Kapitel 13

Kuhn-Tucker Bedingung

Optimierung unter Nebenbedingungen

Aufgabe:
Berechne das Maximum der Funktion

$$f(x,y)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g(x,y) \leq c, \qquad x,y \geq 0$$

Beispiel:
Wir suchen das Maximum von

$$f(x,y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$$

unter den Nebenbedingungen

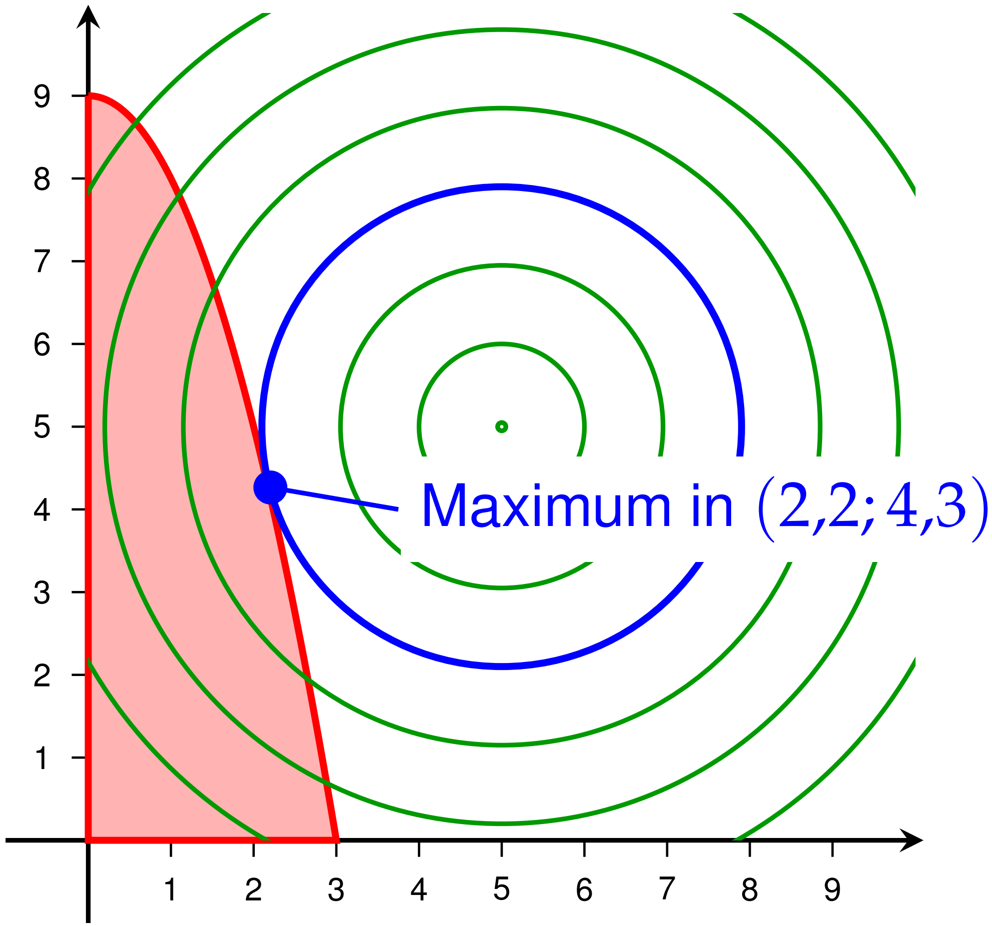
$$x^2 + y \leq 9, \qquad x,y \geq 0$$

Graphische Lösung

Im Falle von zwei Variablen können wir das Problem graphisch „lösen".

1. Zeichne die Nebenbedingung $g(x, y) \leq c$ in die xy-Ebene ein. (Fläche in der Ebene)
2. Zeichne „geeignete" Niveaulinien der zu optimierenden Funktion $f(x, y)$ ein.
3. Untersuche an Hand der Zeichnung welche Niveaulinien den zulässigen Bereich schneiden und bestimme die ungefähre Lage des Maximums.

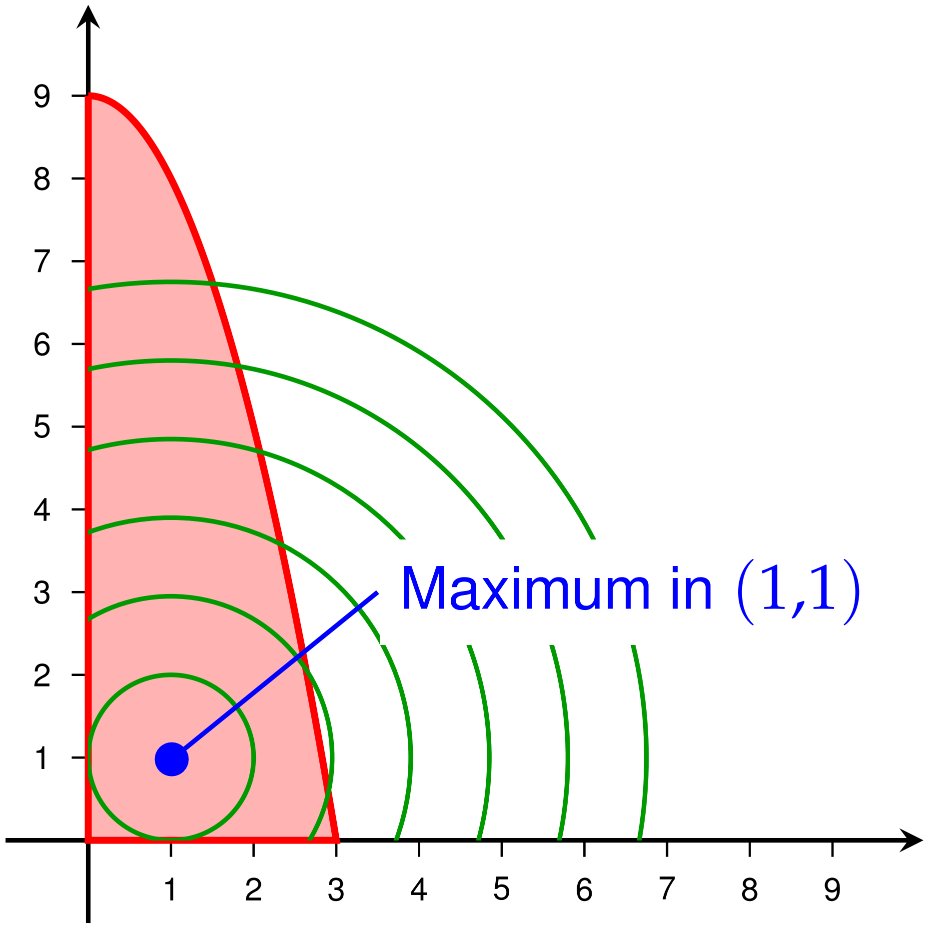
Beispiel – Graphische Lösung



Maximum von $f(x,y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$

gegeben $g(x,y) = x^2 + y \leq 9, \quad x,y \geq 0.$

Beispiel – Graphische Lösung



Maximum von $f(x, y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2$

gegeben $g(x, y) = x^2 + y \leq 9, \quad x, y \geq 0.$

Optimierung unter Nebenbedingungen

Berechne das Maximum der Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &\le c_1 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) &\le c_k \\ x_1, \ldots, x_n &\ge 0 \qquad \textbf{(Nichtnegativitätsbedingung)} \end{aligned}$$

Optimierungsproblem:

$$\max \; f(\mathbf{x}) \quad \text{gegeben} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{c} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \ge 0.$$

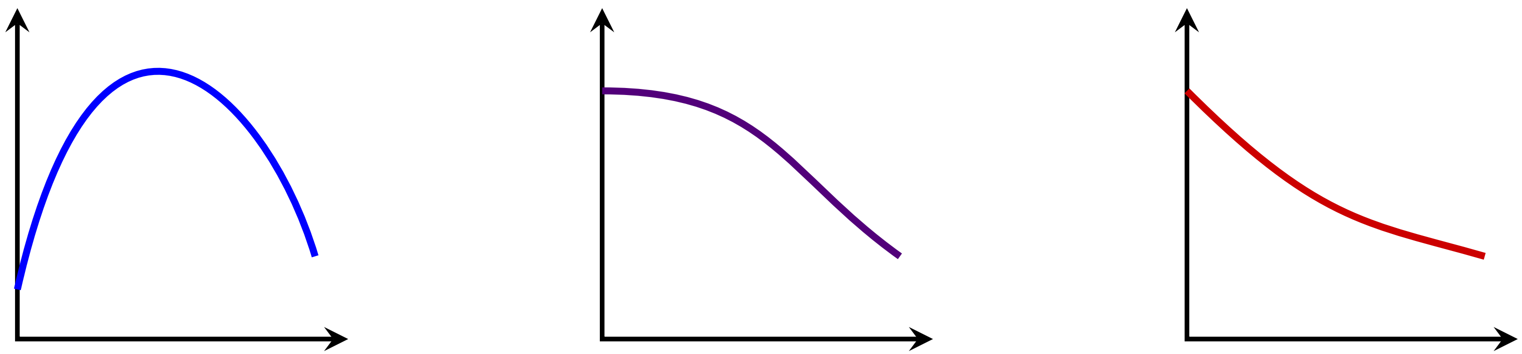
Nichtnegativitätsbedingung

Funktion f in einer Variable mit Nichtnegativitätsbedingung.
Für ein Maximum x^* gilt:

- x^* liegt im Inneren des zulässigen Bereichs:
  $x^* > 0$ und $f'(x^*) = 0$.
- x^* liegt am Rand:
  $x^* = 0$ und $f'(x^*) \leq 0$.

Zusammengefasst:

$$f'(x^*) \leq 0, \qquad x^* \geq 0 \qquad \text{und} \qquad x^* f'(x^*) = 0$$



Nichtnegativitätsbedingung

Im Falle einer Funktion $f(\mathbf{x})$ in mehreren Variablen erhalten wir für jede Variable x_j so eine Bedingung:

$$f_{x_j}(x^*) \leq 0, \qquad x_j^* \geq 0 \qquad \text{und} \qquad x_j^* f_{x_j}(x^*) = 0$$

Schlupfvariable

Maximiere

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) + \boldsymbol{s_1} &= c_1 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) + \boldsymbol{s_k} &= c_k \\ x_1, \ldots, x_n &\geq 0 \\ \boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_k} &\geq 0 \qquad \text{(neue Nichtnegativitätsbedingung)} \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \ldots, x_n) - \boldsymbol{s_i})$$

Schlupfvariable

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \ldots, x_n) - s_i)$$

Berücksichtigen der Nichtnegativitätsbedingung:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0 \quad \text{und} \quad x_j \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} \leq 0, \quad s_i \geq 0 \quad \text{und} \quad s_i \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \text{(keine Nichtnegativitätsbedingung)}$$

Eliminieren der Schlupfvariablen

Wegen $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} = -\lambda_i$ wird die zweite Zeile zu

$$\lambda_i \geq 0, \qquad s_i \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_i s_i = 0$$

Aus $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \lambda_i} = c_i - g_i(\mathbf{x}) - s_i = 0$ folgt $s_i = c_i - g_i(\mathbf{x})$

und wir erhalten daher:

$$\lambda_i \geq 0, \quad c_i - g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i(c_i - g_i(\mathbf{x})) = 0$$

Jetzt brauchen wir die Schlupfvariablen nicht mehr.

Eliminieren der Schlupfvariablen

Verwenden statt $\tilde{\mathcal{L}}$ die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \ldots, x_n))$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_j} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = c_i - g_i(\mathbf{x})$$

Wir können daher die zweite Zeile der Bedingungen für ein lokales Maximum unter Nebenbedingungen schreiben als

$$\lambda_i \geq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0$$

Kuhn-Tucker Bedingung

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n))}$$

Die **Kuhn-Tucker Bedingung** für ein (lokales) Maximum lauten:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0 \quad \text{und} \quad x_j \, \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i \, \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0 \end{array}}$$

Die Kuhn-Tucker Bedingung ist nicht hinreichend.
(Analog zu kritischen Punkten).

Beispiel

Wir suchen das Maximum von

$$f(x,y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y \leq 9, \qquad x, y \geq 0$$

Beispiel

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = -(x-5)^2 - (y-5)^2 + \lambda(9 - x^2 - y)$$

Kuhn-Tucker-Bedingung:

$$\begin{array}{rrcll}
(A) & \mathcal{L}_x & = & -2(x-5) - 2\lambda x & \leq 0 \\
(B) & \mathcal{L}_y & = & -2(y-5) - \lambda & \leq 0 \\
(C) & \mathcal{L}_\lambda & = & 9 - x^2 - y & \geq 0 \\
 & & & & \\
(N) & & & x,\, y,\, \lambda & \geq 0 \\
 & & & & \\
(I) & x\,\mathcal{L}_x & = & -x(2(x-5) + 2\lambda x) & = 0 \\
(II) & y\,\mathcal{L}_y & = & -y(2(y-5) + \lambda) & = 0 \\
(III) & \lambda\,\mathcal{L}_\lambda & = & \lambda(9 - x^2 - y) & = 0
\end{array}$$

Beispiel

Schreiben (I)–(III) an als

$$\begin{aligned}
(I) \quad & x = 0 \quad \text{oder} \quad 2(x-5) + 2\lambda x = 0 \\
(II) \quad & y = 0 \quad \text{oder} \quad 2(y-5) + \lambda = 0 \\
(III) \quad & \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad 9 - x^2 - y = 0
\end{aligned}$$

Müssen nun alle 8 Möglichkeiten ausrechnen, und überprüfen ob die entsprechenden Lösungen die Ungleichungen (A), (B), (C) und (N) erfüllen.

- Falls $\lambda = 0$ $(III,$ links$)$, dann gibt es wegen (I) und (II) vier Lösungen für $(x, y; \lambda)$:

  $(0,0;0)$, $(5,0;0)$, $(0,5;0)$ und $(5,5;0)$.

  Keiner dieser Punkte erfüllt alle Ungleichungen (A), (B) und (C).

  Daher: $\lambda \neq 0$.

Beispiel

Wenn $\lambda \neq 0$, dann gilt wegen (III, rechts): $\quad y = 9 - x^2$.

- Wenn nun $\lambda \neq 0$ und $x = 0$, dann ist $y = 9$ und wegen (II, rechts), $\lambda = -8$. Ein Widerspruch zu (N).
- Wenn $\lambda \neq 0$ und $y = 0$, dann ist $x = 3$ and wegen (I, rechts), $\lambda = \frac{2}{3}$. Ein Widerspruch zu (B).
- Alle drei Variablen müssen daher ungleich 0 sein.
  Daher ist $y = 9 - x^2$ und $\lambda = -2(y-5) = -2(4-x^2)$.
  Eingesetzt in (I) erhalten wir $2(x-5) - 4(4-x^2)x = 0$ und

$$x = \frac{\sqrt{11}+1}{2} \approx 2{,}158 \qquad y = \frac{12-\sqrt{11}}{2} \approx 4{,}342$$
$$\lambda = \sqrt{11} - 2 \approx 1{,}317$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingung wird daher nur vom Punkt

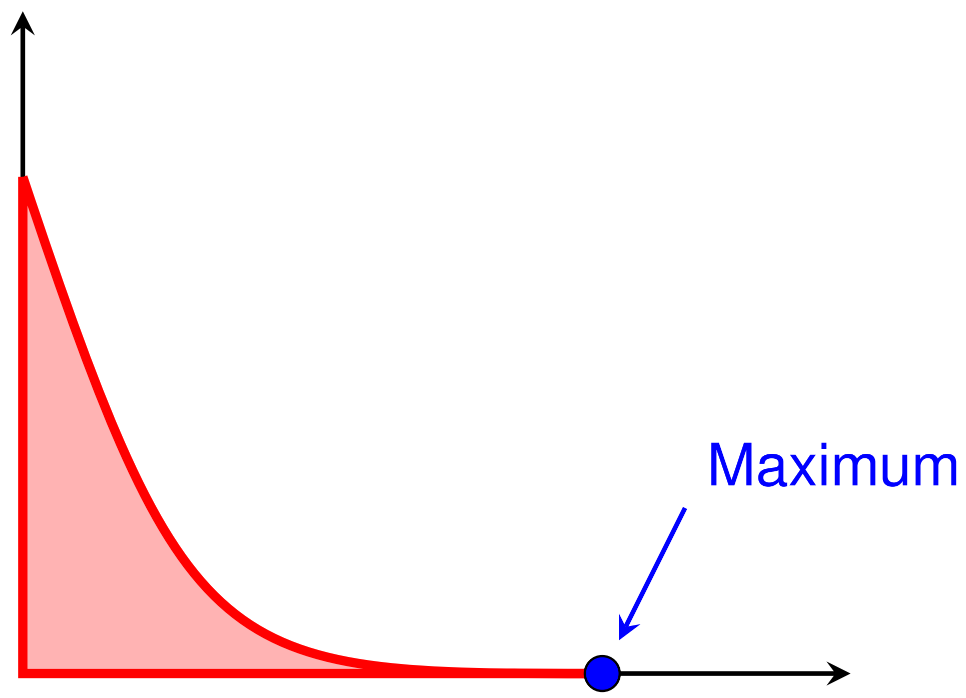
$$(x, y; \lambda) = \left(\frac{\sqrt{11}+1}{2}, \frac{12-\sqrt{11}}{2}; \sqrt{11} - 2\right)$$

erfüllt.

Kuhn-Tucker Bedingung

Die Kuhn-Tucker Bedingung ist leider auch nicht notwendig!

D.h., es gibt Optimierungsprobleme, in denen das Maximum die Kuhn-Tucker Bedingung nicht erfüllt.



Der Satz von Kuhn-Tucker

Wir brauchen ein Werkzeug, um festzustellen, ob ein Punkt ein (globales) Maximum ist. Das ist aber nicht immer leicht.

Der **Satz von Kuhn-Tucker** gibt für einen Spezialfall eine *hinreichende* Bedingung:

(1) Die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ sei differenzierbar und **konkav**.

(2) Die Funktionen der Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, k$, seien alle differenzierbar und **konvex**.

(3) Der Punkt $\mathbf{x}^*$ erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingung.

Dann ist $\mathbf{x}^*$ ein *globales Maximum* von f unter den Nebenbedingungen $g_i \leq c_i$.

Das Maximum ist eindeutig, wenn die Funktion f *streng konkav* ist.

Beispiel

Wir suchen das Maximum von

$$f(x,y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y \leq 9, \qquad x, y \geq 0$$

Die Hessematrizen von $f(x,y)$ und $g(x,y) = x^2 + y$ lauten

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H}_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H}_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) f ist streng konkav.

(2) g ist konvex.

(3) Der Punkt $(x, y; \lambda) = \left(\frac{\sqrt{11}+1}{2}, \frac{12-\sqrt{11}}{2}; \sqrt{11} - 2\right)$ erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingung.

Daher ist nach dem Satz von Kuhn-Tucker $\mathbf{x}^* = (\frac{\sqrt{11}+1}{2}, \frac{12-\sqrt{11}}{2})$ das gesuchte globale Maximum.

Zusammenfassung

- Optimierung unter Nebenbedingungen
- Graphische Lösung
- Lagrange-Funktion
- Kuhn-Tucker Bedingung
- Satz von Kuhn-Tucker