Kapitel 15

Kontrolltheorie

Wirtschaftswachstum

Aufgabe: Maximiere Konsum im Zeitraum $[0, T]$:

$$\max_{0 \leq s(t) \leq 1} \int_0^T (1 - s(t))\, f(k(t))\, dt$$

$f(k)$ ... Produktionsfunktion
$k(t)$ ... Kapitalstock zum Zeitpunkt t
$s(t)$ ... Investitionsrate zum Zeitpunkt t , $s \in [0,1]$

Wir können nur $s(t)$ zu jedem Zeitpunkt frei wählen.
s heißt **Kontrollvariable**.

$k(t)$ folgt der Differentialgleichung

$$k'(t) = s(t)\, f(k(t)), \quad k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T$$

Ölförderung

$y(t)$ ... Ölmenge in Ölfeld zum Zeitpunkt t
$u(t)$ ... Fördermenge zum Zeitpunkt t: $y'(t) = -u(t)$
$p(t)$ ... Ölpreis zum Zeitpunkt t
$C(t, y, u)$ ... Förderkosten
r ... Zinssatz (konstant)

Aufgabe I: Maximiere Gewinn im fixierten Zeitraum $[0, T]$:

$$\max_{u(t) \geq 0} \int_0^T \big[p(t)u(t) - C(t, y(t), u(t))\big] e^{-rt}\, dt$$

Wir können nur $u(t)$ zu jedem Zeitpunkt frei wählen, wobei $u(t) \geq 0$.

$y(t)$ folgt der Differentialgleichung:

$$y'(t) = -u(t), \quad y(0) = K, \quad y(T) \geq 0$$

Ölförderung

Aufgabe I:
Finde *Ölförderprogramm* $u(t)$, dass den Gewinn in einem fixierten Zeitraum $[0, T]$ maximiert.

Aufgabe II:
Finde *Ölförderprogramm* $u(t)$ *und Förderzeit* T, dass den Gewinn im Zeitraum $[0, T]$ maximiert.

Das Standardproblem (T fest)

1. Finde Maximum von

$$\max_u \int_0^T f(t, y, u)\, dt, \qquad u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$$

u heißt **Kontrollvariable**, $\mathcal{U}$ ist der **Kontrollbereich**.

2. *Kontrollierte Differentialgleichung* (Anfangswertproblem)

$$y' = g(t, y, u), \qquad y(0) = y_0$$

3. Endwert
   - **(a)** $y(T) = y_1$
   - **(b)** $y(T) \geq y_1$ [oder: $y(T) \leq y_1$]
   - **(c)** $y(T)$ frei

(y, u) heißt **zulässiges Paar** falls (2) und (3) erfüllt sind.

Hamiltonfunktion

Analog zur Lagrangefunktion definieren wir die Funktion

$$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = \lambda_0 f(t, y, u) + \lambda(t) g(t, y, u)$$

Diese Funktion wird als **Hamilton-Funktion** bezeichnet.

Die Funktion $\lambda(t)$ heißt die **adjungierte Variable**.

Die Zahl $\lambda_0 \in \{0,1\}$ kann bis auf wenige Ausnahmen gleich 1 gesetzt werden.

Wir werden daher im folgenden stets $\lambda_0 = 1$ voraussetzen:

$$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = f(t, y, u) + \lambda(t) g(t, y, u)$$

Maximumsprinzip

Sei (y^*, u^*) ein optimales Paar für das Standardproblem.
Dann existiert eine stetige Funktion $\lambda(t)$, sodass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

(i) u^* maximiert $\mathcal{H}$ bezüglich u, i.e.,

$$\mathcal{H}(t, y^*, u^*, \lambda) \geq \mathcal{H}(t, y^*, u, \lambda) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}$$

(ii) λ erfüllt die Differentialgleichung

$$\lambda' = -\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}(t, y^*, u^*, \lambda)$$

(iii) Transversalitätsbedingung
(a) $y(T) = y_1$: $\lambda(T)$ frei
(b) $y(T) \geq y_1$: $\lambda(T) \geq 0$ [mit $\lambda(T) = 0$ falls $y^*(T) > y_1$]
(c) $y(T)$ frei: $\lambda(T) = 0$

Eine notwendige Bedingung

Das Maximumsprinzip beschreibt eine *notwendige* Bedingung für ein **optimales Paar** des Standardproblems, i.e., einem zulässigen Paar, dass dieses dynamische Optimierungsproblem löst.

D.h., für jedes optimale Paar lässt sich so eine Funktion $\lambda(t)$ finden.

Andererseits, falls wir so eine Funktion für ein zulässiges Paar (y^*, u^*) finden können, dann muss (y^*, u^*) nicht automatisch optimal sein.
Es ist aber ein möglicher Kandidat für ein optimales Paar.

(Vgl. die Rolle der stationären Punkte in statischen Optimierungsproblemen.)

Eine hinreichende Bedingung

Sei (y^*, u^*) ein zulässiges Paar des Standardproblem und $\lambda(t)$ eine Funktion, die das Maximumsprinzip erfüllt.

Falls $\mathcal{U}$ konvex und $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda)$ konkav in (y, u) für alle $t \in [0, T]$ ist, dann ist (y^*, u^*) ein optimales Paar.

Vorgangsweise

1. **1.** Für jedes Tripel (t, y, λ) suche ein (globales) Maximum $\hat{u}(t, y, \lambda)$ von $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda)$ bzgl. u.
2. **2.** Löse die Differentialgleichungen

$$y' = g(t, y, \hat{u}(t, y, \lambda), \lambda)$$
$$\lambda' = -H_y(t, y, \hat{u}(t, y, \lambda), \lambda)$$

3. **3.** Finde spezielle Lösungen $y^*(t)$ und $\lambda^*(t)$, die die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ bzw. die Transversalitätsbedingung erfüllen.
4. **4.** Wir erhalten einen Kandidaten für ein optimales Paar durch $y^*(t)$ und $u^*(t) = \hat{u}(t, y^*, \lambda^*)$.
5. **5.** Falls $\mathcal{U}$ konvex und $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda^*)$ konkav in (y, u) ist, dann ist (y^*, u^*) ein optimales Paar.

Beispiel 1

Wir suchen die optimale Kontrollfunktion u^* für

$$\max \int_0^1 y(t)\,dt, \quad u \in [0,1]$$
$$y' = y + u, \quad y(0) = 0, \quad y(1) \text{ frei}$$

Heuristisch:
Die Zielfunktion und damit u sollten möglichst groß sein.
Daher ist $u^*(t) = 1$ für alle t.

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = f(t, y, u) + \lambda g(t, y, u) = y + \lambda(y + u)$$

Beispiel 1

$$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = y + \lambda(y + u)$$

Maximum $\hat{u}$ von $\mathcal{H}$ bzgl. u:

$$\hat{u} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda \geq 0, \\ 0 & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$$

Lösung der (inhomogen lineare) DG

$$\lambda' = -H_y = -(1 + \lambda), \quad \lambda(1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^*(t) = e^{1-t} - 1$$

Da $\lambda^*(t) = e^{1-t} - 1 \geq 0$ für alle $t \geq 0$ gilt: $\quad \hat{u}(t) = 1.$

Beispiel 1

Löse (inhomogene lineare) DG

$$y' = y + \hat{u} = y + 1, \quad y(0) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y^*(t) = e^t - 1$$

Wir erhalten daher

$$u^*(t) = \hat{u}(t) = 1$$

Die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = y + \lambda(y + u)$ ist linear und damit konkav in (y, u).

$u^*(t) = 1$ ist die gesuchte optimale Kontrollfunktion.

Beispiel 2

Wir suchen die optimale Kontrollfunktion u^* für

$$\min \int_0^T \left[y^2(t) + cu^2(t)\right] dt, \quad u \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$
$$y' = u, \quad y(0) = y_0, \quad y(T) \text{ frei}$$

Wir lösen das Maximierungsproblem

$$\max \int_0^T - \left[y^2(t) + cu^2(t)\right] dt$$

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = f(t, y, u) + \lambda g(t, y, u) = -y^2 - cu^2 + \lambda u$$

Beispiel 2

Maximum $\hat{u}$ von $\mathcal{H}$ bzgl. u:

$$0 = H_u = -2c\hat{u} + \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \hat{u} = \tfrac{\lambda}{2c}$$

Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = \hat{u} = \tfrac{\lambda}{2c}$$
$$\lambda' = -H_y = 2y$$

Durch Differenzieren der zweiten DG erhalten wir

$$\lambda'' = 2y' = \tfrac{\lambda}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda'' - \tfrac{1}{c}\lambda = 0$$

Die Lösung dieser homogenen linearen DG 2. Ordnung lautet

$$\lambda^*(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}, \qquad \text{mit } r = \tfrac{1}{\sqrt{c}}$$

($\pm\frac{1}{\sqrt{c}}$ sind die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms.)

Beispiel 2

Anfangswert und Transversalitätsbedingung liefern

$$\lambda^{*\prime}(0) = 2y(0) = 2y_0$$
$$\lambda^*(T) = 0$$

und somit

$$r(C_1 - C_2) = 2y_0$$
$$C_1 e^{rT} + C_2 e^{-rT} = 0$$

mit der Lösung

$$C_1 = \frac{2y_0 e^{-rT}}{r(e^{rT}+e^{-rT})}, \qquad C_2 = -\frac{2y_0 e^{rT}}{r(e^{rT}+e^{-rT})}$$

Beispiel 2

Wir erhalten somit

$$\lambda^*(t) = \frac{2y_0}{r(e^{rT}+e^{-rT})}\left(e^{-r(T-t)} - e^{r(T-t)}\right)$$

$$y^*(t) = \frac{1}{2}\lambda^*(t) = y_0 \frac{e^{-r(T-t)} - e^{r(T-t)}}{r(e^{rT}+e^{-rT})}$$

$$u^*(t) = \hat{u}(t, y^*, \lambda^*) = \frac{1}{2c}\lambda^*(t) = \frac{y_0}{c}\frac{e^{-r(T-t)} - e^{r(T-t)}}{r(e^{rT}+e^{-rT})}$$

Mittel Hesse-Matrix lässt sich leicht prüfen, dass die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(t, y, u, \lambda) = -y^2 - cu^2 + \lambda u$ konkav in y und u ist.

$u^*(t) = \frac{y_0}{c}\frac{e^{-r(T-t)} - e^{r(T-t)}}{r(e^{rT}+e^{-rT})}$ ist die gesuchte optimale Kontrollfunktion.

Das Standardproblem (T variabel)

Wenn der Zeitraum $[0, T]$ nicht a priori festgelegt wird, so muss außer der optimalen Kontrollvariable u^* auch das optimale Zeitintervall $[0, T^*]$ bestimmt werden.

Die Vorgangsweise ist vollkommen analog zum bereits behandelten Fall. Allerdings müssen wir noch folgende Bedingung *zusätzlich* zu (i)–(iii) zum Maximumsprinzip dazufügen:

(iv)

$$\mathcal{H}(T^*, y^*(T^*), u^*(T^*), \lambda(T^*)) = 0$$

Zusammenfassung

- Standardproblem
- Hamiltonfunktion
- Maximumsprinzip
- Hinreichende Bedingung