

Kapitel 12

Lagrange-Funktion

Optimierung unter Nebenbedingungen

Aufgabe:

Berechne die Extrema der Funktion

$$f(x, y)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = c$$

Beispiel:

Wir suchen die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

unter der Nebenbedingung

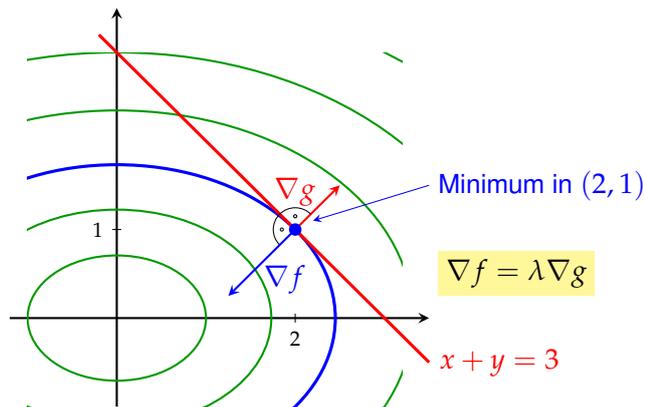
$$g(x, y) = x + y = 3$$

Graphische Lösung

Im Falle von zwei Variablen können wir das Problem graphisch „lösen“.

1. Zeichne die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ in die xy -Ebene ein.
(Kurve in der Ebene)
2. Zeichne „geeignete“ Niveaulinien der zu optimierenden Funktion $f(x, y)$ ein.
3. Untersuche an Hand der Zeichnung welche Niveaulinien den zulässigen Bereich schneiden und bestimme die ungefähre Lage der Extrema.

Beispiel – Graphische Lösung



Extrema von $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ gegeben $g(x, y) = x + y = 3$

Lagrange-Ansatz

Sei \mathbf{x}^* ein Extremum von $f(x, y)$ gegeben $g(x, y) = c$.
Dann müssen $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ und $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ proportional sein:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}^*)$$

wobei λ eine geeignete Proportionalitätskonstante ist.

$$f_x(\mathbf{x}^*) = \lambda g_x(\mathbf{x}^*)$$

$$f_y(\mathbf{x}^*) = \lambda g_y(\mathbf{x}^*)$$

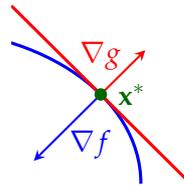
$$g(\mathbf{x}^*) = c$$

Umformen ergibt

$$f_x(\mathbf{x}^*) - \lambda g_x(\mathbf{x}^*) = 0$$

$$f_y(\mathbf{x}^*) - \lambda g_y(\mathbf{x}^*) = 0$$

$$c - g(\mathbf{x}^*) = 0$$



Linke Seite ist Gradient von $\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda (c - g(x, y))$

Lagrange-Funktion

Wir erzeugen uns aus f , g und einer Hilfsvariablen λ eine neue Funktion, die **Lagrange-Funktion**:

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda (c - g(x, y))$$

Die Hilfsvariable λ heißt **Lagrange-Multiplikator**.

Lokale Extrema von f gegeben $g(x, y) = c$ sind kritische Punkte der Lagrangefunktion \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0$$

$$\mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0$$

$$\mathcal{L}_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

Beispiel – Lagrangefunktion

Wir suchen die lokalen Extrema der

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad \text{gegeben} \quad g(x, y) = x + y = 3$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x^2 + 2y^2) + \lambda(3 - (x + y))$$

Kritische Punkte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x &= 2x - \lambda &= 0 \\ \mathcal{L}_y &= 4y - \lambda &= 0 \\ \mathcal{L}_\lambda &= 3 - x - y &= 0\end{aligned}$$

⇒ einziger kritischer Punkt: $(x_0; \lambda_0) = (2, 1; 4)$

Geränderte Hesse-Matrix

Die Matrix

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix}$$

heißt **geränderte Hesse-Matrix**.

Hinreichende Bedingung für lokales Extremum:

Sei $(\mathbf{x}_0; \lambda_0)$ ein kritischer Punkt von \mathcal{L} .

- ▶ $|\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_0; \lambda_0)| > 0 \Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist *lokales Maximum*
- ▶ $|\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_0; \lambda_0)| < 0 \Rightarrow \mathbf{x}_0$ ist *lokales Minimum*
- ▶ $|\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_0; \lambda_0)| = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Beispiel – Geränderte Hesse-Matrix

Wir suchen die lokalen Extrema der

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad \text{gegeben} \quad g(x, y) = x + y = 3$$

Lagrangefunktion: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x^2 + 2y^2) + \lambda(3 - x - y)$

Kritischer Punkt: $(\mathbf{x}_0; \lambda_0) = (2, 1; 4)$

Determinante der geränderten Hesse-Matrix:

$$|\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_0; \lambda_0)| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

⇒ $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ ist ein lokales Minimum.

Viele Variablen und Gleichungen

Berechne die Extrema der Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$$

\vdots

$$(k < n)$$

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = c_k$$

Optimierungsproblem: $\min / \max f(\mathbf{x})$ gegeben $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$.

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (c_i - g_i(\mathbf{x}))$$

Vorgangsweise – Kritische Punkte

1. Stelle Lagrange-Funktion \mathcal{L} auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_k) \\ = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

2. Berechne die ersten partiellen Ableitungen von \mathcal{L} .

3. Setze alle ersten partiellen Ableitungen gleich Null und löse das so entstandene Gleichungssystem mit $n + k$ Unbekannten in $n + k$ Gleichungen.

4. Die ersten n Komponenten (x_1, \dots, x_n) sind die Koordinaten der gesuchten kritischen Punkte.

Beispiel – Kritische Punkte

Wir suchen die kritischen Punkte von

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + 2x_2 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 - x_3 = 3$$

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = & ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2) \\ & + \lambda_1 (2 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2 (3 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Beispiel – Kritische Punkte

Partielle Ableitungen (Gradient):

$$\mathcal{L}_{x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda_1 = 0$$

$$\mathcal{L}_{x_2} = 2(x_2 - 2) - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{x_3} = 4x_3 + \lambda_2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} = 2 - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_2} = 3 - x_2 + x_3 = 0$$

Die kritischen Punkte von \mathcal{L} erhalten wir durch Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen: (lineares Gleichungssystem)

$$x_1 = -\frac{6}{7}, x_2 = \frac{10}{7}, x_3 = -\frac{11}{7}; \lambda_1 = -\frac{26}{7}, \lambda_2 = \frac{44}{7}.$$

Der einzige kritische Punkt von f unter dieser Nebenbedingungen ist somit

$$\mathbf{x}_0 = \left(-\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{11}{7}\right).$$

Geränderte Hesse-Matrix

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \mathcal{L}_{x_1 x_1} & \cdots & \mathcal{L}_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} & \mathcal{L}_{x_n x_1} & \cdots & \mathcal{L}_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Sei $B_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})$ der $(k+r)$ -te führende Hauptminor von $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})$.

Hinreichende Bedingung

Sei $(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ ein kritischer Punkt von \mathcal{L} .

▶ $(-1)^k B_r(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) > 0$ für alle $r = k+1, \dots, n$
⇒ \mathbf{x}_0 ist *lokales Minimum*

▶ $(-1)^r B_r(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) > 0$ für alle $r = k+1, \dots, n$
⇒ \mathbf{x}_0 ist *lokales Maximum*

(n ist die Anzahl der Variablen x_i und
 k ist die Anzahl der Nebenbedingungen.)

Beispiel – Hinreichende Bedingung

Suchen Extrema von $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2$
unter den Nebenbedingungen $x_1 + 2x_2 = 2$ und $x_2 - x_3 = 3$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2) + \lambda_1(2 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(3 - x_2 + x_3)$$

Kritischer Punkt von \mathcal{L} :

$$x_1 = -\frac{6}{7}, x_2 = \frac{10}{7}, x_3 = -\frac{11}{7}; \lambda_1 = -\frac{26}{7}, \lambda_2 = \frac{44}{7}.$$

Beispiel – Hinreichende Bedingung

Geränderte Hesse-Matrix:

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3 Variablen, 2 Nebenbedingungen: $n = 3, k = 2 \Rightarrow r = 3$

$$B_3 = |\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})| = 14$$

$$(-1)^k B_r = (-1)^2 B_3 = 14 > 0 \quad \text{Bedingung erfüllt}$$

$$(-1)^r B_r = (-1)^3 B_3 = -14 < 0 \quad \text{nicht erfüllt}$$

Der kritische Punkt $\mathbf{x}_0 = (-\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{11}{7})$ ist ein *lokales Minimum*.

Globale Extrema

Sei $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ ein kritischer Punkt der Lagrange-Funktion \mathcal{L} des Optimierungsproblems

$$\min / \max f(\mathbf{x}) \text{ gegeben } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

Falls $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *konkav* (konvex) in \mathbf{x} ist, dann ist \mathbf{x}^* ein **globales Maximum** (globales Minimum) von $f(\mathbf{x})$ gegeben $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$.

Beispiel – Globale Extrema

$(x^*, y^*, \lambda^*) = (2, 1; 4)$ ist ein kritischer Punkt der Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems

$$\min / \max f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad \text{gegeben} \quad g(x, y) = x + y = 3$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda^*) = (x^2 + 2y^2) + 4 \cdot (3 - (x + y))$$

Hesse-Matrix:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{L}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} H_1 = 2 > 0 \\ H_2 = 8 > 0 \end{array}$$

\mathcal{L} ist konvex in (x, y) .

$(x^*, y^*) = (2, 1)$ ist ein globales Minimum.

Beispiel – Globale Extrema

$$(\mathbf{x}^*; \lambda^*) = \left(-\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{11}{7}; -\frac{26}{7}, \frac{44}{7}\right)$$

ist ein kritischer Punkt der Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems

$$\min / \max f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2$$

$$\text{gegeben} \quad g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 = 2$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3 = 3$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda^*) = ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2) - \frac{26}{7}(2 - x_1 - 2x_2) + \frac{44}{7}(3 - x_2 + x_3)$$

Beispiel – Globale Extrema

Hesse-Matrix:

$$\mathbf{H}_{\mathcal{L}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} H_1 = 2 > 0 \\ H_2 = 4 > 0 \\ H_3 = 16 > 0 \end{array}$$

\mathcal{L} ist konvex in \mathbf{x} .

$\mathbf{x}^* = \left(-\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ ist ein globales Minimum.

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Die Lage des Extremums \mathbf{x}^* des Optimierungsproblems

$$\min / \max f(\mathbf{x}) \text{ gegeben } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

hängt von \mathbf{c} ab, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{c})$, und somit auch der Extremalwert von f :

$$f^*(\mathbf{c}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))$$

Wie ändert sich $f^*(\mathbf{c})$ mit \mathbf{c} ?

$$\frac{\partial f^*}{\partial c_j}(\mathbf{c}) = \lambda_j^*(\mathbf{c})$$

Der Lagrange-Multiplikator λ_j gibt also an, wie sich der Extremalwert ändert, wenn die Konstante c_j der Nebenbedingung $g_j(\mathbf{x}) = c_j$ verändert wird.

Herleitung

Im Optimum stimmen \mathcal{L} und f überein. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{c}))}{\partial c_j} \quad [\text{Kettenregel}] \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathcal{L}_{x_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}), \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{c}))}_{=0 \text{ da kritischer Punkt}} \cdot \frac{\partial x_i^*(\mathbf{c})}{\partial c_j} + \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_j} \Big|_{(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}), \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{c}))} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_j} \Big|_{(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}), \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{c}))} \\ &= \frac{\partial}{\partial c_j} \left(f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (c_i - g_i(\mathbf{x})) \right) \Big|_{(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}), \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{c}))} \\ &= \lambda_j^*(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

Beispiel – Lagrange-Multiplikator

$(x^*, y^*) = (2, 1)$ ist ein Minimum des Optimierungsproblems

$\min / \max f(x, y) = x^2 + 2y^2$ gegeben $g(x, y) = x + y = c = 3$
mit $\lambda^* = 4$.

Wie ändert sich der Minimalwert f^* von f , wenn sich c ändert?

$$\frac{df^*}{dc} = \lambda^* = 4$$

Umhüllungssatz (Envelope-Theorem)

Wie ändert sich das Extremum f^* des Optimierungsproblems

$$\min / \max f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \text{ gegeben } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}$$

wenn sich der Parameter (die exogene Variable) \mathbf{p} ändert?

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_j} \Big|_{(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}), \lambda^*(\mathbf{p}))}$$

Beispiel – Roys Identität

Maximiere Nutzenfunktion

$$\max U(\mathbf{x}) \text{ gegeben } \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} = m$$

Maximaler Nutzen hängt von Preisen \mathbf{p} und Einkommen m ab:

$$U^* = U^*(\mathbf{p}, m) \quad [\text{indirekte Nutzenfunktion}]$$

Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = U(\mathbf{x}) + \lambda (m - \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x})$

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j} = -\lambda^* x_j^* \quad \text{und} \quad \frac{\partial U^*}{\partial m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \lambda^*$$

und somit

$$x_j^* = -\frac{\partial U^* / \partial p_j}{\partial U^* / \partial m} \quad [\text{Marshall'sche Nachfragefunktion}]$$

Beispiel – Shephards Lemma

Minimiere Ausgaben

$$\min \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} = m \text{ gegeben } U(\mathbf{x}) = \bar{u}$$

(Minimale) Ausgabenfunktion hängt von \mathbf{p} und \bar{u} ab: $e = e(\mathbf{p}, \bar{u})$

Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x} + \lambda (\bar{u} - U(\mathbf{x}))$

$$\frac{\partial e}{\partial p_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j} = x_j^* \quad [\text{Hicks'sche Nachfragefunktion}]$$

Zusammenfassung

- ▶ Optimierung unter Nebenbedingungen
- ▶ Graphische Lösung
- ▶ Lagrange-Funktion und Lagrange-Multiplikator
- ▶ Extremum und kritischer Punkt
- ▶ Geränderte Hesse-Matrix
- ▶ Globale Extrema
- ▶ Interpretation des Lagrange-Multiplikators
- ▶ Umhüllungssatz