

## Kapitel 2

# Matrixalgebra

### Ein sehr einfaches Leontief-Modell

Eine Stadt betreibt die Unternehmen ÖFFENTLICHER VERKEHR, ELEKTRIZITÄT und GAS.

Technologiematrix und wöchentliche Nachfrage (in Werteinheiten):

Verbrauch an	für	Verkehr	Elektrizität	Gas	Konsum
Verkehr		0,0	0,2	0,2	7,0
Elektrizität		0,4	0,2	0,1	12,5
Gas		0,0	0,5	0,1	16,5

Wie groß muss die wöchentliche Produktion sein, damit die Nachfrage befriedigt werden kann?

### Ein sehr einfaches Leontief-Modell

Wir bezeichnen die unbekannte Produktion von VERKEHR, ELEKTRIZITÄT und GAS mit  $x_1$ ,  $x_2$  bzw.  $x_3$ . Für die Produktion muss dann gelten:

$$\text{Nachfrage} = \text{Produktion} - \text{interner Verbrauch}$$

$$7,0 = x_1 - (0,0 x_1 + 0,2 x_2 + 0,2 x_3)$$

$$12,5 = x_2 - (0,4 x_1 + 0,2 x_2 + 0,1 x_3)$$

$$16,5 = x_3 - (0,0 x_1 + 0,5 x_2 + 0,1 x_3)$$

Durch Umformen erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$1,0 x_1 - 0,2 x_2 - 0,2 x_3 = 7,0$$

$$-0,4 x_1 + 0,8 x_2 - 0,1 x_3 = 12,5$$

$$0,0 x_1 - 0,5 x_2 + 0,9 x_3 = 16,5$$

Wie müssen wir  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  wählen?

## Matrix

Eine  $m \times n$ -**Matrix** ist ein rechteckiges Schema bestehend aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Die Zahlen  $a_{ij}$  heißen **Elemente** oder **Koeffizienten** der Matrix  $\mathbf{A}$ , die Zahl  $i$  der **Zeilenindex**, die Zahl  $j$  der **Spaltenindex**.

Matrizen werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet, deren Koeffizienten mit den entsprechenden Kleinbuchstaben.

In der Literatur werden auch eckige Klammern  $[a_{ij}]$  verwendet.

## Vektor

- ▶ Ein (Spalten-) **Vektor** ist eine  $n \times 1$ -Matrix:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- ▶ Ein **Zeilenvektor** ist eine  $1 \times n$ -Matrix:  $\mathbf{x}^t = (x_1, \dots, x_n)$

- ▶ Der  $i$ -te **Einheitsvektor**  $\mathbf{e}_i$  ist der Vektor, in dem die  $i$ -te Komponente gleich 1 und alle anderen gleich 0 sind.

Vektoren werden mit *kleinen* lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Wir schreiben  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  für eine Matrix mit den Spalten(vektoren)  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ .

## Spezielle Matrizen I

- ▶ Eine  $n \times n$ -Matrix heißt **quadratische Matrix**.
- ▶ Eine **obere Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, deren Elemente *unterhalb* der Hauptdiagonale alle Null sind.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- ▶ Eine **untere Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, deren Elemente *oberhalb* der Hauptdiagonale alle Null sind.
- ▶ Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale gleich Null sind.

## Spezielle Matrizen II

- ▶ Eine Matrix, in der alle Koeffizienten gleich Null sind, heißt **Nullmatrix** und wird mit  $\mathbf{O}_{n,m}$  oder kurz  $\mathbf{0}$  bezeichnet.
- ▶ Die **Einheitsmatrix** ist eine Diagonalmatrix, bei der die Hauptdiagonalelemente gleich 1 sind. Sie wird mit  $\mathbf{I}_n$  oder kurz  $\mathbf{I}$  bezeichnet. (In der deutschsprachigen Literatur auch mit  $\mathbf{E}$ .)

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sowohl die Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_n$  als auch die symmetrische Nullmatrix  $\mathbf{O}_{n,n}$  sind ebenfalls Beispiele für Diagonalmatrizen, obere und untere Dreiecksmatrizen.

## Transponierte Matrix

Die **Transponierte**  $\mathbf{A}^t$  (oder  $\mathbf{A}'$ ) einer Matrix  $\mathbf{A}$  erhalten wir, wenn wir aus Zeilen Spalten machen und umgekehrt:

$$\left( a_{ij}^t \right) = \left( a_{ji} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

## Multiplikation mit einer Konstanten

- ▶ Zwei Matrizen heißen **gleich**,  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , wenn die Anzahl der *Zeilen* und *Spalten* übereinstimmen und die Matrizen *koeffizientenweise* gleich sind, d.h.  $a_{ij} = b_{ij}$ .

- ▶ Eine Matrix  $\mathbf{A}$  wird mit einer Konstanten  $\alpha \in \mathbb{R}$  *komponentenweise* multipliziert:

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = (\alpha \cdot a_{ij})$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

## Addition zweier Matrizen

Zwei  $m \times n$ -Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  werden *komponentenweise* addiert:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Die Addition zweier Matrizen ist nur möglich, wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten der beiden Matrizen übereinstimmen!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

## Multiplikation zweier Matrizen

Das Produkt zweier Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist.

D.h., wenn  $\mathbf{A}$  eine  $m \times n$ -Matrix ist, so muss  $\mathbf{B}$  eine  $n \times k$ -Matrix sein. Die Produktmatrix  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ist dann eine  $m \times k$ -Matrix.

Zur Berechnung des Elements  $c_{ij}$  der Produktmatrix wird die  $i$ -te Zeile der ersten Matrix mit der  $j$ -ten Spalte der zweiten Matrix „multipliziert“ (im Sinne eines Skalarprodukts):

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}$$

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ!**

## Falksches Schema

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow$	1	2
$\downarrow$	3	4
	5	6
1 2 3	$c_{11}$	$c_{12}$
4 5 6	$c_{21}$	$c_{22}$
7 8 9	$c_{31}$	$c_{32}$

$$c_{21} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = 49$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \end{pmatrix}$$

## Nicht-Kommutativität

### Achtung!

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ!**

Im Allgemeinen gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

## Potenz einer Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}^n &= \underbrace{\mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ mal}} \end{aligned}$$

## Inverse Matrix

Falls für eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  eine Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

existiert, dann heißt  $\mathbf{A}^{-1}$  die **inverse Matrix** von  $\mathbf{A}$ .

Die Matrix  $\mathbf{A}$  heißt **invertierbar** falls sie eine Inverse besitzt, andernfalls heißt sie **singulär**.

### Achtung!

Die inverse Matrix ist nur für *quadratische* Matrizen definiert.

## Rechengesetze für Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{A} + \mathbf{0} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} &= \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) &= \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  invertierbar  
 $\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  invertierbar

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^t &= \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}^t \\ (\mathbf{A}^t)^t &= \mathbf{A} \\ (\mathbf{A}^t)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^t \end{aligned}$$

**Achtung!**

Im Allgemeinen gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

## Rechnen mit Matrizen

Für *geeignet* dimensionierte Matrizen gelten ähnliche Rechengesetze wie für reelle Zahlen. Wir müssen dabei aber beachten:

- ▶ Die Nullmatrix  $\mathbf{0}$  spielt dabei die Rolle der Zahl 0.
- ▶ Die Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  entspricht dabei der Zahl 1.
- ▶ Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!  
Im Allgemeinen gilt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} = \\ &= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} \end{aligned}$$

## Matrixgleichungen

Wird eine Matrixgleichung mit einer Matrix multipliziert, so muss dies auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens von **derselben** Seite (entweder „von links“ oder „von rechts“) erfolgen!

Sei  $\mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{X} = 2\mathbf{A}$ , wobei  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  bekannte Matrizen sind.  
Wie lautet  $\mathbf{X}$ ?

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{X} = 2\mathbf{A} & & | \quad \mathbf{A}^{-1} \cdot \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{X} = 2\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} & & \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = 2\mathbf{I} & & | \quad - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{X} = 2\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} & & \end{array}$$

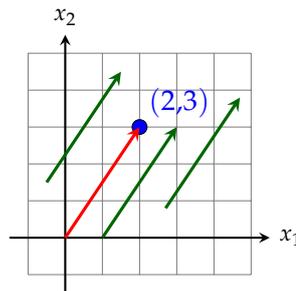
In dieser Gleichung ist natürlich darauf zu achten, dass die Matrizenoperationen tatsächlich definiert sind.

## Geometrische Interpretation I

Wir haben Vektoren als Spezialfälle von Matrizen kennen gelernt.  
Wir können aber Vektoren auch geometrisch interpretieren.

Wir können uns den Vektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  denken als

- ▶ **Punkt**  $(x_1, x_2)$  in der  $xy$ -Ebene.
- ▶ Pfeil vom Ursprung zum Punkt  $(x_1, x_2)$  (**Ortsvektor**).
- ▶ Pfeil mit gleicher Länge, Richtung und Orientierung wie dieser Ortsvektor („**Klasse von Pfeilen**“).

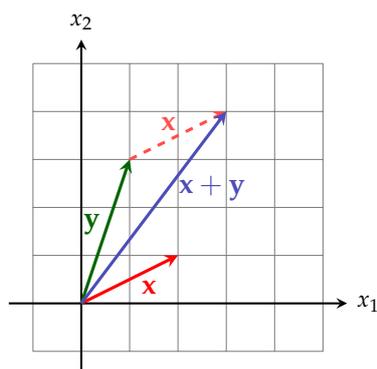


Wir wählen uns immer die Interpretation aus, die uns am besten passt.

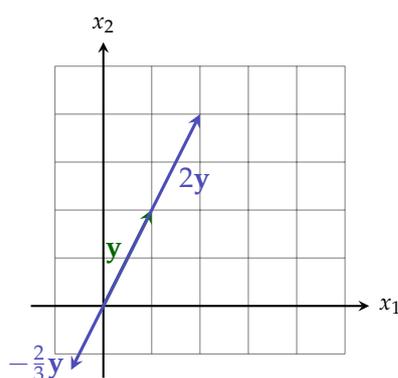
Mit diesen Bildern können wir denken („Denkkrücke“).  
Rechnen müssen wir aber mit den Formeln!

## Geometrische Interpretation II

Vektoraddition



Multiplikation mit Skalar



## Skalarprodukt

Das **innere Produkt** (oder **Skalarprodukt**) zweier Vektoren  $x$  und  $y$  ist

$$\mathbf{x}^t \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Zwei Vektoren heißen **orthogonal**, wenn  $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = 0$ .

Sie stehen dann *normal* (senkrecht, im rechten Winkel) aufeinander.

Das innere Produkt von  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  lautet

$$\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

## Norm

Die **Norm**  $\|\mathbf{x}\|$  eines Vektors  $\mathbf{x}$  ist

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

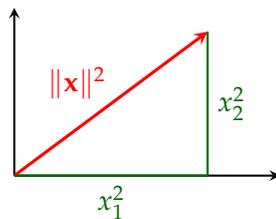
Ein Vektor  $\mathbf{x}$  heißt **normiert**, falls  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

Die Norm von  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  lautet

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

## Geometrische Interpretation

Die Norm eines Vektors kann als Länge interpretiert werden:



Pythagoräischer Lehrsatz:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Das innere Produkt misst den Winkel zwischen zwei Vektoren.

$$\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

## Eigenschaften der Norm

- (i)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ .
- (ii)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (iii)  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (iv)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ . (Dreiecksungleichung)



## Leontief Modell

Input-Output Modell mit

$\mathbf{A}$  ... Technologiematrix

$\mathbf{x}$  ... Produktionsvektor

$\mathbf{b}$  ... Nachfragevektor

Dann gilt:  $\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$

Für eine vorgegebene Nachfrage  $\mathbf{b}$  erhalten wir die notwendige Produktion durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{b} & | & - \mathbf{Ax} \\ \mathbf{x} - \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{b} & | & (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

## Lösung eines linearen Gleichungssystem

Es gibt drei Lösungsmöglichkeiten:

- ▶ Das Gleichungssystem hat *genau eine* Lösung.
- ▶ Das Gleichungssystem ist *inkonsistent* (nicht lösbar).
- ▶ Das Gleichungssystem hat *unendlich viele* Lösungen.

Aus der Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann noch nicht geschlossen werden, wie viele Lösungen ein Gleichungssystem besitzt.

Beim **Gaußschen Eliminationsverfahren** wird die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  in die Stufenform umgeformt.

In der **Stufenform** nimmt die Anzahl der Elemente gleich 0 auf der linken Seite von Zeile zu Zeile um mindestens eins zu.

Durch **Rücksubstitution** lässt sich die Lösung bestimmen.

## Gaußsches Eliminationsverfahren

Es sind (nur) die folgenden Operationen erlaubt:

- ▶ Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten ( $\neq 0$ ).
- ▶ Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
- ▶ Vertauschen zweier Zeilen.

Diese Operationen lassen die Lösung des Gleichungssystems unverändert. (*Äquivalenzumformungen*)

## Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{ccc|c} 1,0 & -0,2 & -0,2 & 7,0 \\ -0,4 & 0,8 & -0,1 & 12,5 \\ 0,0 & -0,5 & 0,9 & 16,5 \end{array}$$

Wir addieren zunächst das 0,4-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile.  
Wir schreiben dafür kurz:

$$Z2 \leftarrow Z2 + 0,4 \times Z1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,20 & -0,20 & 7,0 \\ 0 & 0,72 & -0,18 & 15,3 \\ 0 & -0,50 & 0,90 & 16,5 \end{array}$$

## Gaußsches Eliminationsverfahren

$$Z3 \leftarrow Z3 + \frac{0,5}{0,72} \times Z2$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,20 & -0,20 & 7,0 \\ 0 & 0,72 & -0,18 & 15,3 \\ 0 & 0 & 0,775 & 27,125 \end{array}$$

## Rücksubstitution

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,20 & -0,20 & 7,0 \\ 0 & 0,72 & -0,18 & 15,3 \\ 0 & 0 & 0,775 & 27,125 \end{array}$$

Aus der dritten Zeile erhalten wir direkt:

$$0,775 \cdot x_3 = 27,125 \Rightarrow x_3 = 35$$

Restlichen Variablen  $x_2$  und  $x_1$  durch **Rücksubstitution**:

$$0,72 \cdot x_2 - 0,18 \cdot 35 = 15,3 \Rightarrow x_2 = 30$$

$$x_1 - 0,2 \cdot 30 - 0,2 \cdot 35 = 7 \Rightarrow x_1 = 20$$

Lösung ist eindeutig:  $\mathbf{x} = (20, 30, 35)^t$

## Beispiel 2

Suche die Lösung des Gleichungssystems:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{array}$$

$$Z2 \leftarrow 3 \times Z2 - Z1, \quad Z3 \leftarrow 3 \times Z3 - 5 \times Z1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & -2 & -16 & 7 \end{array}$$

## Beispiel 2

$$Z3 \leftarrow Z3 - 2 \times Z2$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Aus der dritten Zeile erhalten wir  $0 = -3$ , ein *Widerspruch*.

Das Gleichungssystem ist **inkonsistent**.

## Beispiel 3

Suche die Lösung des Gleichungssystems:

$$2x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 10x_4 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 1$$

$$-3x_1 - 10x_2 - 21x_3 - 6x_4 = -4$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & 10 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 9 & 1 \\ -3 & -10 & -21 & -6 & -4 \end{array}$$

$$Z2 \leftarrow 2 \times Z2 - Z1, \quad Z3 \leftarrow 2 \times Z3 + 3 \times Z1$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 18 & -8 \end{array}$$

### Beispiel 3

$$Z3 \leftarrow Z3 - 2 \times Z2$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -12 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat **unendlich** viele Lösungen. Das können wir daran erkennen, dass **nach** Erreichen der Stufenform mehr Variablen als Gleichungen übrig bleiben.

### Beispiel 3

Aus der dritten Zeile erhalten wir direkt:

$$2 \cdot x_4 = -12 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -6$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$2 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 + 8 \cdot (-6) = 2$$

Wir setzen  $x_3$  gleich einer *Pseudolösung*  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x_3 = \alpha$ , und erhalten

$$x_2 - 3 \cdot \alpha + 4 \cdot (-6) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 25 + 3\alpha$$

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot (25 + 3 \cdot \alpha) + 10 \cdot \alpha + 10 \cdot (-6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -70 - 17 \cdot \alpha$$

### Beispiel 3

Jede Belegung der Pseudolösung  $\alpha$  liefert eine gültige Lösung:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 - 17 \cdot \alpha \\ 25 + 3\alpha \\ \alpha \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ 25 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -17 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

## Äquivalente Lösungen

Wir hätten in Beispiel 3 genauso  $x_2 = \alpha'$  setzen können, und daraus das  $x_3$  ausgerechnet:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{215}{3} \\ 0 \\ -\frac{25}{3} \\ -6 \end{pmatrix} + \alpha' \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha' \in \mathbb{R}$$

Die beiden Lösungsmengen sind aber gleich!

Es handelt sich dabei nur zwei verschiedene – aber äquivalente – Parameterdarstellungen derselben Gerade.

Die Lösungsmenge ist immer eindeutig bestimmt, die Darstellung der Lösung hingegen nicht.

## Das Gauß-Jordansche Verfahren

Berechnung der inversen Matrix:

- (1) Stelle die erweiterte Matrix auf, die *links* die zu invertierende Matrix und *rechts* die (entsprechend dimensionierte) *Einheitsmatrix* enthält.
- (2) Formen die erweiterte Matrix mit den *Umformungsschritten* des Gaußschen Eliminationsverfahrens so um, dass die linke Seite zur Einheitsmatrix wird.
- (3) Entweder ist das Verfahren erfolgreich, dann erhalten wir auf der rechten Seite die *inverse Matrix*.
- (4) Oder das Verfahren bricht ab (wir erhalten auf der linken Seite eine Zeile aus Nullen). Dann ist die Matrix *singulär*.

## Beispiel 1

Wir suchen die inverse Matrix zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) Stelle die erweiterte Matrix auf:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

## Beispiel 1

(2) Umformen:

$$Z1 \leftarrow \frac{1}{3} \times Z1, \quad Z2 \leftarrow 3 \times Z2 - Z1, \quad Z3 \leftarrow Z3 + Z1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$Z1 \leftarrow Z1 - \frac{2}{3} \times Z2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

## Beispiel 1

$$Z2 \leftarrow Z2 - 3 \times Z3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(3) Die Matrix ist daher invertierbar und ihre Inverse lautet

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 2

Wir suchen die inverse Matrix zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Stelle die erweiterte Matrix auf:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

## Beispiel 2

(2) Umformen:

$$Z1 \leftarrow \frac{1}{3} \times Z1, \quad Z2 \leftarrow 3 \times Z2 - 2 \times Z1, \quad Z3 \leftarrow 3 \times Z3 - 5 \times Z1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & -5 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$Z1 \leftarrow Z1 - \frac{1}{30} \times Z2, \quad Z2 \leftarrow \frac{1}{10} \times Z2, \quad Z3 \leftarrow Z3 - Z2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{11}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

(4) Die Matrix **A** ist nicht invertierbar.

## Leontief Modell

**A** ... Technologiematrix      **p** ... Güterpreise  
**x** ... Produktionsvektor      **w** ... Arbeitslöhne  
**b** ... Nachfragevektor

Kosten der Produktion müssen durch Preise gedeckt sein:

$$p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i + w_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots + a_{nj} p_n + w_j$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^t \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

Bei fixen Löhnen muss daher gelten:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{w}$$

Für das Input-Output Modell gilt weiters:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

## Leontief Modell

Nachfrage gegeben durch Löhne für die produzierten Gütermengen:

$$\text{Nachfrage} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n = \mathbf{w}^t \mathbf{x}$$

Angebot gegeben durch Preise der nachgefragten Gütermenge:

$$\text{Angebot} = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_n b_n = \mathbf{p}^t \mathbf{b}$$

Falls in einem Input-Output Modell die Gleichungen

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \mathbf{A}^t \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

gelten, dann herrscht Marktgleichgewicht, d.h.  $\mathbf{w}^t \mathbf{x} = \mathbf{p}^t \mathbf{b}$ .

**Beweis:**

$$\mathbf{w}^t \mathbf{x} = (\mathbf{p}^t - \mathbf{p}^t \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{p}^t (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{p}^t (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{p}^t \mathbf{b}$$

## Zusammenfassung

- ▶ Matrix und Vektor
- ▶ Dreiecks- und Diagonalmatrizen
- ▶ Nullmatrix und Einheitsmatrix
- ▶ Transponierte Matrix
- ▶ Inverse Matrix
- ▶ Matrizenrechnung (Matrixalgebra)
- ▶ Matrixgleichung
- ▶ Norm und inneres Produkt von Vektoren
- ▶ Lineare Gleichungssysteme
- ▶ Gaußsches Eliminationsverfahren
- ▶ Gauß-Jordansches Verfahren