Kapitel 2

# Matrixalgebra

# Ein sehr einfaches Leontief-Modell

Eine Stadt betreibt die Unternehmen ÖFFENTLICHER VERKEHR, ELEKTRIZITÄT und GAS.

Technologiematrix und wöchentliche Nachfrage (in Werteinheiten):

| für / Verbrauch an | Verkehr | Elektrizität | Gas | Konsum |
|---|---|---|---|---|
| Verkehr | 0,0 | 0,2 | 0,2 | 7,0 |
| Elektrizität | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 12,5 |
| Gas | 0,0 | 0,5 | 0,1 | 16,5 |

Wie groß muss die wöchentliche Produktion sein, damit die Nachfrage befriedigt werden kann?

# Ein sehr einfaches Leontief-Modell

Wir bezeichnen die unbekannte Produktion von VERKEHR, ELEKTRIZITÄT und GAS mit $x_1$, $x_2$ bzw. $x_3$. Für die Produktion muss dann gelten:

$$\text{Nachfrage} = \text{Produktion} - \text{interner Verbrauch}$$

$$\begin{aligned}
7{,}0 &= x_1 - (0{,}0\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + 0{,}2\,x_3) \\
12{,}5 &= x_2 - (0{,}4\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + 0{,}1\,x_3) \\
16{,}5 &= x_3 - (0{,}0\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}1\,x_3)
\end{aligned}$$

Durch Umformen erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
1{,}0\,x_1 - 0{,}2\,x_2 - 0{,}2\,x_3 &= 7{,}0 \\
-0{,}4\,x_1 + 0{,}8\,x_2 - 0{,}1\,x_3 &= 12{,}5 \\
0{,}0\,x_1 - 0{,}5\,x_2 + 0{,}9\,x_3 &= 16{,}5
\end{aligned}$$

Wie müssen wir $x_1$, $x_2$ und $x_3$ wählen?

# Matrix

Eine $m \times n$-**Matrix** ist ein rechteckiges Schema bestehend aus $m$ Zeilen und $n$ Spalten.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Die Zahlen $a_{ij}$ heißen **Elemente** oder **Koeffizienten** der Matrix $\mathbf{A}$, die Zahl $i$ der **Zeilenindex**, die Zahl $j$ der **Spaltenindex**.

Matrizen werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet, deren Koeffizienten mit den entsprechenden Kleinbuchstaben.

In der Literatur werden auch eckige Klammern $[a_{ij}]$ verwendet.

# Vektor

- Ein (Spalten-) **Vektor** ist eine $n \times 1$-Matrix: $\boxed{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

- Ein **Zeilenvektor** ist eine $1 \times n$-Matrix: $\boxed{\mathbf{x}^t = (x_1, \dots, x_n)}$

- Der $i$-te **Einheitsvektor** $\mathbf{e}_i$ ist der Vektor, in dem die $i$-te Komponente gleich $1$ und alle anderen gleich $0$ sind.

Vektoren werden mit *kleinen* lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Wir schreiben $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ für eine Matrix mit den Spalten(vektoren) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$.

# Spezielle Matrizen I

- Eine $n \times n$-Matrix heißt **quadratische Matrix**.
- Eine **obere Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, deren Elemente *unterhalb* der Hauptdiagonale alle Null sind.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Eine **untere Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, deren Elemente *oberhalb* der Hauptdiagonale alle Null sind.
- Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale gleich Null sind.

# Spezielle Matrizen II

- Eine Matrix, in der alle Koeffizienten gleich Null sind, heißt **Nullmatrix** und wird mit $\mathbf{O}_{n,m}$ oder kurz $\mathbf{0}$ bezeichnet.
- Die **Einheitsmatrix** ist eine Diagonalmatrix, bei der die Hauptdiagonalelemente gleich 1 sind. Sie wird mit $\mathbf{I}_n$ oder kurz $\mathbf{I}$ bezeichnet. (In der deutschsprachigen Literatur auch mit $\mathbf{E}$.)

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sowohl die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$ als auch die symmetrische Nullmatrix $\mathbf{O}_{n,n}$ sind ebenfalls Beispiele für Diagonalmatrizen, obere und untere Dreiecksmatrizen.

# Transponierte Matrix

Die **Transponierte** $\mathbf{A}^t$ (oder $\mathbf{A}'$) einer Matrix $\mathbf{A}$ erhalten wir, wenn wir aus Zeilen Spalten machen und umgekehrt:

$$\boxed{\left(a^t_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

# Multiplikation mit einer Konstanten

- Zwei Matrizen heißen **gleich**, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn die Anzahl der *Zeilen* und *Spalten* übereinstimmen und die Matrizen *koeffizientenweise* gleich sind, d.h. $\boxed{a_{ij} = b_{ij}}$.
- Eine Matrix $\mathbf{A}$ wird mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ *komponentenweise* multipliziert:

$$\boxed{\alpha \cdot \mathbf{A} = (\alpha \cdot a_{ij})}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

# Addition zweier Matrizen

Zwei $m \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ werden *komponentenweise* addiert:

$$\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)}$$

Die Addition zweier Matrizen ist nur möglich, wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten der beiden Matrizen übereinstimmen!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

# Multiplikation zweier Matrizen

Das Produkt zweier Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist.

D.h., wenn $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix ist, so muss $\mathbf{B}$ eine $n \times k$-Matrix sein. Die Produktmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist dann eine $m \times k$-Matrix.

Zur Berechnung des Elements $c_{ij}$ der Produktmatrix wird die $i$-te Zeile der ersten Matrix mit der $j$-ten Spalte der zweiten Matrix „multipliziert" (im Sinne eines Skalarprodukts):

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}}$$

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ!**

# Falksches Schema

$$
\begin{array}{ccc|cc}
\multicolumn{3}{c|}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \rightarrow} & 1 & 2 \\
\downarrow & & & 3 & 4 \\
 & & & 5 & 6 \\ \hline
1 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\
4 & 5 & 6 & c_{21} & c_{22} \\
7 & 8 & 9 & c_{31} & c_{32}
\end{array}
$$

$$c_{21} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = 49$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \end{pmatrix}$$

# Nicht-Kommutativität

**Achtung!**

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ!**

Im Allgemeinen gilt:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}$$

# Potenz einer Matrix

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}^n &= \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ mal}} \end{aligned}}$$

# Inverse Matrix

Falls für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}}$$

existiert, dann heißt $\mathbf{A}^{-1}$ die **inverse Matrix** von $\mathbf{A}$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt **invertierbar** falls sie eine Inverse besitzt, andernfalls heißt sie **singulär**.

**Achtung!**
Die inverse Matrix ist nur für *quadratische* Matrizen definiert.

# Rechengesetze für Matrizen

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$
$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

$$(\alpha\, \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$
$$\mathbf{A} \cdot (\alpha\, \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$$

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbar

$\Rightarrow$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ invertierbar

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{t} = \mathbf{B}^{t} \cdot \mathbf{A}^{t}$$
$$(\mathbf{A}^{t})^{t} = \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A}^{t})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{t}$$

**Achtung!**

Im Allgemeinen gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

# Rechnen mit Matrizen

Für *geeignet* dimensionierte Matrizen gelten ähnliche Rechengesetze wie für reelle Zahlen. Wir müssen dabei aber beachten:

- Die Nullmatrix $\mathbf{0}$ spielt dabei die Rolle der Zahl $0$.
- Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ entspricht dabei der Zahl 1.
- Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!
  Im Allgemeinen gilt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}^2$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{x} \\
&\qquad = (\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{x} \\
&\qquad = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{x} = \\
&\qquad = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1})\mathbf{x} \\
&\qquad = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})\mathbf{x} \\
&\qquad = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}
\end{aligned}$$

# Matrixgleichungen

Wird eine Matrixgleichung mit einer Matrix multipliziert, so muss dies auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens von **derselben** Seite (entweder *„von links“* oder *„von rechts“*) erfolgen!

Sei $\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} = 2\mathbf{A}$, wobei $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ bekannte Matrizen sind.
Wie lautet $\mathbf{X}$?

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} &= 2\,\mathbf{A} && \mid\quad \mathbf{A}^{-1}\cdot \\
\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{X} &= 2\,\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} && \\
\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{I}\cdot\mathbf{X} &= 2\,\mathbf{I} && \mid\quad -\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \\
\mathbf{X} &= 2\,\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} &&
\end{aligned}
$$

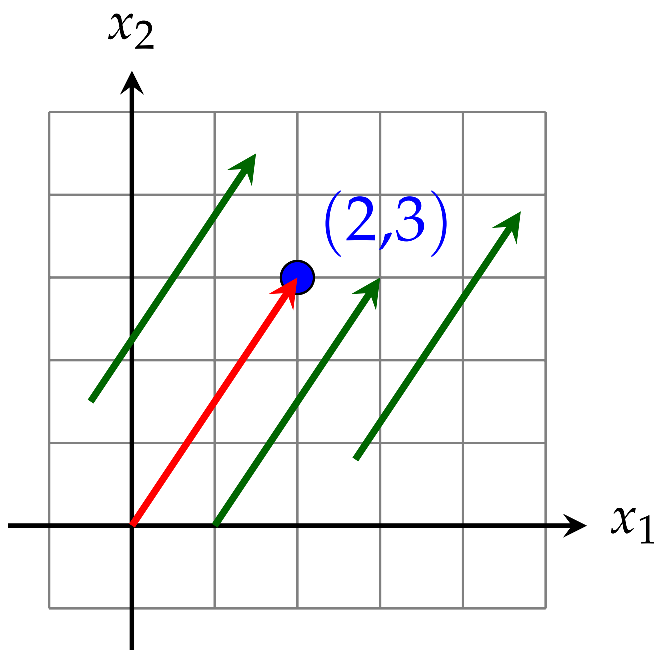
In dieser Gleichung ist natürlich darauf zu achten, dass die Matrizenoperationen tatsächlich definiert sind.

# Geometrische Interpretation I

Wir haben Vektoren als Spezialfälle von Matrizen kennen gelernt.
Wir können aber Vektoren auch geometrisch interpretieren.

Wir können uns den Vektor $\binom{x_1}{x_2}$ denken als

- **Punkt** $(x_1, x_2)$ in der $xy$-Ebene.
- Pfeil vom Ursprung zum Punkt $(x_1, x_2)$ (**Ortsvektor**).
- Pfeil mit gleicher Länge, Richtung und Orientierung wie dieser Ortsvektor. („**Klasse von Pfeilen**“).

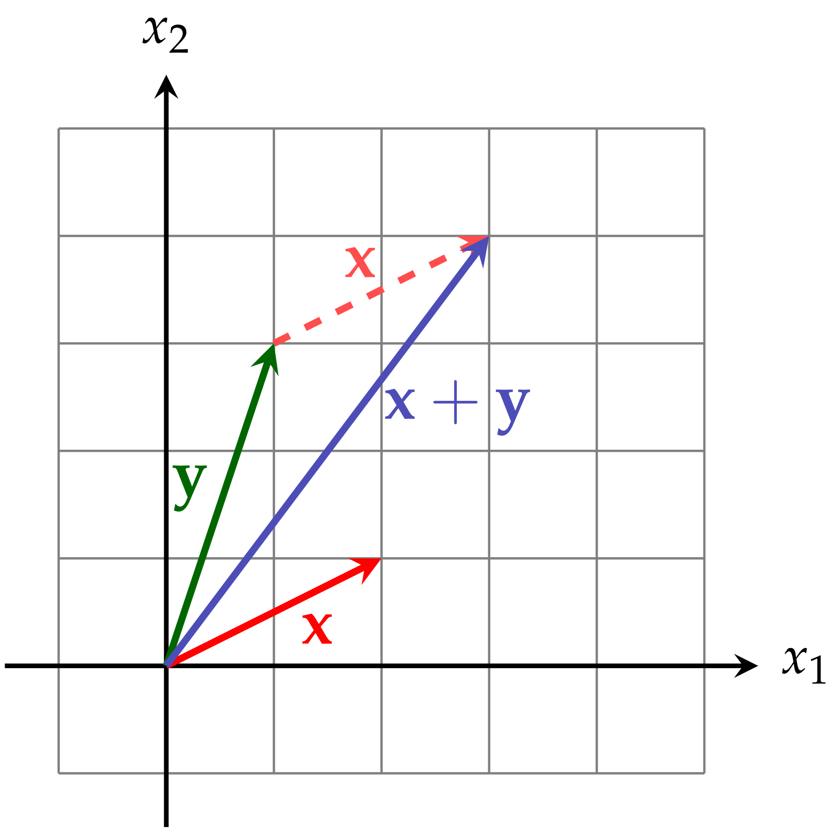



Wir wählen uns immer die Interpretation aus, die uns am besten passt.

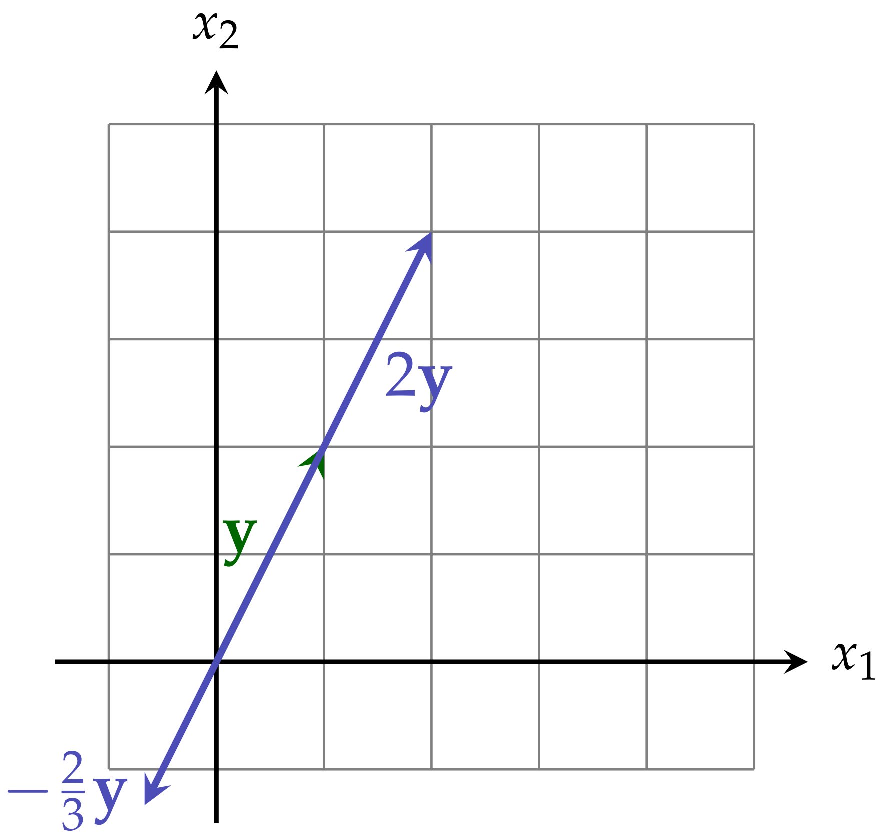
Mit diesen Bildern können wir denken („Denkkrücke“).
Rechnen müssen wir aber mit den Formeln!

# Geometrische Interpretation II

Vektoraddition




Multiplikation mit Skalar



# Skalarprodukt

Das **innere Produkt** (oder **Skalarprodukt**) zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist

$$\boxed{\mathbf{x}^t\,\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}$$

Zwei Vektoren heißen **orthogonal**, wenn $\boxed{\mathbf{x}^t\,\mathbf{y} = 0}$.

Sie stehen dann *normal* (*senkrecht*, *im rechten Winkel*) aufeinander.

Das innere Produkt von $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ lautet

$$\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

# Norm

Die **Norm** $\|\mathbf{x}\|$ eines Vektors $\mathbf{x}$ ist

$$\boxed{\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^t\,\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

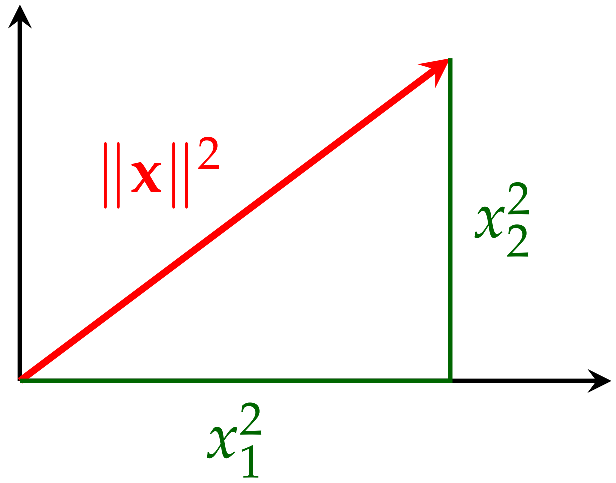
Ein Vektor $\mathbf{x}$ heißt **normiert**, falls $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Die Norm von $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lautet

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

# Geometrische Interpretation

Die Norm eines Vektors kann als Länge interpretiert werden:




Pythagoräischer Lehrsatz:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Das innere Produkt misst den Winkel zwischen zwei Vektoren.

$$\boxed{\cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}^t\,\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}}$$

# Eigenschaften der Norm

**(i)** $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.

**(ii)** $\|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = 0$.

**(iii)** $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(iv)** $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. (Dreiecksungleichung)

# Un/gleichungen

- **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$\boxed{|\mathbf{x}^t\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

- **Minkowski Ungleichung** (Dreiecksungleichung)

$$\boxed{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|}$$

- Satz von **Pythagoras**

  Für orthogonale Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gilt

$$\boxed{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2}$$

# Lineares Gleichungssystem

Lineares Gleichungssystem aus $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Variablen}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Konstantenvektor}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

# Matrixdarstellung

Vorteile der Matrixdarstellung:

- Abgekürzte, kompakte Schreibweise.
- Die Anzahl der Variablen geht in dieser Darstellung nicht mehr ein.
- Die Lösungen können mit Hilfe der Matrizenrechnung berechnet und interpretiert werden.
- Wir können die einzelnen Bestandteile mit Namen versehen, etwa PRODUKTIONSVEKTOR, NACHFRAGEVEKTOR, TECHNOLOGIEMATRIX, etc. im Falle des Leontief-Modells.

# Leontief Modell

Input-Output Modell mit

$\mathbf{A}$ … Technologiematrix

$\mathbf{x}$ … Produktionsvektor

$\mathbf{b}$ … Nachfragevektor

Dann gilt: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Für eine vorgegebene Nachfrage $\mathbf{b}$ erhalten wir die notwendige Produktion durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} && \quad \Big| \quad - \mathbf{A}\mathbf{x} \\
\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{b} && \quad \Big| \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \\
\mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

# Lösung eines linearen Gleichungssystem

Es gibt drei Lösungsmöglichkeiten:

- Das Gleichungssystem hat *genau eine* Lösung.
- Das Gleichungssystem ist *inkonsistent* (nicht lösbar).
- Das Gleichungssystem hat *unendlich viele* Lösungen.

Aus der Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann noch nicht geschlossen werden, wie viele Lösungen ein Gleichungssystem besitzt.

Beim **Gaußschen Eliminationsverfahren** wird die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ in die Stufenform umgeformt.

In der **Stufenform** nimmt die Anzahl der Elemente gleich 0 auf der linken Seite von Zeile zu Zeile um mindestens eins zu.

Durch **Rücksubstitution** lässt sich die Lösung bestimmen.

# Gaußsches Eliminationsverfahren

Es sind (nur) die folgenden Operationen erlaubt:

- Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten ($\neq 0$).
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
- Vertauschen zweier Zeilen.

Diese Operationen lassen die Lösung des Gleichungssystems unverändert. (*Äquivalenzumformungen*)

# Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{rrr|r} 1{,}0 & -0{,}2 & -0{,}2 & 7{,}0 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}1 & 12{,}5 \\ 0{,}0 & -0{,}5 & 0{,}9 & 16{,}5 \end{array}$$

Wir addieren zunächst das $0{,}4$-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile.
Wir schreiben dafür kurz:

$$Z2 \leftarrow Z2 + 0{,}4 \times Z1$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -0{,}20 & -0{,}20 & 7{,}0 \\ 0 & 0{,}72 & -0{,}18 & 15{,}3 \\ 0 & -0{,}50 & 0{,}90 & 16{,}5 \end{array}$$

# Gaußsches Eliminationsverfahren

$$Z3 \leftarrow Z3 + \frac{0{,}5}{0{,}72} \times Z2$$

$$\begin{array}{rrr|r}
1 & -0{,}20 & -0{,}20 & 7{,}0 \\
0 & 0{,}72 & -0{,}18 & 15{,}3 \\
0 & 0 & 0{,}775 & 27{,}125
\end{array}$$

# Rücksubstitution

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -0{,}20 & -0{,}20 & 7{,}0 \\ 0 & 0{,}72 & -0{,}18 & 15{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}775 & 27{,}125 \end{array}$$

Aus der dritten Zeile erhalten wir direkt:

$$0{,}775 \cdot x_3 = 27{,}125 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_3 = 35}$$

Restlichen Variablen $x_2$ und $x_1$ durch **Rücksubstitution**:

$$0{,}72 \cdot x_2 - 0{,}18 \cdot 35 = 15{,}3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 30}$$

$$x_1 - 0{,}2 \cdot 30 - 0{,}2 \cdot 35 = 7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 20}$$

Lösung ist eindeutig: $\mathbf{x} = (20{,}30{,}35)^t$

# Beispiel 2

Suche die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 4\,x_2 + 5\,x_3 &= 1 \\ x_1 + \phantom{4\,}x_2 - \phantom{5\,}x_3 &= 2 \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 + 3\,x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{array}$$

$$Z2 \leftarrow 3 \times Z2 - Z1, \quad Z3 \leftarrow 3 \times Z3 - 5 \times Z1$$

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & -2 & -16 & 7 \end{array}$$

# Beispiel 2

$$Z3 \leftarrow Z3 - 2 \times Z2$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Aus der dritten Zeile erhalten wir $0 = -3$, ein *Widerspruch*.

Das Gleichungssystem ist **inkonsistent**.

# Beispiel 3

Suche die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + \ \ 8\,x_2 + 10\,x_3 + 10\,x_4 &= 0 \\ x_1 + \ \ 5\,x_2 + \ \ 2\,x_3 + \ \ 9\,x_4 &= 1 \\ -3\,x_1 - 10\,x_2 - 21\,x_3 - \ \ 6\,x_4 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 8 & 10 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 9 & 1 \\ -3 & -10 & -21 & -6 & -4 \end{array}$$

$$Z2 \leftarrow 2 \times Z2 - Z1, \quad Z3 \leftarrow 2 \times Z3 + 3 \times Z1$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 8 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 18 & -8 \end{array}$$

# Beispiel 3

$$Z3 \leftarrow Z3 - 2 \times Z2$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
2 & 8 & 10 & 10 & 0 \\
0 & 2 & -6 & 8 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -12
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat **unendlich** viele Lösungen. Das können wir daran erkennen, dass ***nach*** Erreichen der Stufenform mehr Variablen als Gleichungen übrig bleiben.

# Beispiel 3

Aus der dritten Zeile erhalten wir direkt:

$$2 \cdot x_4 = -12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_4 = -6}$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$2 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 + 8 \cdot (-6) = 2$$

Wir setzen $x_3$ gleich einer *Pseudolösung* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{x_3 = \alpha}$, und erhalten

$$x_2 - 3 \cdot \alpha + 4 \cdot (-6) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 25 + 3\,\alpha}$$

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot (25 + 3 \cdot \alpha) + 10 \cdot \alpha + 10 \cdot (-6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -70 - 17 \cdot \alpha}$$

# Beispiel 3

Jede Belegung der Pseudolösung $\alpha$ liefert eine gültige Lösung:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 - 17 \cdot \alpha \\ 25 + 3\,\alpha \\ \alpha \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ 25 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -17 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

# Äquivalente Lösungen

Wir hätten in Beispiel 3 genauso $x_2 = \alpha'$ setzen können, und daraus das $x_3$ ausgerechnet:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{215}{3} \\ 0 \\ -\frac{25}{3} \\ -6 \end{pmatrix} + \alpha' \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha' \in \mathbb{R}$$

Die beiden Lösungsmengen sind aber gleich!
Es handelt sich dabei nur zwei verschiedene – aber äquivalente – Parameterdarstellungen derselben Gerade.

Die Lösungsmenge ist immer eindeutig bestimmt,
die Darstellung der Lösung hingegen nicht.

# Das Gauß-Jordansche Verfahren

Berechnung der inversen Matrix:

**(1)** Stelle die erweiterte Matrix auf, die *links* die zu invertierende Matrix und *rechts* die (entsprechend dimensionierte) *Einheitsmatrix* enthält.

**(2)** Formen die erweiterte Matrix mit den *Umformungsschritten* des Gaußschen Eliminationsverfahrens so um, dass die linke Seite zur Einheitsmatrix wird.

**(3)** Entweder ist das Verfahren erfolgreich, dann erhalten wir auf der rechten Seite die *inverse Matrix*.

**(4)** Oder das Verfahren bricht ab (wir erhalten auf der linken Seite eine Zeile aus Nullen). Dann ist die Matrix *singulär*.

# Beispiel 1

Wir suchen die inverse Matrix zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) Stelle die erweitere Matrix auf:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Beispiel 1

(2) Umformen:

$$Z1 \leftarrow \tfrac{1}{3} \times Z1, \quad Z2 \leftarrow 3 \times Z2 - Z1, \quad Z3 \leftarrow Z3 + Z1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Z1 \leftarrow Z1 - \tfrac{2}{3} \times Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Beispiel 1

$$Z2 \leftarrow Z2 - 3 \times Z3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(3) Die Matrix ist daher invertierbar und ihre Inverse lautet

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel 2

Wir suchen die inverse Matrix zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Stelle die erweitere Matrix auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Beispiel 2

(2) Umformen:

$$Z1 \leftarrow \tfrac{1}{3} \times Z1, \quad Z2 \leftarrow 3 \times Z2 - 2 \times Z1, \quad Z3 \leftarrow 3 \times Z3 - 5 \times Z1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$Z1 \leftarrow Z1 - \tfrac{1}{30} \times Z2, \quad Z2 \leftarrow \tfrac{1}{10} \times Z2, \quad Z3 \leftarrow Z3 - Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{11}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

(4) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist nicht invertierbar.

# Leontief Modell

$\mathbf{A}$ ... Technologiematrix

$\mathbf{x}$ ... Produktionsvektor

$\mathbf{b}$ ... Nachfragevektor

$\mathbf{p}$ ... Güterpreise

$\mathbf{w}$ ... Arbeitslöhne

Kosten der Produktion müssen durch Preise gedeckt sein:

$$p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i + w_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \cdots + a_{nj} p_n + w_j$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^t \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

Bei fixen Löhnen muss daher gelten:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{w}$$

Für das Input-Output Modell gilt weiters:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

# Leontief Modell

Nachfrage gegeben durch Löhne für die produzierten Gütermengen:

$$\text{Nachfrage} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = \mathbf{w}^t \mathbf{x}$$

Angebot gegeben durch Preise der nachgefragten Gütermenge:

$$\text{Angebot} = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \cdots + p_n b_n = \mathbf{p}^t \mathbf{b}$$

Falls in einem Input-Output Modell die Gleichungen

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{p} = \mathbf{A}^t \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

gelten, dann herrscht Markgleichgewicht, d.h. $\mathbf{w}^t \mathbf{x} = \mathbf{p}^t \mathbf{b}$.

**Beweis:**

$$\mathbf{w}^t \mathbf{x} = (\mathbf{p}^t - \mathbf{p}^t \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{p}^t (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{p}^t (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{p}^t \mathbf{b}$$

# Zusammenfassung

- Matrix und Vektor
- Dreiecks- und Diagonalmatrizen
- Nullmatrix und Einheitsmatrix
- Transponierte Matrix
- Inverse Matrix
- Matrizenrechnung (Matrixalgebra)
- Matrixgleichung
- Norm und inneres Produkt von Vektoren
- Lineare Gleichungssysteme
- Gaußsches Eliminationsverfahren
- Gauß-Jordansches Verfahren