ ist genau dann *Eigenwert* von $\mathbf{A}$, wenn $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ *nicht invertierbar* ist, d.h. wenn

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0}$$

Charakteristisches Polynom

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ ist ein Polynom n-ten Grades in λ und heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix $\mathbf{A}$.
Die Eigenwerte sind die Nullstellen dieses Polynoms.

Bemerkung:
Es kann sein, dass (alle oder einzelne) Nullstellen des charakteristischen Polynoms komplex sind.
Man spricht dann von komplexen Eigenwerten.

Beispiel

Wir suchen die Eigenwerte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Dazu bilden wir das charakteristische Polynom und berechnen deren Nullstellen.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 3.$$

$\mathbf{A}$ besitzt daher die Eigenwerte 2 und 3.

Berechnung der Eigenvektoren

Wir können die Eigenvektoren $\mathbf{x}$ zum *bekannten* Eigenwert λ durch Einsetzen in $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ berechnen.

Eigenvektoren von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Gauß-Elimination: $x_2 = \alpha$ und $x_1 = -2\alpha$

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Eigenraum

Falls $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, dann auch jedes Vielfache $\alpha\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \alpha\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\alpha\mathbf{x})$$

Falls $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert λ sind, dann ist auch $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ein Eigenvektor:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y} = \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ (vereinigt mit 0) ist daher ein *Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ und wird als **Eigenraum** bezeichnet.

Man gibt daher immer nur eine *Basis des Eigenraumes* an.

Die Dimension des Eigenraumes wird auch als (geometrische) *Vielfachheit des Eigenwertes* bezeichnet.

Beispiel

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$: $\quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$: $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i sind dann alle nichtverschwindenden Vielfache (d.h., $\neq 0$) von $\mathbf{v}_i$.

Computerprogramme geben meist normierte Eigenvektoren aus:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir bilden das charakteristische Polynom und berechnen dessen Nullstellen.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-5) = 0$$

Wir erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0 \text{ und } \lambda_3 = 5\ .$$

Beispiel

Eigenvektor(en) zum Eigenwert $\lambda_3 = 5$ durch Lösen der Gleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (2-5) & 0 & 1 \\ 0 & (3-5) & 1 \\ 0 & 6 & (2-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Gauß-Elimination erhalten wir

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit $x_3 = \alpha$, $x_2 = \frac{1}{2}\alpha$ und $x_1 = \frac{1}{3}\alpha$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Eigenvektor $\mathbf{v}_3 = (2,3,6)^t$

Beispiel

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$: $\quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$: $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 5$: $\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i sind dann alle nichtverschwindenden Vielfache (d.h., $\neq 0$) von $\mathbf{v}_i$.

Eigenschaften von Eigenwerten

1. $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^t$ besitzen dieselben Eigenwerte.
2. Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei $n \times n$-Matrizen.
   Dann besitzen die Matrizen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ dieselben Eigenwerte.
3. Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ,
   dann ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^k$ zum Eigenwert λ^k.
4. Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor einer regulären Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ,
   dann ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^{-1}$ zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.
5. Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ ist gleich dem Produkt der Eigenwerte λ_i von $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

6. Die Summe der Eigenwerte λ_i einer Matrix $\mathbf{A}$ ist gleich der Summe der Diagonalelemente von $\mathbf{A}$ (der Spur von $\mathbf{A}$).

Eigenwerte ähnlicher Matrizen

Sei $\mathbf{U}$ eine Transformationsmatrix und $\mathbf{C} = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}$.
Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ,
dann ist $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$ Eigenvektor von $\mathbf{C}$ zum gleichen Eigenwert:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}) = (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda \cdot (\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x})$$

Ähnliche Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ haben die gleichen Eigenwerte und besitzen (unter Berücksichtigung des Basiswechsels) die gleichen Eigenvektoren.

Wir wählen für unsere Abbildung eine Basis, sodass die entsprechende Matrix $\mathbf{A}$ möglichst einfach wird.
Die einfachsten Matrizen sind *Diagonalmatrizen*.

Können wir immer eine Darstellung durch eine Diagonalmatrix finden?

Leider nicht immer.

Symmetrische Matrix

Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ heißt **symmetrisch**, falls $\boxed{\mathbf{A}^t = \mathbf{A}}$.

Für eine *symmetrische* Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

- Alle n Eigenwerte sind reell.
- Die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ zu verschiedenen Eigenwerten λ_i sind *orthogonal*, d.h. $\mathbf{v}_i^t \cdot \mathbf{v}_j = 0$ falls $i \neq j$.
- Es gibt eine **Orthonormalbasis** $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ aus Eigenvektoren für den $\mathbb{R}^n$, d.h. die $\mathbf{v}_i$ sind normiert und paarweise orthogonal.

Die Transformationsmatrix $\mathbf{U} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ist dann eine **Orthogonalmatrix**:

$$\boxed{\mathbf{U}^t \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^t}$$

Diagonalisieren

Für den i-ten Einheitsvektor $\mathbf{e}_i$ gilt

$$\mathbf{U}^t\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{U}^t\,\mathbf{A}\,\mathbf{v}_i = \mathbf{U}^t\,\lambda_i\,\mathbf{v}_i = \lambda_i\,\mathbf{U}^t\,\mathbf{v}_i = \lambda_i\cdot\mathbf{e}_i$$

Also

$$\mathbf{U}^t\,\mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Jede symmetrische Matrix wird bezüglich einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu einer Diagonalmatrix.
Deren Diagonalelemente sind die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

Man nennt diesen Vorgang **Diagonalisieren** der Matrix $\mathbf{A}$.

Beispiel

Wir wollen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisieren.

Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = 3$$

mit den normierten Eigenvektoren

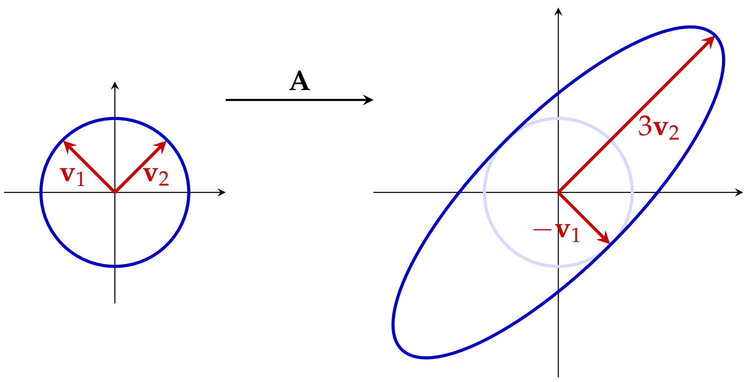
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Bezüglich dieser Basis wird $\mathbf{A}$ zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ein geometrische Interpretation I

Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ bildet den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ in eine Ellipse ab.
Die beiden Halbachsen werden durch $\lambda_1\mathbf{v}_1$ bzw. $\lambda_2\mathbf{v}_2$ gebildet.



Quadratische Form

Sei $\mathbf{A}$ eine *symmetrische Matrix*. Dann heißt die Funktion

$$\boxed{q_{\mathbf{A}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}}$$

eine **quadratische Form**.

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2\,x_2^2 + 3\,x_3^2$$

Beispiel

Allgemein gilt für eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$:

$$q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 \end{aligned}$$

Definitheit

Eine quadratische Form $q_{\mathbf{A}}$ heißt

- **positiv definit**, wenn für alle $\mathbf{x} \neq 0$, $\quad q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) > 0$.
- **positiv semidefinit**, wenn für alle $\mathbf{x}$, $\quad q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \geq 0$.
- **negativ definit**, wenn für alle $\mathbf{x} \neq 0$, $\quad q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) < 0$.
- **negativ semidefinit**, wenn für alle $\mathbf{x}$, $\quad q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \leq 0$.
- **indefinit** in allen anderen Fällen.

Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt *positiv* (negativ) *definit* (semidefinit), wenn die entsprechende quadratische Form *positiv* (negativ) *definit* (semidefinit) ist.

Definitheit

Jede symmetrische Matrix ist *diagonalisierbar*. Sei $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ eine Orthonormalbasis Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Dann gilt für jeden Vektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{U}\mathbf{c}$$

$\mathbf{U} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ist die Transformationsmatrix für die Orthonormalbasis, $\mathbf{c}$ der entsprechende Koeffizientenvektor.
Für die quadratische Form erhalten wir dann

$$q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{c})^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}\mathbf{c} = \mathbf{c}^t \cdot \mathbf{U}^t\mathbf{A}\mathbf{U} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}$$

wobei $\mathbf{D}$ die Diagonalmatrix aus den Eigenwerten λ_i von $\mathbf{A}$ ist. Daher

$$q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i$$

Definitheit und Eigenwerte

Aus $q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i$ folgt sofort:

Seien λ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Dann gilt:

Die quadratische Form $q_{\mathbf{A}}$ ist genau dann

- *positiv definit*, wenn alle $\lambda_i > 0$ sind.
- *positiv semidefinit*, wenn alle $\lambda_i \geq 0$ sind.
- *negativ definit*, wenn alle $\lambda_i < 0$ sind.
- *negativ semidefinit*, wenn alle $\lambda_i \leq 0$ sind.
- *indefinit*, wenn es positive und negative Eigenwerte gibt.

Beispiel

- Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ lauten $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 1$.
  Die Matrix ist daher positiv definit.
- Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ lauten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 9$. Die Matrix ist daher positiv semidefinit.
- Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ lauten $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 6$ und $\lambda_3 = 12$. Die Matrix ist daher indefinit.

Hauptminoren

Die Definitheit einer Matrix kann auch mit Hilfe der sogenannten Hauptminoren bestimmt werden.

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann heißt die Determinanten der Untermatrix

$$\boxed{H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

der k-te (führende) **Hauptminor** von $\mathbf{A}$.

Hauptminoren und Definitheit

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann

- *positiv definit*, wenn alle $H_k > 0$ sind.
- *negativ definit*, wenn $(-1)^k H_k > 0$ für alle k.
- *indefinit*, wenn $|\mathbf{A}| \neq 0$ und keiner der beiden Fälle zutrifft.

$(-1)^k H_k > 0$ bedeutet, dass

- $H_1, H_3, H_5, \dots < 0$, und
- $H_2, H_4, H_6, \dots > 0$.

Beispiel

Gesucht ist die Definitheit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \det(a_{11}) = a_{11} = 2 \quad > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad > 0$$

$$H_3 = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad > 0$$

$\mathbf{A}$ und $q_{\mathbf{A}}$ sind positiv definit.

Beispiel

Gesucht ist die Definitheit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \det(a_{11}) = a_{11} = 1 \quad > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad > 0$$

$$H_3 = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -28 \quad < 0$$

$\mathbf{A}$ und $q_{\mathbf{A}}$ sind indefinit.

Allgemeine Hauptminoren

Die Bedingung für Semidefinitheit ist leider nicht so einfach.

Die k-ten **allgemeinen Hauptminoren** sind die Unterdeterminaten

$$\tilde{H}_{i_1,\ldots,i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & \ldots & a_{i_1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & \ldots & a_{i_k,i_k} \end{vmatrix} \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n.$$

Allgemeine Hauptminoren und Semidefinitheit

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann

- *positiv semidefinit*, wenn alle $\tilde{H}_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0$ sind.
- *negativ semidefinit*, wenn $(-1)^k \tilde{H}_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0$ für alle k.
- *indefinit* in allen anderen Fällen.

$(-1)^k \tilde{H}_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0$ bedeutet, dass

- $\tilde{H}_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0$, falls k gerade ist, und
- $\tilde{H}_{i_1,\ldots,i_k} \le 0$, falls k ungerade ist.

Beispiel

Gesucht ist die Definitheit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist daher positiv semidefinit.

(Aber nicht positiv definit!)

1-te Hauptminoren:

$\tilde{H}_1 = 5 \quad \geq 0 \qquad \tilde{H}_2 = 2 \quad \geq 0$

$\tilde{H}_3 = 5 \quad \geq 0$

2-te Hauptminoren:

$$\tilde{H}_{1,2} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \quad \geq 0$$

$$\tilde{H}_{1,3} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 \quad \geq 0$$

$$\tilde{H}_{2,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \quad \geq 0$$

3-ter Hauptminor:

$\tilde{H}_{1,2,3} = |\mathbf{A}| = 0 \quad \geq 0$

Beispiel

Gesucht ist die Definitheit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist negativ semidefinit.

(Aber nicht negativ definit!)

1-te Hauptminoren:

$\tilde{H}_1 = -5 \quad \leq 0 \qquad \tilde{H}_2 = -2 \quad \leq 0$

$\tilde{H}_3 = -5 \quad \leq 0$

2-te Hauptminoren:

$$\tilde{H}_{1,2} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \quad \geq 0$$

$$\tilde{H}_{1,3} = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 9 \quad \geq 0$$

$$\tilde{H}_{2,3} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 9 \quad \geq 0$$

3-ter Hauptminor:

$\tilde{H}_{1,2,3} = |\mathbf{A}| = 0 \quad \leq 0$

Beispiel

Jede positiv definite Matrix ist auch positiv semidefinit (aber nicht notwendigerweise umgekehrt).

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist positive definit da alle führenden Hauptminoren > 0 sind (siehe oben).

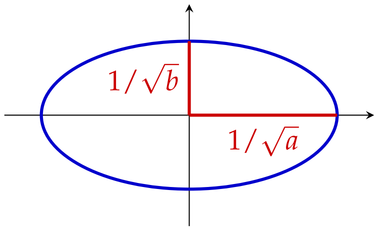
$\mathbf{A}$ ist daher auch positiv semidefinit.

Ellipse

Die Gleichung

$$ax^2 + by^2 = 1\,, \qquad a, b > 0$$

beschreibt eine *Ellipse* in **Hauptlage**.



Die Halbachsen haben die Längen $\frac{1}{\sqrt{a}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

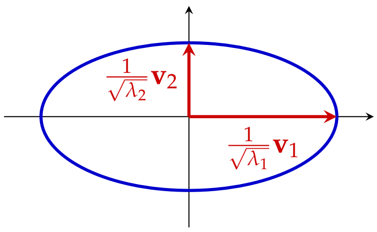
Eine geometrische Interpretation II

Der Term $ax^2 + by^2$ ist aber eine quadratische Form mit Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Diese hat Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = a \text{ mit } \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = b \text{ mit } \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$$



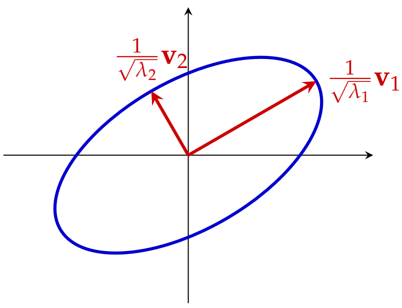
Die Eigenvektoren spannen die Hauptachsen der Ellipse auf.

Eine geometrische Interpretation II

Sei $\mathbf{A}$ eine eine symmetrische 2×2-Matrix mit *positiven* Eigenwerten.
Die Gleichung

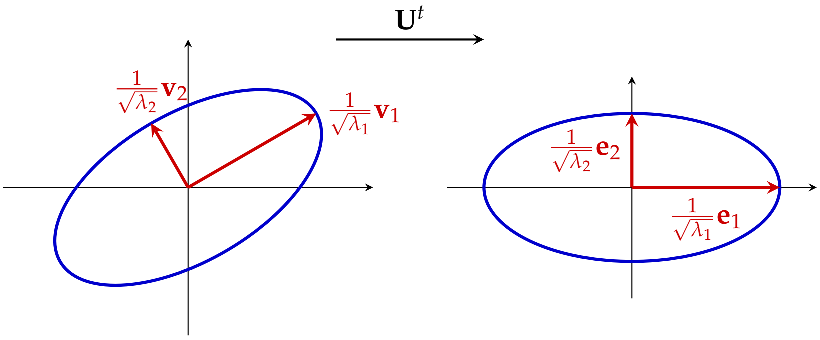
$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} = 1$$

beschreibt eine *Ellipse*, deren Hauptachsen durch die normierten Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ von $\mathbf{A}$ aufgespannt werden.



Eine geometrische Interpretation II

Durch den Basiswechsel $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ von $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ zu $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ wird die Ellipse in die Hauptlage gedreht.



Man nennt daher diesen Vorgang (*Diagonalisieren*) auch **Hauptachsentransformation**.

Eine statistische Anwendung

Wir haben n Beobachtungen von k metrischen Merkmalen $X_1, \dots, X_k$, die wir zu Vektoren zusammenfassen können:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in \mathbb{R}^k$$

Das arithmetischen Mittel ist (wie bei univariaten Daten)

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$$

Die *Summe der Abweichungsquadrate* ist ein Maß für die Streuung

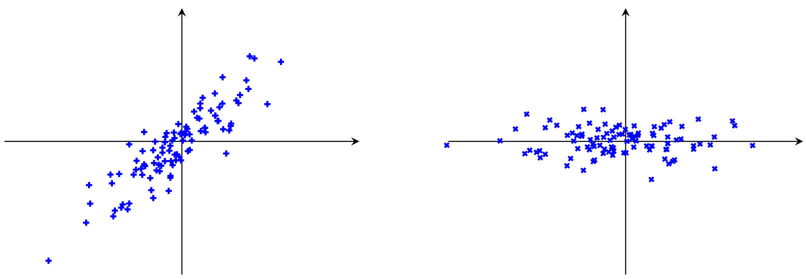
$$\mathrm{TSS} = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{ij} - \bar{x}_j|^2 \right) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{TSS}_j$$

und kann komponentenweise berechnet werden.

Eine statistische Anwendung

Ein orthogonaler Basiswechsel verändert die Summe der Abweichungsquadrate TSS nicht.

Er verändert aber die Aufteilung auf die einzelnen Komponenten.



Kann man die Basis so wählen, dass sich ein großer Beitrag für die TSS auf wenige Komponenten konzentriert?

Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Annahme:

- Die Daten sind näherungsweise *multinormal* verteilt.

Vorgangsweise:

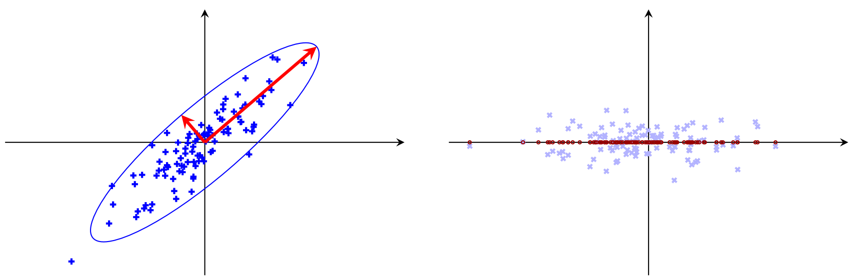
1. Berechne Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$
2. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{\Sigma}$
3. Ordne Eigenwerte (und -vektoren) so, dass

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$$

4. Verwende Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ als neue Basis.
5. Der Beitrag der m Komponenten in dieser Basis zum TSS ist näherungsweise

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} \mathrm{TSS}j}{\sum_{j=1}^{k} \mathrm{TSS}j} \approx \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}$$

Hauptkomponentenanalyse (PCA)



Mit Hilfe der PCA ist es möglich die Anzahl der Dimensionen so zu reduzieren, dass die Gesamtstreuung näherungsweise erhalten bleibt.

Zusammenfassung

- Eigenwerte und Eigenvektoren
- Eigenraum
- Symmetrische Matrizen
- Diagonalisieren
- Quadratische Formen
- Definitheit
- Hauptminoren
- Hauptkomponentenanalyse