Kapitel 13

# Kuhn-Tucker Bedingung



## Optimierung unter Nebenbedingungen

**Aufgabe:**
Berechne das Maximum der Funktion

$$f(x,y)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g(x,y) \le c, \qquad x,y \ge 0$$

Beispiel:
Wir suchen das Maximum von

$$f(x,y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y \le 9, \qquad x,y \ge 0$$



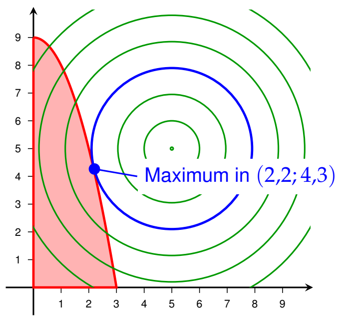
## Graphische Lösung

Im Falle von zwei Variablen können wir das Problem graphisch „lösen“.

1. Zeichne die Nebenbedingung $g(x,y) \le c$ in die $xy$-Ebene ein. (Fläche in der Ebene)
2. Zeichne „geeignete“ Niveaulinien der zu optimierenden Funktion $f(x,y)$ ein.
3. Untersuche an Hand der Zeichnung welche Niveaulinien den zulässigen Bereich schneiden und bestimme die ungefähre Lage des Maximums.



## Beispiel – Graphische Lösung

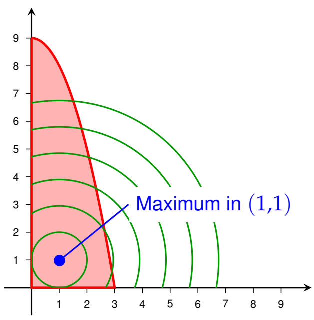



Maximum von $f(x,y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$

gegeben $g(x,y) = x^2 + y \le 9, \quad x,y \ge 0.$



## Beispiel – Graphische Lösung




Maximum von $f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2$

gegeben $g(x,y) = x^2 + y \le 9, \quad x,y \ge 0.$



## Optimierung unter Nebenbedingungen

Berechne das Maximum der Funktion

$$f(x_1,\dots,x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\dots,x_n) &\le c_1 \\ &\vdots \\ g_k(x_1,\dots,x_n) &\le c_k \\ x_1,\dots,x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

**(Nichtnegativitätsbedingung)**

**Optimierungsproblem:**

$$\max\ f(\mathbf{x}) \quad \text{gegeben} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{c} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \ge 0.$$



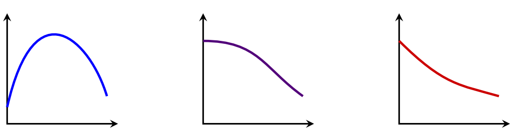
## Nichtnegativitätsbedingung

Funktion $f$ in einer Variable mit Nichtnegativitätsbedingung.
Für ein Maximum $x^*$ gilt:

- $x^*$ liegt im Inneren des zulässigen Bereichs:
  $x^* > 0$ und $f'(x^*) = 0$.
- $x^*$ liegt am Rand:
  $x^* = 0$ und $f'(x^*) \le 0$.

Zusammengefasst:

$$f'(x^*) \le 0, \qquad x^* \ge 0 \qquad \text{und} \qquad x^* f'(x^*) = 0$$





## Nichtnegativitätsbedingung

Im Falle einer Funktion $f(\mathbf{x})$ in mehreren Variablen erhalten wir für jede Variable $x_j$ so eine Bedingung:

$$f_{x_j}(x^*) \le 0, \qquad x_j^* \ge 0 \qquad \text{und} \qquad x_j^* f_{x_j}(x^*) = 0$$

## Schlupfvariable

Maximiere

$f(x_1, \dots, x_n)$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, \dots, x_n) + \mathbf{s_1} &= c_1 \\
&\vdots \\
g_k(x_1, \dots, x_n) + \mathbf{s_k} &= c_k \\
x_1, \dots, x_n &\geq 0 \\
\mathbf{s_1}, \dots, \mathbf{s_k} &\geq 0 \qquad \text{(neue Nichtnegativitätsbedingung)}
\end{aligned}
$$

**Lagrange-Funktion**:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n) - \mathbf{s_i})$$



## Schlupfvariable

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n) - s_i)$$

Berücksichtigen der Nichtnegativitätsbedingung:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0 \quad \text{und} \quad x_j \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} \leq 0, \quad s_i \geq 0 \quad \text{und} \quad s_i \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \text{(keine Nichtnegativitätsbedingung)}$$



## Eliminieren der Schlupfvariablen

Wegen $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial s_i} = -\lambda_i$ wird die zweite Zeile zu

$$\lambda_i \geq 0, \qquad s_i \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_i s_i = 0$$

Aus $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \lambda_i} = c_i - g_i(\mathbf{x}) - s_i = 0$ folgt $s_i = c_i - g_i(\mathbf{x})$

und wir erhalten daher:

$$\lambda_i \geq 0, \quad c_i - g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i (c_i - g_i(\mathbf{x})) = 0$$

Jetzt brauchen wir die Schlupfvariablen nicht mehr.



## Eliminieren der Schlupfvariablen

Verwenden statt $\tilde{\mathcal{L}}$ die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n))$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x_j} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = c_i - g_i(\mathbf{x})$$

Wir können daher die zweite Zeile der Bedingungen für ein lokales Maximum unter Nebenbedingungen schreiben als

$$\lambda_i \geq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0$$



## Kuhn-Tucker Bedingung

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n))}$$

Die **Kuhn-Tucker Bedingung** für ein (lokales) Maximum lauten:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0 \quad \text{und} \quad x_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0 \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0
\end{aligned}}$$

Die Kuhn-Tucker Bedingung ist nicht hinreichend.
(Analog zu kritischen Punkten).



## Beispiel

Wir suchen das Maximum von

$$f(x, y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y \leq 9, \qquad x, y \geq 0$$



## Beispiel

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = -(x-5)^2 - (y-5)^2 + \lambda(9 - x^2 - y)$$

Kuhn-Tucker-Bedingung:

$$
\begin{array}{lllll}
(A) & \mathcal{L}_x & = & -2(x-5) - 2\lambda x & \leq 0 \\
(B) & \mathcal{L}_y & = & -2(y-5) - \lambda & \leq 0 \\
(C) & \mathcal{L}_\lambda & = & 9 - x^2 - y & \geq 0 \\
\\
(N) & & & x,\ y,\ \lambda & \geq 0 \\
\\
(I) & x\,\mathcal{L}_x & = & -x(2(x-5) + 2\lambda x) & = 0 \\
(II) & y\,\mathcal{L}_y & = & -y(2(y-5) + \lambda) & = 0 \\
(III) & \lambda\,\mathcal{L}_\lambda & = & \lambda(9 - x^2 - y) & = 0
\end{array}
$$



## Beispiel

Schreiben $(I)$–$(III)$ an als

$$
\begin{array}{lll}
(I) & x = 0 \quad \text{oder} & 2(x-5) + 2\lambda x = 0 \\
(II) & y = 0 \quad \text{oder} & 2(y-5) + \lambda = 0 \\
(III) & \lambda = 0 \quad \text{oder} & 9 - x^2 - y = 0
\end{array}
$$

Müssen nun alle 8 Möglichkeiten ausrechnen, und überprüfen ob die entsprechenden Lösungen die Ungleichungen $(A)$, $(B)$, $(C)$ und $(N)$ erfüllen.

- Falls $\lambda = 0$ $(III, \text{links})$, dann gibt es wegen $(I)$ und $(II)$ vier Lösungen für $(x, y; \lambda)$:
  $(0{,}0;0)$, $(5{,}0;0)$, $(0{,}5;0)$ und $(5{,}5;0)$.

  Keiner dieser Punkte erfüllt alle Ungleichungen $(A)$, $(B)$ und $(C)$.
  Daher: $\lambda \neq 0$.

## Beispiel

Wenn $\lambda \neq 0$, dann gilt wegen $(III, \text{rechts})$: $\quad y = 9 - x^2$.

- Wenn nun $\lambda \neq 0$ und $x = 0$, dann ist $y = 9$ und wegen $(II, \text{rechts})$, $\lambda = -8$. Ein Widerspruch zu $(N)$.
- Wenn $\lambda \neq 0$ und $y = 0$, dann ist $x = 3$ and wegen $(I, \text{rechts})$, $\lambda = \frac{2}{3}$. Ein Widerspruch zu $(B)$.
- Alle drei Variablen müssen daher ungleich $0$ sein. Daher ist $y = 9 - x^2$ und $\lambda = -2(y-5) = -2(4-x^2)$. Eingesetzt in $(I)$ erhalten wir $2(x-5) - 4(4-x^2)x = 0$ und

$$x = \frac{\sqrt{11}+1}{2} \approx 2{,}158 \qquad y = \frac{12-\sqrt{11}}{2} \approx 4{,}342$$
$$\lambda = \sqrt{11} - 2 \approx 1{,}317$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingung wird daher nur vom Punkt

$$(x, y; \lambda) = \left(\frac{\sqrt{11}+1}{2}, \frac{12-\sqrt{11}}{2}; \sqrt{11} - 2\right)$$

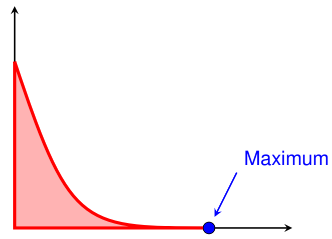
erfüllt.



## Kuhn-Tucker Bedingung

Die Kuhn-Tucker Bedingung ist leider auch nicht notwendig!

D.h., es gibt Optimierungsprobleme, in denen das Maximum die Kuhn-Tucker Bedingung nicht erfüllt.






## Der Satz von Kuhn-Tucker

Wir brauchen ein Werkzeug, um festzustellen, ob ein Punkt ein (globales) Maximum ist. Das ist aber nicht immer leicht.

Der **Satz von Kuhn-Tucker** gibt für einen Spezialfall eine *hinreichende* Bedingung:

**(1)** Die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ sei differenzierbar und **konkav**.

**(2)** Die Funktionen der Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, k$, seien alle differenzierbar und **konvex**.

**(3)** Der Punkt $\mathbf{x}^*$ erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingung.

Dann ist $\mathbf{x}^*$ ein *globales Maximum* von $f$ unter den Nebenbedingungen $g_i \leq c_i$.

Das Maximum ist eindeutig, wenn die Funktion $f$ *streng konkav* ist.



## Beispiel

Wir suchen das Maximum von

$$f(x, y) = -(x-5)^2 - (y-5)^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y \leq 9, \qquad x, y \geq 0$$

Die Hessematrizen von $f(x, y)$ und $g(x, y) = x^2 + y$ lauten

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H}_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## Beispiel

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H}_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**(1)** $f$ ist streng konkav.

**(2)** $g$ ist konvex.

**(3)** Der Punkt $(x, y; \lambda) = \left(\frac{\sqrt{11}+1}{2}, \frac{12-\sqrt{11}}{2}; \sqrt{11} - 2\right)$ erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingung.

Daher ist nach dem Satz von Kuhn-Tucker $\mathbf{x}^* = \left(\frac{\sqrt{11}+1}{2}, \frac{12-\sqrt{11}}{2}\right)$ das gesuchte globale Maximum.



## Zusammenfassung

- Optimierung unter Nebenbedingungen
- Graphische Lösung
- Lagrange-Funktion
- Kuhn-Tucker Bedingung
- Satz von Kuhn-Tucker