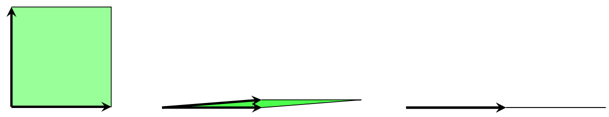
Kapitel 4

Determinante

Was ist eine Determinante?

Wir wollen *„messen“*, ob n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind bzw. wie weit sie davon entfernt sind.

Die Idee:
Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ spannen ein Parallelogramm auf.



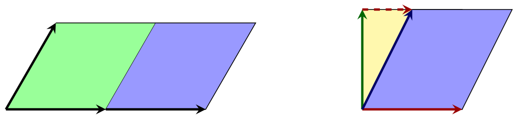
Vektoren sind linear *abhängig* $\Leftrightarrow$ Flächeninhalt ist Null

Wir verwenden das n-dimensionale Volumen für unsere Funktion zum *„Messen“* der linearen Abhängigkeit.

Eigenschaften des Volumens

Definieren diese Funktion indirekt durch Eigenschaften des Volumens.

- Multiplizieren wir einen Vektor mit einer Zahl α erhalten wir das α-fache Volumen.
- Addieren wir zu einem Vektor das Vielfache eines anderen Vektors, so bleibt das Volumen konstant.
- Sind zwei Vektoren gleich, so ist das Volumen gleich Null.
- Das Volumen eines Würfels mit Seitenlänge eins ist gleich eins.



Determinante

Die **Determinante** ist eine Funktion, die jeder $n \times n$-Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ eine reelle Zahl $\det(\mathbf{A})$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Die Determinante ist **linear** in jeder Spalte:

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i, \dots) = \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots) + \det(\dots, \mathbf{b}_i, \dots)$$

$$\det(\dots, \alpha\, \mathbf{a}_i, \dots) = \alpha \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots)$$

(2) Die Determinante ist Null, falls zwei Spaltenvektoren gleich sind:

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots) = 0$$

(3) Die Determinante ist **normiert**:

$$\det(\mathbf{I}) = 1$$

Schreibweisen: $\boxed{\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|}$

Beispiel

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+10 & 3 \\ 4 & 5+11 & 6 \\ 7 & 8+12 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 11 & 6 \\ 7 & 12 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3\cdot 2 & 3 \\ 4 & 3\cdot 5 & 6 \\ 7 & 3\cdot 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Weitere Eigenschaften

Die Eigenschaften (1) – (3) definieren eindeutig eine Funktion.
Diese Funktion besitzt noch eine Reihe weiterer Eigenschaften, die sich aus diesen drei Grundeigenschaften herleiten lassen.

(4) Die Determinante ist **alternierend**:

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) = -\det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_i, \dots)$$

(5) Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert wird:

$$\det(\dots, \mathbf{a}_i + \alpha\, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) = \det(\dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_k, \dots)$$

(6) Beim Transponieren ändert sich der Wert der Determinante nicht, d.h. die Aussagen über Spalten gelten analog für Zeilen:

$$\boxed{\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})}$$

Beispiel

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+2\cdot 1 & 3 \\ 4 & 5+2\cdot 4 & 6 \\ 7 & 8+2\cdot 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Weitere Eigenschaften

(7) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ ist regulär
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ ist invertierbar

(8) Die Determinante des Produktes zweier Matrizen ist gleich dem Produkt ihrer Determinanten:

$$\boxed{\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})}$$

(9) Die Determinante der inversen Matrix ist gleich dem Kehrwert der Determinante:

$$\boxed{\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}}$$

Weitere Eigenschaften

(10) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(11) Der Absolutbetrag der Determinante $|\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|$ ist das Volumen des von den Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ aufgespannten Parallelepipeds.

Regel von Sarrus

- 2×2-Matrix:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- 3×3-Matrix: Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ -7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \end{matrix}$$

Umformen in Dreiecksmatrix

(1) Forme Matrix in obere Dreiecksmatrix um.

Das Verfahren ähnelt dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

- Addiere Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile. (5)
- Multipliziere eine Zeile mit einer Konstanten $\alpha \neq 0$ und die Determinante mit dem Kehrwert $\frac{1}{\alpha}$. (1)
- Vertausche zwei Zeilen und ändere Vorzeichen der Determinante. (4)

(2) Berechne Determinante als Produkt der Diagonalelemente. (10)

Umformen in Dreiecksmatrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-4) = 4$$

Der Laplacesche Entwicklungssatz

Entwicklung nach der k-ten Spalte bzw. i-ten Zeile:

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} |\mathbf{S}_{ik}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} |\mathbf{S}_{ik}|}$$

$\mathbf{S}_{ik}$ ist die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die man erhält, wenn die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen wird („Streichungsmatrix").
Die Determinante $|\mathbf{S}_{ik}|$ ist ein sogenannter **Minor** von $\mathbf{A}$.

Es ist dabei völlig egal, nach welcher Zeile oder Spalte entwickelt wird.

Die Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ erhält man auch über ein Schachbrettmuster:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &\quad + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &\quad + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &\quad + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &\quad + 8 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (-6) + 5 \cdot (-12) - 8 \cdot (-6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Adjungierte Matrix

Die Faktoren $\boxed{A_{ik} = (-1)^{i+k} |\mathbf{S}_{ik}|}$ aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz heißen die **Kofaktor** von a_{ik}.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Wir können diese zur **Kofaktorenmatrix** $\mathbf{A}^*$ zusammenfassen.
Durch Transponieren erhalten wir die **adjungierte Matrix** $\mathbf{A}^{*t}$ von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{*t}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{*t} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I}$$

Produkt $\mathbf{A}^{*t} \cdot \mathbf{A}$

Produkt aus k-ter Zeile von $\mathbf{A}^{*t}$ und j-ter Spalte von $\mathbf{A}$:

$$\left(\mathbf{A}^{*t} \cdot \mathbf{A}\right)_{kj} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+k} |\mathbf{S}_{ik}|$$

[Entwicklung nach k-ter Spalte] $\quad = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \underbrace{\mathbf{a}_j}_{k\text{-te Spalte}}, \ldots, \mathbf{a}_n)$

[$\mathbf{a}_i$ sind die einzelnen Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$]

$$= \begin{cases} |\mathbf{A}| & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

$$\mathbf{A}^{*t} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{A}^{*t}$$

Inverse Matrix

Für die Inverse einer Matrix $\mathbf{A}$ erhalten wir

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{A}^{*t}}$$

Für eine 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 8 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

Die **Cramersche Regel** ist eine Methode zur Lösung des Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Falls $\mathbf{A}$ invertierbar ist (d.h., $|\mathbf{A}| \neq 0$), dann gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^{*t} \cdot \mathbf{b}$$

Wir erhalten daher für x_k

$$x_k = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} \cdot b_i = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot (-1)^{i+k} |\mathbf{S}_{ik}|$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \underbrace{\mathbf{b}}_{k\text{-te Spalte}}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Cramersche Regel

Sei $\mathbf{A}_k$ die Matrix, die wir aus $\mathbf{A}$ erhalten, wenn wir die k-te Spalte durch den Vektor $\mathbf{b}$ ersetzen.
Falls $\mathbf{A}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix ist, dann erhalten wir die Lösung von

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

durch

$$\boxed{\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_1| \\ \vdots \\ |\mathbf{A}_n| \end{pmatrix}}$$

Dieses Verfahren eignet sich nur, wenn $\mathbf{A}$ eine reguläre quadratische Matrix ist.

Beispiel

Gesucht ist die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 3 \\ 9 & 13 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 9 & 11 & 3 \\ 9 & 13 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 2 & 13 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Lösung:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_1| \\ |\mathbf{A}_2| \\ |\mathbf{A}_3| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -22 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 9 & 11 & 1 \\ 9 & 13 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 45$$

Zusammenfassung

- Definition der Determinante
- Eigenschaften
- Zusammenhang zu Rang und Invertierbarkeit
- Volumen eines Parallelepipeds
- Berechnung der Determinante
  (Regel von Sarrus, Umformen in Dreiecksmatrix)
- Laplacescher Entwicklungssatz
- Cramersche Regel