Kapitel 3

Vektorräume

Reeller Vektorraum

Die Menge aller Vektoren $\mathbf{x}$ mit n Komponenten bezeichnen wir mit

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le n \right\}}$$

und wird als **n-dimensionaler (reeller) Vektorraum** bezeichnet.

Definition
Ein **Vektorraum** $\mathcal{V}$ ist eine Menge, deren Elemente sich addieren und mit einer Zahl multiplizieren lassen, wobei Summen und Vielfache von Elementen wieder Elemente der Menge sind. Die Elemente so eines Vektorraumes heißen **Vektoren**.

Teilraum

Ein **Unterraum** (oder **Teilraum**) eines Vektorraums ist eine Teilmenge, die selbst wieder einen Vektorraum bildet.

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le 3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

$\left\{ \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_i \ge 0,\, 1 \le i \le 3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ ist **kein** Teilraum des $\mathbb{R}^3$.

Homogenes linearen Gleichungssystem

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix.
Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des *homogenen* linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

bildet einen Teilraum des $\mathbb{R}^n$:

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$, i.e., $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ und $\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$.
Dann ist auch die Summe $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = 0 + 0 = 0$$

und jedes Vielfache von $\mathbf{x}$ liegt in $\mathcal{L}$,

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha 0 = 0$$

Linearkombination

Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen.
Dann erhalten wir durch **Linearkombination** einen neuen Vektor:

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\,\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{v}_i$$

Seien $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann sind

$\mathbf{x} = 1\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3 - 2\,\mathbf{v}_4 = (-3, -4, 3)^t$,
$\mathbf{y} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\,\mathbf{v}_3 + 3\,\mathbf{v}_4 = (4, 7, -2)^t$, und
$\mathbf{z} = 2\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_3 + 0\,\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0)^t = 0$

Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$.

Aufgespannter Unterraum

Die Menge aller *Linearkombinationen* der Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = \{c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \colon c_i \in \mathbb{R}\}}$$

heißt der von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ **aufgespannte Unterraum** des $\mathbb{R}^n$.

Seien $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1) = \{c\,\mathbf{v}_1 \colon c \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$.
$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist Ebene durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$.
$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$
$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \mathbb{R}^3$.

Lineare Unabhängigkeit

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lässt sich immer als Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ darstellen.

Seien $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3 - 2\,\mathbf{v}_4 = -1\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 6\,\mathbf{v}_3 - 2\,\mathbf{v}_4$$

Diese Darstellung ist aber nicht immer eindeutig!

Grund: $2\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_3 + 0\,\mathbf{v}_4 = 0$

Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ heißen **linear unabhängig** falls das Gleichungssystem

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\,\mathbf{v}_k = 0$$

nur die Lösung $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ besitzt. Sie heißen **linear abhängig**, wenn das Gleichungssystem andere Lösungen besitzt.

Sind Vektoren linear abhängig, dann lässt sich *ein* Vektor (aber nicht notwendigerweise *jeder*!) als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen.

$$2\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_3 + 0\,\mathbf{v}_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \tfrac{3}{2}\,\mathbf{v}_3$$

Daher ist $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \text{span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Lineare Unabhängigkeit

Bestimmung der linearen Unabhängigkeit

(1) Fasse die Vektoren als Spaltenvektoren einer Matrix $\mathbf{V}$ auf.

(2) Bringe Matrix $\mathbf{V}$ mit den Umformungsschritten des Gaußschen Eliminationsverfahrens in die Stufenform.

(3) Zähle die Zeilen, die ungleich dem Nullvektor sind.

(4) Ist diese Anzahl gleich der Anzahl der Vektoren, so sind diese Vektoren linear unabhängig.
Ist sie kleiner, so sind die Vektoren linear abhängig.

In diesem Verfahren wird festgestellt ob das lineare Gleichungssystem $\mathbf{V} \cdot \mathbf{c} = 0$ eindeutig lösbar ist.

Beispiel – linear unabhängig

Sind die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

(1) Wir bringen diese drei Vektoren in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel – linear unabhängig

(2) Durch Umformung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

(3) Es gibt 3 von Null verschiedene Zeilen.

(4) Diese Anzahl stimmt mit der Anzahl der Vektoren ($= 3$) überein.
Die drei Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ sind daher linear unabhängig.

Beispiel – linear abhängig

Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

linear unabhängig?

(1) Wir bringen diese Vektoren in Matrixform ...
(2) und formen um:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 10 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Es gibt 2 von Null verschiedene Zeilen.

(4) Diese Anzahl ist kleiner als die Anzahl der Vektoren ($= 3$).
Die drei Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ sind daher linear abhängig.

Rang einer Matrix

Der **Rang** $\text{rank}(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A}$ ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten.

Es gilt: $\boxed{\text{rank}(\mathbf{A}^t) = \text{rank}(\mathbf{A})}$

Der Rang einer $n \times k$-Matrix ist immer $\leq \min(n, k)$.

Eine $n \times n$-Matrix heißt **regulär**, falls sie **vollen Rang** hat, d.h. falls $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$.

Rang einer Matrix

Berechnung des Ranges:

(1) Bringen die Matrix mit den Umformungsschritten des Gaußschen Eliminationsverfahrens in die Stufenform.

(2) Der Rang der Matrix ergibt sich dann aus der Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{A}) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$$

Invertierbar und regulär

Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann *invertierbar*, wenn sie *regulär* ist, also *vollen Rang* hat.

Die 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat vollen Rang (3).

Sie ist daher regulär und damit invertierbar.

Die 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ hat nur Rang 2.

Sie ist daher nicht regulär und damit singulär (i.e., nicht invertierbar).

Basis

Eine Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ **erzeugt** einen Vektorraum $\mathcal{V}$, falls

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d) = \mathcal{V}$$

Diese Vektoren heißen ein **Erzeugendensystem** für den Vektorraum.

Sind diese Vektoren *linear unabhängig*, so heißt diese Menge eine **Basis** des Vektorraumes.

Die Basis eines Vektorraumes ist nicht eindeutig bestimmt!

Die Anzahl an Vektoren in einer Basis ist hingegen eindeutig bestimmt und heißt die **Dimension** des Vektorraumes.

$$\dim(\mathcal{V}) = d$$

Beispiel – Basis

Die **kanonische Basis** des $\mathbb{R}^n$ besteht aus den n Einheitsvektoren:

$$\boxed{\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n}$$

Andere Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Keine Basen des $\mathbb{R}^3$ sind (linear abhängig bzw. $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq \mathbb{R}^3$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Koordinaten eines Vektors

Die Koordinaten $\mathbf{c}$ eines Vektors $\mathbf{x}$ bezüglich einer Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{x}$$

bzw. in Matrixschreibweise mit $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}}$$

$\mathbf{V}$ hat per Konstruktion vollen Rang.

Genau genommen sind $x_1, \dots, x_n$ nur die Koordinaten des Vektors $\mathbf{x}$ bezüglich der kanonischen Basis.

Jeder n-dimensionale Vektorraum $\mathcal{V}$ ist daher *isomorph* (d.h., sieht so aus wie) der $\mathbb{R}^n$.

Beispiel

Wir suchen die Koordinaten $\mathbf{c}$ von $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

Wir lösen das Gleichungssystem $\mathbf{Vc} = \mathbf{x}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir $c_1 = 4$, $c_2 = -8$ und $c_3 = 5$.

Der Koordinatenvektor von $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ lautet daher

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Alternative könnten wir auch $\mathbf{V}^{-1}$ berechnen und erhalten $\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$.

Basiswechsel

Seien $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ die Koordinatenvektoren eines Vektors $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bzw. $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$.

Es gilt daher $\quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{c}_1$.

Dieses „Umrechnen" wird als **Basiswechsel** oder **Basistransformation** bezeichnet.

Die Matrix

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}}$$

heißt **Transformationsmatrix** zum Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$.
(Man beachte die Umkehrung der Reihenfolge, da $\mathbf{V} = \mathbf{WU}$.)

Beispiel – Basiswechsel

Seien

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} \right\}$$

zwei Basen des $\mathbb{R}^3$.

Transformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$:
$\mathbf{U} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{V}$.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\3&5&6\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix}3&-1&0\\-3&3&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix}1&-2&3\\1&1&5\\1&1&6\end{pmatrix}$$

Beispiel – Basiswechsel

Transformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \begin{pmatrix}3&-1&0\\-3&3&-1\\1&-2&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&-2&3\\1&1&5\\1&1&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-7&4\\-1&8&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}$$

Sei $\mathbf{c}_1 = (3,2,1)^t$ der Koordinatenvektor von $\mathbf{x}$ bezüglich Basis $\mathcal{B}_1$.
Dann lautet der Koordinatenvektor $\mathbf{c}_2$ bezüglich Basis $\mathcal{B}_2$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{U}\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix}2&-7&4\\-1&8&0\\0&-3&-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\13\\-7\end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung

Eine Abbildung φ zwischen Vektorräumen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$

$$\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W},\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$$

heißt **linear**, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$

(ii) $\varphi(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\,\varphi(\mathbf{x})$

Lineare Abbildung

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix. Dann ist die Abbildung
$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ linear:

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{y} = \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) + \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{y})$$
$$\varphi_{\mathbf{A}}(\alpha\,\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}) = \alpha\,\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$$

Umgekehrt können wir jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine geeignete $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ darstellen: $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\varphi\,\mathbf{x}$.

Matrizen beschreiben somit alle denkbaren linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen.

Lineare Abbildungen sind so einfach, dass man noch viel darüber aussagen und ausrechnen kann.

Geometrische Interpretation linearer Abbildungen

Man kann folgende „elementare" Abbildungen unterscheiden:

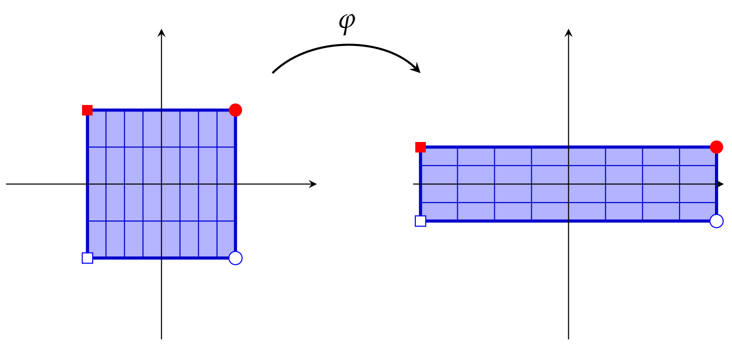
- *Streckung* / *Stauchung* in eine Richtung
- *Projektion* in einen Unterraum
- *Drehung*
- *Spiegelung* an einem Unterraum

Diese einfachen Abbildungen können zu komplexeren zusammengesetzt werden, z.B., Streckdrehungen.

Streckung / Stauchung

Die Abbildung $\varphi\colon \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

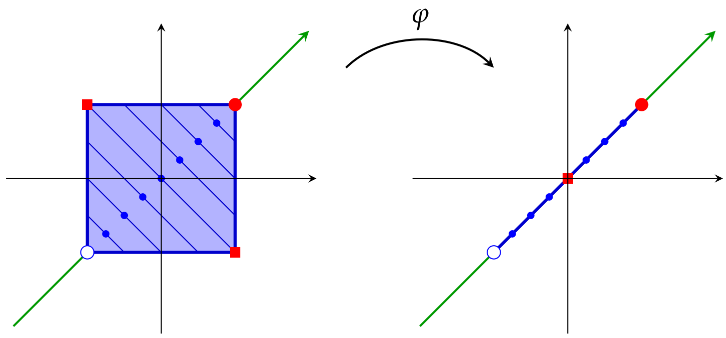
streckt die x-Koordinate um den Faktor 2 und
staucht die y-Koordinate um den Faktor $\frac{1}{2}$.



Projektion

Die Abbildung $\varphi\colon \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

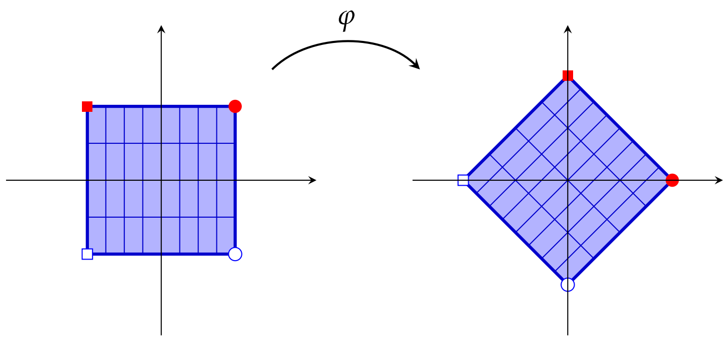
projiziert den Punkt $\mathbf{x}$ orthogonal auf den von $(1,1)^t$ aufgespannten Unterraum.



Drehung

Die Abbildung $\varphi\colon \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

dreht den Punkt $\mathbf{x}$ um 45° im Uhrzeigersinn um den Ursprung.



Spiegelung

Die Abbildung $\varphi\colon \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

spiegelt den Punkt $\mathbf{x}$ an der y-Achse.

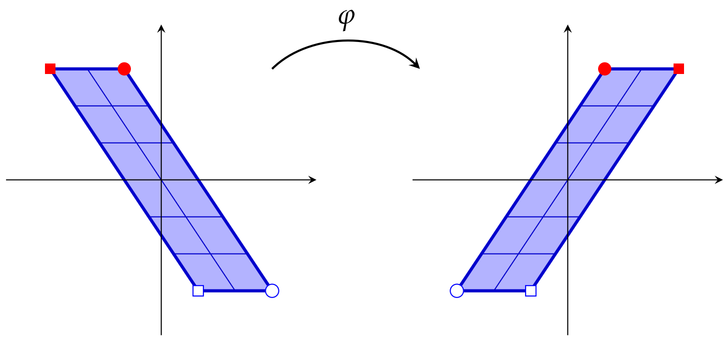


Image und Kern

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ eine lineare Abbildung.

Das **Bild** (**Image**) von φ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^m$.

$$\boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(\mathbf{v})\colon \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m}$$

Der **Kern** (oder **Nullraum**) von φ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(\mathbf{v}) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n}$$

Der Kern ist das Urbild von 0.

Der *Kern* von $\mathbf{A}$, $\operatorname{Ker}(\mathbf{A})$, ist der Kern der entsprechenden linearen Abbildung.

Erzeugendensystem des Bildraumes

Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebige Vektor.

Wir können $\mathbf{x}$ als Linearkombination der kanonischen Basis darstellen:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{e}_i$$

Weiters ist $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, da für die k-te Komponente gilt:

$$(\mathbf{A}\mathbf{e}_i)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (\mathbf{e}_i)_j = a_{ki}$$

Daher ist das Bild von $\mathbf{x}$ eine Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{a}_i$$

Die Spaltenvektoren $\mathbf{a}_i$ spannen den Bildraum $\operatorname{Im}(\varphi)$ auf.

Dimension von Image und Kern

Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.
Dann ist auch jede Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$:

$$\varphi(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \varphi(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 \varphi(\mathbf{v}_2) = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0$$

Wir erhalten eine Basis von $\operatorname{Ker}(\varphi)$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$.

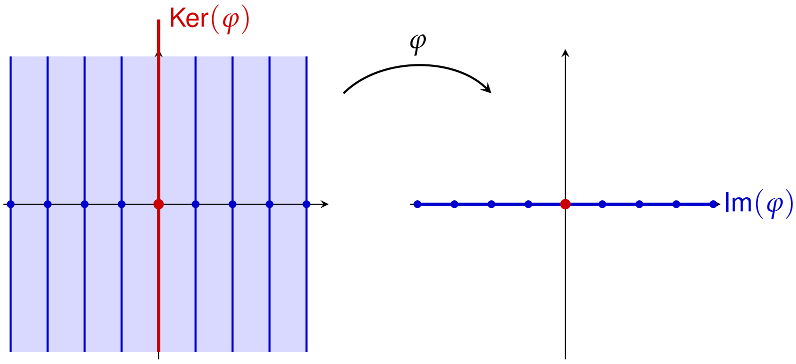
Zusammenhang zwischen diesen Vektorräumen:

$$\boxed{\dim \mathcal{V} = \dim \operatorname{Im}(\varphi) + \dim \operatorname{Ker}(\varphi)}$$

Dimension von Image und Kern

Die Abbildung $\varphi\colon \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

projiziert eine Punkt $\mathbf{x}$ orthogonal auf die x-Achse.



Lineare Abbildung und Rang

Der Rang einer Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ ist (per definitionem) die Dimension von span$(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Er gibt daher die Dimension des Bildes der korrespondierenden linearen Abbildung an.

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}(\varphi_{\mathbf{A}}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})}$$

Die Dimension der Lösungsmenge $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0$ erhalten wir durch den Kern dieser linearen Abbildung.

$$\dim \mathcal{L} = \dim \operatorname{Ker}(\varphi_{\mathbf{A}}) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Im}(\varphi_{\mathbf{A}}) = n - \operatorname{rank}(\mathbf{A})$$

Matrixmultiplikation

Durch *Multiplizieren* zweier Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ erhalten wir eine **zusammengesetzte** Abbildung:

$$(\varphi_{\mathbf{A}} \circ \varphi_{\mathbf{B}})(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{A}}(\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})) = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{x}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{x}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{AB}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{R}^k \\
\mathbf{x} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{Bx} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{ABx}
\end{tikzcd}$$

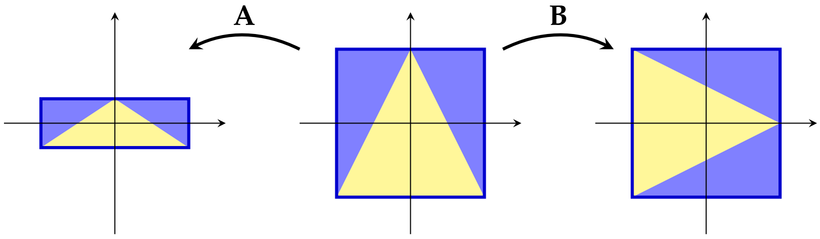
Aus dieser Sichtweise folgt:

$$\boxed{\operatorname{rank}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\{\operatorname{rank}(\mathbf{A}), \operatorname{rank}(\mathbf{B})\}}$$

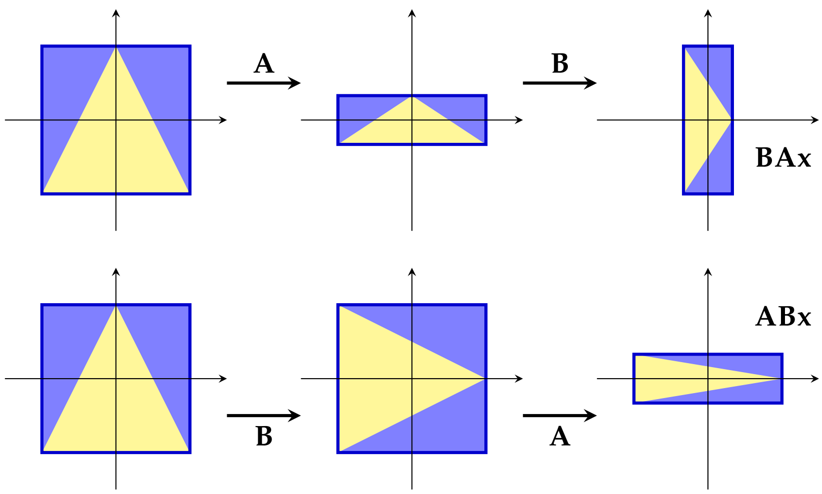
Nicht-kommutative Matrizenmultiplikation

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ beschreibt eine Stauchung der y-Koordinate.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung im Uhrzeigersinn um 90°.



Nicht-kommutative Matrizenmultiplikation



Inverse Matrix

Die *inverse Matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ existiert genau dann, wenn die Abbildung $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ bijektiv ist, wenn also

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = x_1\,\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\,\mathbf{a}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = 0$$

d.h., wenn $\mathbf{A}$ *regulär* ist.

Aus dieser Sichtweise wird klar, warum $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{A}\mathbf{B}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{A}"] & \mathbb{R}^k \\
\mathbf{x} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{B}\mathbf{x} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x} \\
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \arrow[l, mapsto] & \mathbf{z} \arrow[l, mapsto] \arrow[ll, bend left, "\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Ähnliche Matrizen

Die Basis eines Vektorraumes und damit die Koordinatendarstellung eines Vektors ist nicht eindeutig. Die Matrix $\mathbf{A}_\varphi$ einer linearen Abbildung φ hängt ebenfalls von der verwendeten Basis ab.
Sei nun $\mathbf{A}$ die Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.
Wie sieht nun die entsprechende Matrix $\mathbf{C}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ aus?

$$\begin{array}{lccc} \text{Basis } \mathcal{B}_1 & \mathbf{U}\,\mathbf{x} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbf{A}\,\mathbf{U}\,\mathbf{x} \\ & \mathbf{U}\big\uparrow & & \big\downarrow\mathbf{U}^{-1} \\ \text{Basis } \mathcal{B}_2 & \mathbf{x} & \xrightarrow{\mathbf{C}} & \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}\,\mathbf{x} \end{array} \qquad \text{also } \mathbf{C}\,\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}\,\mathbf{x}$$

Zwei $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ heißen **ähnlich**, falls es eine invertierbare Matrix $\mathbf{U}$ gibt, mit

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}}$$

Zusammenfassung

- Vektorraum
- Lineare Unabhängigkeit und Rang
- Basis und Dimension
- Koordinatenvektor
- Basiswechsel
- Lineare Abbildungen