Kapitel 14

Differentialgleichungen

Ein einfaches Modell (Domar)

Im Domar Wachstumsmodell treffen wir die folgenden Annahmen:

(1) Erhöhung der Investitionsrate $I(t)$ erhöht das Einkommen $Y(t)$:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s} \cdot \frac{dI}{dt} \qquad (s = \text{konstant})$$

(2) Verhältnis von Kapitalstock $K(t)$ zur Produktionskapazität $\kappa(t)$ sei konstant:

$$\frac{\kappa(t)}{K(t)} = \varrho \quad (= \text{konstant})$$

(E) In Gleichgewichtszustand gilt:

$$Y = \kappa$$

Frage: Welche Investitionsrate erhält das Modell für all Zeiten $t \geq 0$ im Gleichgewicht.

Ein einfaches Modell (Domar)

Wir suchen eine Funktion $I(t)$, die zu allen Zeiten die Modellvoraussetzungen und die Gleichgewichtsbedingung erfüllt.

$Y(t) = \kappa(t)$ für alle t impliziert, dass auch $Y'(t) = \kappa'(t)$.

Wir erhalten daher

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{dI}{dt} \overset{(1)}{=} \frac{dY}{dt} \overset{(E)}{=} \frac{d\kappa}{dt} \overset{(2)}{=} \varrho \frac{dK}{dt} = \varrho\, I(t)$$

oder kurz

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{dI}{dt} = \varrho\, I(t)$$

Die Gleichung enthält eine **Funktion** und deren **Ableitung** und muss für all t gelten. Die Unbekannte dieser Gleichung ist eine **Funktion**.

Differentialgleichung erster Ordnung

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DG) erster Ordnung** ist eine Gleichung in der die Unbekannte eine Funktion in einer Variable ist und die die (erste) Ableitung dieser Funktion enthält.

$$y' = a\,y$$
$$y' + a\,y = b$$
$$y' + a\,y = b\,y^2$$

sind Differentialgleichungen erster Ordnung, die exponentielles, beschränktes, bzw. logistisches Wachstum beschreiben.

Allgemein

$$\boxed{y' = F(t, y)}$$

Lösung des Domar Modells

Durch Umformung der Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{1}{I(t)} I'(t) = \varrho\, s$$

Diese Gleichung muss für alle t gelten:

$$\ln(I) = \int \frac{1}{I} dI = \int \frac{1}{I(t)} I'(t)\, dt = \int \varrho\, s\, dt = \varrho\, s\, t + c$$

Substitution: $I = I(t) \quad \Rightarrow \quad dI = I'(t)\, dt$

Wir erhalten daher

$$I(t) = e^{\varrho s t} \cdot e^{c} = C\, e^{\varrho s t} \qquad (C > 0)$$

Allgemeine Lösung

Alle Lösungen der DG $\quad I' = \varrho s I \quad$ lassen sich darstellen als

$$I(t) = C\, e^{\varrho s t} \qquad (C > 0)$$

Diese Darstellung heißt die **allgemeine Lösung** der DG.

Wir erhalten *unendlich viele* verschiedene Lösungen!

Wir können uns von der Gültigkeit der Lösung durch Probe überzeugen:

$$\frac{dI}{dt} = \varrho s \cdot C\, e^{\varrho s t} = \varrho s \cdot I(t)$$

Anfangswertproblem

In unserem Modell ist die Investitionsrate zum Zeitpunkt $t = 0$ („jetzt“) bekannt. Wir erhalten somit zwei Gleichungen:

$$\begin{cases} I'(t) = \varrho s \cdot I \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

Wir müssen daher eine Funktion $I(t)$ finden, die sowohl die DG als auch den Anfangswert erfüllt, i.e., wir müssen das sogenannte **Anfangswertproblem** lösen.

Wir erhalten die **spezielle Lösung** des Anfangswertproblems durch Einsetzen in die allgemeine Lösung.

Lösung des Domar Modells

Die speziell Lösung des Anfangswertproblems

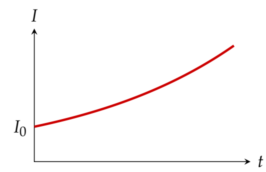
$$\begin{cases} I'(t) = \varrho s \cdot I \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

erhalten wir durch Einsetzen in die allgemeine Lösung:

$$I_0 = I(0) = C\, e^{\varrho s 0} = C$$

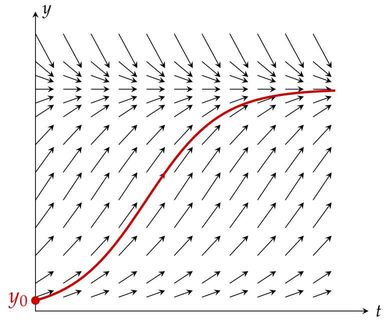
und daher

$$I(t) = I_0\, e^{\varrho s t}$$



Eine graphische Interpretation

Die Gleichung $y' = F(t, y)$ ordnet jedem Punkt (t, y) den Anstieg der Tangente zu. Wir erhalten ein sogenanntes **Vektorfeld**.



Trennung der Variablen

Differentialgleichungen der Form

$$\boxed{y' = f(t) \cdot g(y)}$$

lassen sich formal durch **Trennung der Variablen** lösen:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} dy = f(t)\, dt$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t)\, dt + c$$

Wir erhalten dadurch eine Lösung der DG in *impliziter* Form.

Die DG des Domar Modells haben wir mit dieser Methode gelöst.

Beispiel – Trennung der Variablen

Wir suchen die Lösung der DG

$$y' + t\, y^2 = 0$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = -t\, y^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dy}{y^2} = t\, dt$$

Integrieren ergibt

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int t\, dt + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2} t^2 + c$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$y(t) = \frac{2}{t^2 + 2c}$$

Beispiel – Anfangswertproblem

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + t\, y^2 = 0, \quad y(0) = 1$$

Spezielle Lösung durch Einsetzen:

$$1 = y(0) = \frac{2}{0^2 + 2c} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

und daher

$$y(t) = \frac{2}{t^2 + 2}$$

Lineare DG erster Ordnung

Ein **lineare Differential Gleichung erster Ordnung** hat die Gestalt

$$\boxed{y'(t) + a(t)\, y(t) = s(t)}$$

- **homogene** DG, falls $s = 0$.
- **inhomogene** DG, falls $s \neq 0$.

Homogene lineare DG lassen sich durch Trennung der Variablen lösen.

Beispiel – Homogene lineare DG

Wir suchen die allgemeine Lösung der homogenen linearen DG

$$y' + 3\, t^2 y = 0$$

Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dt} = -3\, t^2\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} dy = -3t^2\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln y = -t^3 + c$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(t) = C\, e^{-t^3}$$

Inhomogene lineare DG erster Ordnung

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, in dem die Koeffizienten a und s der DG *konstant* und *ungleich 0* sind.

$$y'(t) + a\, y(t) = s$$

Wir erhalten dann die allgemeine Lösung als

$$\boxed{y(t) = C\, e^{-at} + \frac{s}{a}}$$

Für das Anfangswertproblem

$$y'(t) + a\, y(t) = s, \quad y(0) = y_0$$

erhalten wir die spezielle Lösung

$$\boxed{y(t) = (y_0 - \bar{y})\, e^{-at} + \bar{y} \qquad \text{mit } \bar{y} = \frac{s}{a}}$$

Beispiel – Inhomogene lineare DG

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - 3y = 6, \quad y(0) = 1$$

Wir erhalten

$$\bar{y} = \frac{s}{a} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y(t) = (y_0 - \bar{y})\, e^{-at} + \bar{y} = (1 - 2)\, e^{3t} + 2 = e^{3t} + 2$$

Die spezielle Lösung lautet daher

$$y(t) = e^{3t} + 2$$

Modell – Marktdynamik

Nachfrage- und Angebotsfunktion seien linear:

$$q_d(t) = \alpha - \beta\, p(t) \qquad (\alpha, \beta > 0)$$
$$q_s(t) = -\gamma + \delta\, p(t) \qquad (\gamma, \delta > 0)$$

Die Preisanpassung sei direkt proportional zur Differenz $(q_d - q_s)$:

$$\frac{dp}{dt} = j\,(q_d(t) - q_s(t)) \qquad (j > 0)$$

Wie entwickelt sich der Preis $p(t)$ in Laufe der Zeit?

$$\frac{dp}{dt} = j\,(q_d - q_s) = j\,(\alpha - \beta p - (-\gamma + \delta p))$$
$$= j\,(\alpha + \gamma) - j\,(\beta + \delta) p$$

und wir erhalten die inhomogene lineare DG erster Ordnung

$$p'(t) + j\,(\beta + \delta)\, p(t) = j\,(\alpha + \gamma)$$

Modell – Marktdynamik

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$p'(t) + j\,(\beta + \delta)\, p(t) = j\,(\alpha + \gamma), \qquad p(0) = p_0$$

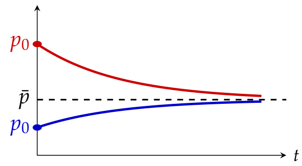
lautet

$$p(t) = (p_0 - \bar{p})\, e^{-j(\beta+\delta)t} + \bar{p}$$

mit

$$\bar{p} = \frac{s}{a} = \frac{j(\alpha + \gamma)}{j(\beta + \delta)} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

$\bar{p}$ ist gerade der Preis im Marktgleichgewicht.



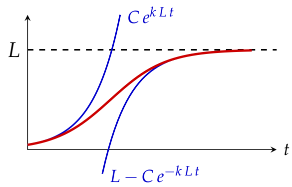
Logistische Differentialgleichung

Eine **logistische Differentialgleichung** hat die Form

$$\boxed{y'(t) - k\, y(t)\, (L - y(t)) = 0}$$

wobei $k > 0$ und $0 \le y(t) \le L$.

- $y \approx 0$: $\quad y'(t) - k\,L\,y(t) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) \approx C\,e^{k\,L\,t}$
- $y \approx L$: $\quad y'(t) + k\,L\,y(t) \approx k\,L^2 \quad \Rightarrow \quad y(t) \approx L - C\,e^{-k\,L\,t}$

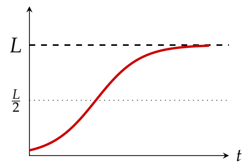


Logistische Differentialgleichung

Die exakte Lösung diese DG kann durch Trennung der Variablen gefunden werden. Wir erhalten:

$$\boxed{y(t) = \frac{L}{1 + C\,e^{-L\,k\,t}}}$$

Alle Lösungen haben einen Wendepunkt in $y = \frac{L}{2}$.



Beispiel

In einer Stadt mit 8100 Einwohnern ist eine Grippeepidemie ausgebrochen. Als die Grippewelle erkannt wird, sind bereits 100 Personen infiziert. 20 Tage später sind es bereits 1000. Es wird erwartet, dass alle Einwohner infiziert werden.
Beschreiben Sie den Verlauf der Grippeepidemie.

Wir verwenden eine logistische DG mit $L = 8100$.
$q(t)$ sei die Anzahl der Infizierten,
wobei $q(0) = 100$ und $q(20) = 1000$.
Die allgemeine Lösung der DG lautet

$$q(t) = \frac{8100}{1 + C\,e^{-8100kt}}$$

Wir müssen k und C bestimmen.

Beispiel

$$q(0) = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{8100}{1 + C} = 100 \quad \Rightarrow \quad C = 80$$
$$q(20) = 1000 \quad \Rightarrow \quad \frac{8100}{1 + 80\,e^{-8100 \cdot 20\,k}} = 1000 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}00001495$$

Die Ausbreitung der Epidemie kann beschrieben werden durch die Funktion

$$q(t) = \frac{8100}{1 + 80\,e^{-0{,}121\,t}}$$

Differentialgleichungen 2. Ordnung

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung** ist eine Gleichung in der die Unbekannte eine Funktion in einer Variable ist und die die erste und zweite Ableitung dieser Funktion enthält:

$$\boxed{y'' = F(t, y, y')}$$

Wir beschränken uns hier auf **lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**:

$$\boxed{y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = s}$$

Homogene lineare DG 2. Ordnung

Wir erhalten allgemeine Lösung der homogenen linearen DG

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = 0$$

mit dem Ansatz

$$y(t) = C\,e^{\lambda t}$$

wobei die Konstante λ die sogenannte **charakteristische Gleichung** erfüllen muss:

$$\boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0}$$

Diese Bedingung folgt unmittelbar aus

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = \lambda^2\, C\,e^{\lambda t} + a_1\,\lambda\, C\,e^{\lambda t} + a_2\, C\,e^{\lambda t}$$
$$= C\,e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2) = 0$$

Charakteristische Gleichung

Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Es gibt drei Fälle:

1. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$: zwei reelle Lösungen
2. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0$: eine reelle Lösung
3. $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$: zwei komplexe (nicht reelle) Lösungen

Fall: $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$

Die allgemeine Lösung der homogenen DG lautet

$$\boxed{y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t}\,, \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}}$$

Beispiel

Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

hat die beiden reellen Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DG lautet daher

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

Fall: $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0$

Die allgemeine Lösung der homogenen DG lautet

$$\boxed{y(t) = (C_1 + C_2\, t)\, e^{\lambda t}\,, \qquad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{a_1}{2}}$$

Von der Gültigkeit der Lösung $t\, e^{\lambda t}$ kann man sich durch Nachrechnen überzeugen.

Beispiel

Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

hat die einzige (reelle) Lösung

$$\lambda = -2$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DG lautet daher

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-2t}$$

Fall: $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$

$\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ ist in diesem Fall nicht reell (sondern eine imaginäre Zahl).

Aus den Rechenregeln für die komplexen Zahlen lässt sich aber eine rein reelle Lösung herleiten:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = e^{at}\left[C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)\right] \\ \qquad \text{mit} \quad a = -\frac{a_1}{2} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_2\right|} \end{array}}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass a gerade der Realteil der Lösung der charakteristischen Gleichung ist, und b der Imaginärteil. Wir können aber hier nicht auf das Rechnen mit komplexen Zahlen eingehen.

Beispiel

Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + y' + y = 0$$

Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

hat keine reellen Lösungen, da $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$ ist.

$$a = -\frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\left|\frac{a_1^2}{4} - a_2\right|} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DG lautet daher

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

Inhomogene lineare DG 2. Ordnung

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DG

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = s$$

hat die Form (falls $a_2 \neq 0$)

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + \frac{s}{a_2}}$$

wobei $y_h(t)$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen DG ist:

$$y_h''(t) + a_1\, y_h'(t) + a_2\, y_h(t) = 0$$

Beispiel

Wir suchen die allgemeine Lösung der inhomogenen DG

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -10$$

Die charakteristische Gleichung der homogenen DG

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

hat die beiden reellen Lösungen

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DG lautet daher

$$y(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t} + \frac{s}{a_2} = C_1\, e^t + C_2\, e^{-2t} + \frac{-10}{-2}$$

Anfangswertproblem

Alle allgemeinen Lösungen enthalten zwei unabhängige Koeffizienten C_1 und C_2.

Für das Anfangswertproblem müssen wir daher zwei Werte vorgeben:

$$\boxed{\begin{cases} y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = s \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}}$$

Beispiel

Wir suchen die spezielle Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -10, \qquad y(0) = 12, \quad y'(0) = -2$$

Die allgemeine Lösung der DG lautet

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1\, e^t + C_2\, e^{-2t} + 5 \\ y'(t) &= C_1\, e^t - 2C_2\, e^{-2t} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Anfangswerte erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} 12 &= y(0) = C_1 + C_2 e^{-2t} \\ -2 &= y'(0) = C_1 - 2C_2 \end{aligned}$$

mit der Lösung $C_1 = 4$ und $C_2 = 3$. Die spezielle Lösung lautet daher

$$y(t) = 4e^t + 3e^{-2t} + 5$$

Fixpunkt einer Differentialgleichung

Die inhomogene lineare DG

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = s$$

besitzt die spezielle konstante Lösung

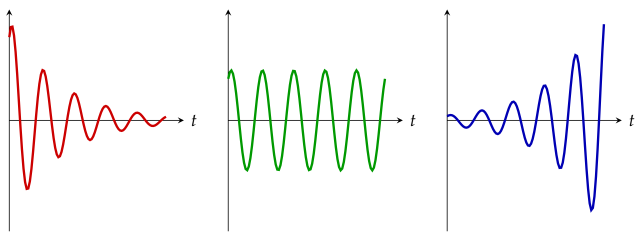
$$y(t) = \bar{y} = \frac{s}{a_2} \qquad \text{(= konstant)}$$

Der Punkt $\bar{y}$ heißt **Fixpunkt** oder **stationärer Zustand** der DG.

Stabile und instabile Fixpunkte

Der Wert von a bestimmt das qualitative Verhalten der Lösung

$$y(t) = e^{at}\, [C_1\, \cos(bt) + C_2\, \sin(bt)] + \bar{y}$$



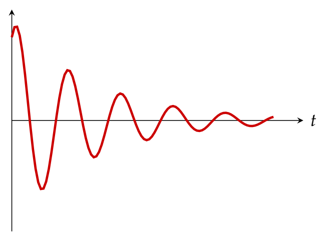
$a < 0$ — stabiler Fixpunkt | $a = 0$ | $a > 0$ — instabiler Fixpunkt

Asymptotisch stabiler Fixpunkt

Falls $a < 0$, dann konvergiert jede Lösung

$$y(t) = e^{at}\, [C_1\, \cos(bt) + C_2\, \sin(bt)] + \bar{y}$$

gegen $\bar{y}$. Der Fixpunkt $\bar{y}$ heißt **asymptotisch stabil**.

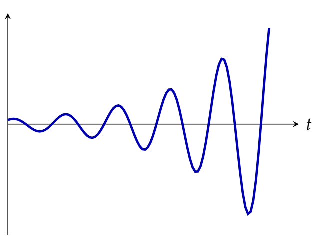


Asymptotisch stabiler Fixpunkt

Falls $a > 0$, dann wird jede Lösung

$$y(t) = e^{at}\, [C_1\, \cos(bt) + C_2\, \sin(bt)] + \bar{y}$$

mit Anfangswert $y(0) = y_0 \neq \bar{y}$ divergieren.
Der Fixpunkt $\bar{y}$ heißt **instabil**.



Beispiel

Die allgemeine Lösung von

$$y'' + y' + y = 2$$

lautet (vgl. oben)

$$y(t) = 2 + e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

Der Fixpunkt $\bar{y} = 2$ ist asymptotisch stabil, da $a = -\frac{1}{2} < 0$.

Zusammenfassung

- Differentialgleichung 1. Ordnung
- Vektorfeld
- Trennung der Variablen
- Homogene und inhomogene lineare DG 1. Ordnung
- Logistische DG
- Homogene und inhomogene lineare DG 2. Ordnung
- Stabile und instabile Fixpunkte